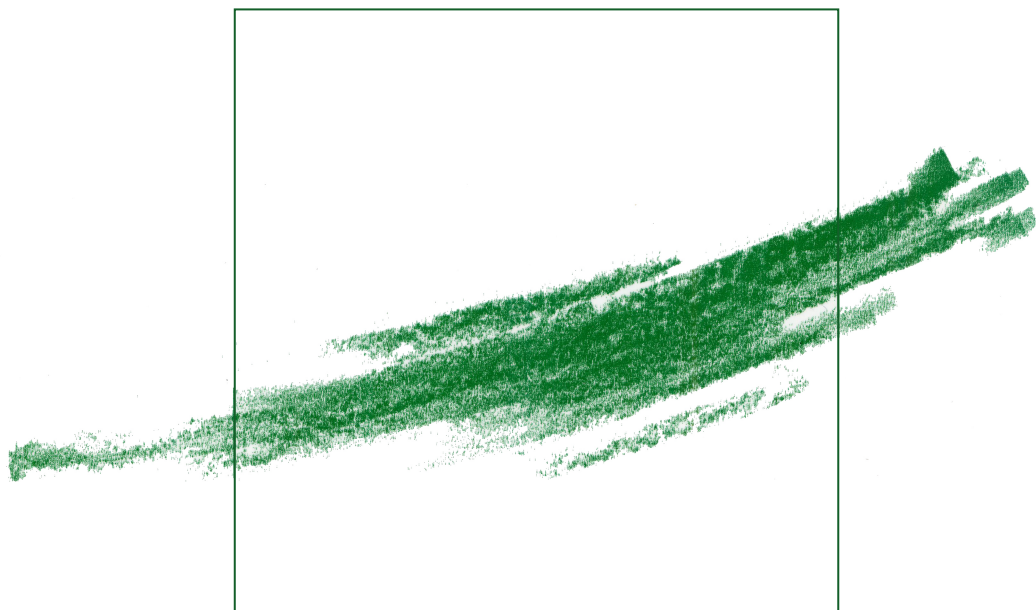


C O U R S   S P É C I A L I S É S  
C O L L E C T I O N   S M F

# Transformations birationnelles de petit degré

Dominique CERVEAU & Julie DÉSERTI



19



# **TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE PETIT DEGRÉ**

**Dominique Cerveau**

**Julie Déserti**

### ***Comité de rédaction***

Antoine CHAMBERT-LOIR  
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

### ***Diffusion***

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis Cedex A  
France  
www.epdsciences.com

### ***Tarifs***

*Vente au numéro* : 72 € (\$ 108)

*Prix membre* : 50 €

### ***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-372-0

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

**COURS SPÉCIALISÉS 19**

**TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES  
DE PETIT DEGRÉ**

**Dominique Cerveau  
Julie Déserti**

**Société Mathématique de France 2013**



*À la mémoire de Felice Ronga qui aurait sans doute aimé ce texte,*

*D. C.*

*À ceux dont, par pudeur, je parle peu,  
avec une pensée particulière pour celui qui s'est éclipsé,*

*J. D.*





## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Introduction</b> .....                                                                                 | 1  |
| Preliminaires : groupe de Cremona .....                                                                   | 1  |
| Génération du groupe de Cremona .....                                                                     | 3  |
| Sous-groupes spéciaux du groupe de Cremona : sous-groupes finis, sous-groupes d'invariance... ..          | 4  |
| Automorphismes et alternative de Tits : analogie avec les groupes linéaires                               | 7  |
| Propriétés et résultats de nature algébrique-dynamique .....                                              | 8  |
| Représentations de réseaux dans le groupe de Cremona et applications ...                                  | 10 |
| Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques .....                                         | 12 |
| Germs de flots birationnels quadratiques .....                                                            | 15 |
| Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les $\Sigma^i$ .....                         | 16 |
| Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques .....                      | 17 |
| Des propriétés algébriques du groupe de Cremona .....                                                     | 18 |
| Transformations birationnelles de degré 3 .....                                                           | 19 |
| Remerciements .....                                                                                       | 23 |
| À l'attention du lecteur .....                                                                            | 23 |
| <br><b>1. Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques</b> .....                           | 25 |
| 1.1. Quelques définitions et notations .....                                                              | 25 |
| 1.2. Transformations rationnelles quadratiques .....                                                      | 27 |
| 1.3. Critère de birationnalité .....                                                                      | 29 |
| 1.4. Relations et transformations birationnelles, second critère de birationnalité .....                  | 34 |
| 1.4.1. Calculs explicites d'espaces de relations linéaires .....                                          | 34 |
| 1.4.2. Critère de birationnalité .....                                                                    | 36 |
| 1.4.3. Paramétrisation de l'adhérence de $\text{Bir}_2$ .....                                             | 39 |
| 1.5. Quelques orbites sous l'action gauche-droite .....                                                   | 41 |
| 1.5.1. Orbites génériques et feuilletage par les orbites .....                                            | 42 |
| 1.5.2. Lieu singulier .....                                                                               | 44 |
| 1.5.3. Orbites spéciales .....                                                                            | 46 |
| 1.6. Conditions d'incidence ; lissité de $\text{Bir}_2$ et non lissité de $\overline{\text{Bir}_2}$ ..... | 48 |
| <br><b>2. Germs de flots birationnels quadratiques</b> .....                                              | 53 |

|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1. Généralités sur les germes de flots birationnels quadratiques .....                                                                  | 53  |
| 2.1.1. Quelques rappels utiles .....                                                                                                      | 53  |
| 2.1.2. Propriétés des germes de flots dans $\text{Bir}_2$ .....                                                                           | 55  |
| 2.1.3. Deux résultats sur les germes de flots dans $\text{Bir}_n$ .....                                                                   | 66  |
| 2.2. Classification des germes de flots birationnels quadratiques .....                                                                   | 67  |
| 2.2.1. La seconde composante du flot est triviale, <i>i.e.</i> , $\varepsilon = 0$ .....                                                  | 68  |
| 2.2.2. La seconde composante du flot est une translation, <i>i.e.</i> , $\varepsilon = 1$ .....                                           | 70  |
| 2.2.3. La seconde composante du flot est une homothétie .....                                                                             | 76  |
| 2.2.4. Récapitulatif .....                                                                                                                | 88  |
| <b>3. Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les <math>\Sigma^i</math></b> .....                                    | 99  |
| 3.1. Généralités .....                                                                                                                    | 99  |
| 3.2. Transformations birationnelles quadratiques et feuilletages .....                                                                    | 103 |
| 3.3. Relations de type Lefschetz, Baum-Bott .....                                                                                         | 105 |
| 3.4. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ .....                                                         | 108 |
| 3.5. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\Sigma^3$ .....                                                                         | 110 |
| 3.6. Conjugaison birationnelle entre automorphismes de Hénon .....                                                                        | 114 |
| <b>4. Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques</b><br>117                                           |     |
| 4.1. Stabilité algébrique .....                                                                                                           | 117 |
| 4.2. Feuilletages et courbes invariants pour des transformations du type $A\sigma$ ..                                                     | 120 |
| 4.2.1. Feuilletages invariants .....                                                                                                      | 120 |
| 4.2.2. Courbes invariantes .....                                                                                                          | 121 |
| 4.3. Exemples de transformations quadratiques préservant une fibration<br>rationnelle .....                                               | 133 |
| 4.4. Transformations ayant une courbe de points fixes .....                                                                               | 134 |
| 4.5. Points d'indétermination des itérés, points périodiques .....                                                                        | 137 |
| 4.5.1. Points d'indétermination, ensembles exceptionnels .....                                                                            | 137 |
| 4.5.2. Points périodiques .....                                                                                                           | 140 |
| 4.6. Transformations birationnelles quadratiques de carré quadratique .....                                                               | 143 |
| 4.6.1. Cas non génériques .....                                                                                                           | 148 |
| <b>5. Propriétés algébriques du groupe de Cremona</b> .....                                                                               | 151 |
| 5.1. Le groupe de Cremona ne se plonge pas dans un $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .....                                                        | 151 |
| 5.2. Centralisateur d'une transformation $A\sigma$ générique .....                                                                        | 152 |
| 5.3. Construction de sous-groupes libres .....                                                                                            | 154 |
| 5.4. Au sujet de la simplicité .....                                                                                                      | 155 |
| 5.4.1. Premiers calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ et conséquences .....                                                         | 156 |
| 5.4.2. Description du sous-groupe normal de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ engendré par une<br>transformation birationnelle quadratique ..... | 157 |
| 5.4.3. Calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ dans un cadre un peu plus général .....                                                | 159 |
| 5.5. Une version un peu plus forte du Théorème de Noether .....                                                                           | 160 |