

Astérisque

GILLES CHRISTOL

ZOGHMAN MEBKHOUT

**Équations différentielles p -adiques et coefficients
 p -adiques sur les courbes**

Astérisque, tome 279 (2002), p. 125-183

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__279__125_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p -ADIQUES ET COEFFICIENTS p -ADIQUES SUR LES COURBES

par

Gilles Christol & Zoghman Mebkhout

Résumé. — Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0, 1)$ d'un corps p -adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p -adique, un $\mathcal{R}$ -module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$ -réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p -adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p -adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

Table des matières

1. Introduction.....	126
Chapitre I. Fondements de la théorie des équations différentielles p -adiques.....	132
2. Notations générales.....	132
3. Modules différentiels.....	132
4. Rayon de convergence.....	135
5. La théorie de Dwork et Robba.....	137
6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation.....	139
7. Frobenius.....	143
Chapitre II. Le théorème de décomposition.....	147
8. $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles.....	147
9. Pentes d'un module différentiel.....	152
Chapitre III. Modules différentiels de pente nulle.....	159
10. L'ensemble des exposants.....	160
11. Exposant d'un module différentiel de Robba.....	161
12. Structure des modules différentiels de pente nulle.....	165

Classification mathématique par sujets (2000). — 12H25, 14F30.

Mots clefs. — Coefficients p -adiques.

Chapitre IV. Théorèmes d'indice.....	167
13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.....	167
14. Indice des $\mathcal{R}$ -modules différentiels.....	169
Chapitre V. Démonstration du théorème d'algébricité.....	173
15. Réduction au cas irréductible.....	174
16. Réduction au cas complètement irréductible.....	175
17. Le cas complètement irréductible.....	177
Index des notations.....	180
Index terminologique.....	181
Références.....	182

1. Introduction

Dans ce cours, nous avons cherché à donner le maximum d'indications dans le minimum de pages. En particulier, les démonstrations ne sont la plupart du temps qu'esquissées. Pour des démonstrations complètes, nous renvoyons le lecteur aux articles originaux où il trouvera en outre des énoncés plus généraux et des compléments.

La table des matières donne une idée assez précise du contenu. Nous voulons toutefois insister sur les résultats les plus importants.

Soit $p > 0$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p -adiques et K un corps complet à valuation discrète qui contient $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des séries de Laurent en la variable x , à coefficients dans le corps K , qui convergent dans une couronne $1 - \epsilon < |x| < 1$, pour $\epsilon > 0$ non précisé, et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque unité.

On dira $\mathcal{R}$ -module différentiel pour $\mathcal{R}$ -module libre de type fini à connexion.

Au chapitre II, on étudie la structure des $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles c'est-à-dire dont la fonction rayon de convergence $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ tend vers 1 avec ρ (définition 8.7). Les démonstrations complètes sont dans [13].

Pour un tel module différentiel $\mathcal{M}$, on peut définir la « partie modérée » $\mathcal{M}^{\leq 0}$: c'est le plus grand quotient de $\mathcal{M}$ qui est « de pente nulle » (théorème 9.10 et définition 9.16). Plus précisément, on construit sur $\mathcal{M}$ une filtration décroissante $\mathcal{M}_{>\gamma}$, « la filtration selon les pentes p -adiques », indexée par les nombres réels positifs γ et liée au rayon de convergence des solutions du module différentiel dans les disques génériques et $\mathcal{M}^{\leq 0} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{>0}$.

À partir de la filtration selon les pentes p -adiques, on construit un polygone de Newton $\text{New}(\mathcal{M})$ que nous appellerons *polygone de Newton p -adique* de $\mathcal{M}$. Les sommets de ce polygone sont à coordonnées entières, en particulier sa hauteur, notée $\text{Irr}(\mathcal{M}, p)$, est un entier ce qui constitue l'analogie de la propriété de Hasse-Arf

de la théorie ℓ -adique. Ceci est prouvé à la fin du chapitre IV comme conséquence des théorèmes d'indice pour les modules différentiels solubles de pentes strictement positives.

Dans le chapitre III, on étudie les modules différentiels de pente nulle. Les démonstrations originales complètes sont dans [12]. À un tel module différentiel $\mathcal{M}$ de rang μ , on associe un « exposant » $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$: c'est une classe d'équivalence de $\mathbb{Z}_p^\mu$ modulo une certaine relation d'équivalence $\sim$.

On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu / \sim$ a la propriété DNL si les différences des composantes de l'un de ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville p -adiques. Sous cette hypothèse, ces composantes sont des éléments de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ bien définis à l'ordre près. On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu / \sim$ a la propriété NL s'il a la propriété DNL et si les composantes de l'un (et alors de tous) ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville.

Le principal résultat dans ce cas est le « théorème de la monodromie p -adique ». Il dit qu'un module différentiel de pente nulle $\mathcal{M}$ dont l'exposant a la propriété DNL s'obtient par extensions successives à partir de modules différentiels de rang un. Un tel module admet alors une filtration « de monodromie » [12]. En particulier un module différentiel de pente nulle qui est muni d'une structure de Frobenius est quasi-unipotent : après ramification en x d'ordre première à p il s'obtient par extensions successives de modules triviaux.

On définit l'exposant $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ d'un module différentiel soluble $\mathcal{M}$ comme l'exposant de sa partie de pente nulle. On dit que $\mathcal{M}$ a la propriété DNL (resp. NL) si son exposant a cette propriété.

Le résultat central de ce cours est l'existence, dans tout $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble vérifiant des conditions de type NL, d'un $\mathcal{A}$ -réseau sur lequel la connexion est méromorphe.

Théorème 1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$ -module libre de rang fini μ à connexion soluble, ayant la propriété DNL et tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ a la propriété NL. Quitte à faire une extension finie du corps de base K , $\mathcal{M}$ admet un réseau sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ -module libre de rang μ) muni d'une connexion prolongeant celle de $\mathcal{M}$ et n'ayant aucune singularité sauf en 0 où elle a une singularité méromorphe.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet du chapitre V. La preuve complète se trouve dans [14].

Pour montrer l'intérêt du Théorème 1.1 nous présentons maintenant l'une de ses applications principales. Il s'agit d'un Théorème d'algébrisation pour une classe de fibrés p -adiques à connexion.

Soit X/V une courbe connexe et lisse sur l'anneau des entiers V de K de corps résiduel k et soit Z/V un fermé de X/V dont le complémentaire est un ouvert affine $j : U/V \hookrightarrow X/V$. On note $\mathcal{X}^\dagger = (X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le schéma $\dagger$ -adique de Meredith [30] associé à la courbe X/V . Sans réellement nuire à la généralité et pour simplifier, le lecteur pourra supposer que X/V est la droite projective $\mathbb{P}_V^1$ sur V .

Dans ce genre de questions, nous trouvons le point de vue, relativement ancien, des schémas de Meredith mieux adapté que celui des schémas formels. En effet, les objets des catégories que l'on considère sont alors des modules sur des faisceaux d'anneaux pour la topologie de Zariski de la variété en caractéristique $p > 0$. L'avantage est de séparer clairement les questions de fondement des questions de nature p -adique.

Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} := \text{Diff}_V(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$. Posons $\mathcal{O}_{U^\dagger/K} := \mathcal{O}_{U^\dagger/V} \otimes_V K$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/K} := \mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} \otimes_V K$. On considère la catégorie $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ des $\mathcal{O}_{U^\dagger/K}$ -modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{U^\dagger/K}$ -modules à gauche.

De même sur U/V nous considérons la catégorie $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des $\mathcal{O}_{U/K}$ -modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{U/K}$ -modules à gauche si l'on note $\mathcal{D}_{X/V} := \text{Diff}_V(\mathcal{O}_{X/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{X/V}$ et si on pose $\mathcal{D}_{X/K} := \mathcal{D}_{X/V} \otimes_V K$.

On a alors un foncteur exact

$$\text{MLC}(\mathcal{O}_{U/K}) \longrightarrow \text{MLC}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$$

qui à $\mathcal{M}$ associe $\mathcal{M}^\dagger := \mathcal{O}_{U^\dagger/K} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U/K}} \varepsilon^{-1}\mathcal{M}$ où ε est le morphisme naturel d'espaces annelés $(X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/K}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_{X/K})$.

On note $\text{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ la sous-catégorie pleine de $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ dont les objets sont solubles au sens de Dwork-Robba c'est-à-dire ont un rayon de convergence maximum au point générique de X . Depuis les travaux de Baldassarri et de Chiarellotto [2], on sait que les objets de cette catégorie ne sont autres que ce qu'on appelle le plus souvent isocristaux surconvergens.

Soit $\mathcal{M}^\dagger$ un objet de $\text{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$. Pour simplifier, dans cette introduction, on suppose que les points de Z_k sont rationnels sur k . Pour tout point fermé x de Z_k , il définit un $\mathcal{R}$ -module différentiel $\mathcal{M}_x^\dagger$. Le théorème de continuité du rayon de convergence montre que $\mathcal{M}_x^\dagger$ est soluble. On note $\text{MLCSNL}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ la sous-catégorie des modules $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}_x^\dagger$ et $\text{End}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{M}_{x>0}^\dagger)$ ont la propriété NL en tout point x de Z_k .

On note $\text{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules dont l'image par le foncteur précédent est dans la catégorie $\text{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$. Par construction on a alors un foncteur exact

$$(\dagger) : \text{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K}) \rightarrow \text{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K}).$$