Séminaires & Congrès
12, 2005, p. 1–117

FORMES MODULAIRES ET PÉRIODES

par

François Martin & Emmanuel Royer

***Résumé.* —** L'objet de ce cours est de présenter la théorie des formes modulaires et certains de ses développements récents. Dans un premier chapitre, on développe la théorie des formes modulaires sur les sous-groupes de congruence $\Gamma_0(N)$. Dans un deuxième chapitre, on présente la notion de périodes de formes modulaires sur le groupe modulaire. On en déduit des résultats concernant les structures rationnelles des espaces de formes modulaires. Dans une troisième partie, on étudie les structures différentielles sur les espaces de formes modulaires. C'est l'occasion de développer les notions de forme quasimodulaire et forme modulaire presque holomorphe introduites par Zagier. Enfin, en annexe, on étudie la théorie des formes modulaires avec systèmes multiplicatifs.

***Abstract* (Periods and modular forms). —** The aim of this course is the presentation of the theory of modular forms and some of its recent developments. In the first chapter, we develop the theory of modular forms on the congruence subgroups $\Gamma_0(N)$. In the second chapter, we present the notion of periods of modular forms on the modular group. We deduce some results concerning the rational structures on the spaces of modular forms. In a third chapter, we study the differential structures on spaces of modular forms. We introduce, in that occasion, the notions of quasimodular forms and quasi holomorphic modular forms developped by Zagier. In an appendix, we study the modular forms with multiplicative systems.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F03, 11F06, 11F11, 11F25, 11F30, 11F37, 11F67.
***Mots clefs.* —** Forme modulaire, période de forme parabolique, période de forme non parabolique, produit scalaire de Petersson, crochet de Rankin-Cohen, fonction L, isomorphisme d'Eichler-Shimura, structure rationnelle, structure différentielle, forme quasimodulaire, forme modulaire presque holomorphe, valeur spéciale, système multiplicatif.

Le second auteur est en partie subventionné par l'ACI jeunes chercheurs « arithmétique des fonctions L » de l'Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (Université Montpellier II, UMR 5149).

Table des matières

Notations – conventions. — Si x est un nombre réel, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On adopte les conventions suivantes

$$\#X \text{ est le cardinal de l'ensemble } X,$$
$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \geqslant 0\}, \quad \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{Z} \colon n > 0\},$$
$$\sum_{d|N} f(d) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d|N}} f(d), \qquad \prod_{p|N} f(p) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} f(p),$$

avec $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

$\langle X \rangle$ est le groupe engendré par les éléments de X,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\delta(E) = \begin{cases} 1 & \text{si la propriété } E \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si u et v sont des entiers, (u, v) est le plus grand diviseur commun de u et v.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n, comptés sans multiplicité :

$$\omega(n) = \#\{p \in \mathcal{P} \colon p \mid n\}$$

et $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs de n :

$$\sigma_0(n) = \#\{d \in \mathbb{N}^* \colon d \mid n\}.$$

Plus généralement, si $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\sigma_s(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d|n}} d^s.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\nu(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

La fonction φ est la fonction indicatrice d'Euler, définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Si $z \in \mathbb{C}$, on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire : $z = x + iy$. On note aussi

$$q = e(z) = \exp(2i\pi z).$$

Pour tout entier $d \geqslant 0$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d est noté $\mathbb{C}_d[X]$. Si $d \geqslant 2$, on note aussi $V_d = \mathbb{C}_{d-2}[X]$.

On note B_k le k^{e} nombre de Bernoulli, défini par

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Remerciements. — Au printemps de l'année 1997, un général nous a demandé de faire une promenade dans le monde scientifique. Nous avons rencontré un guide : Jean-Benoît Bost, qui nous a conduits en bordure du pays modulaire. Bon guide celui qui donne envie d'aller au-delà ! Il nous a confiés à de nouveaux guides qui nous ont accompagnés durant quatre années et firent de nous des marcheurs autonomes : Étienne Fouvry, Philippe Michel et Loïc Merel. Nous voilà maintenant seuls (pas complètement...) dans le pays modulaire et il y a là-bas une forêt immense, pleine de promesses (de dangers ?). Merci à tous nos guides !

Nos remerciements vont aussi à Henryk Iwaniec et Don Zagier. Chaque moment qu'ils nous ont consacré reste une lumière dans nos cœurs et nos esprits. Les cours de Don Zagier au Collège de France ont été une source d'inspiration essentielle pour ce travail. Nous le remercions pour sa présentation enthousiaste d'un aspect original du monde modulaire.

Nous remercions les membres de l'ACI jeunes chercheurs « arithmétique des fonctions L », et notamment Philippe Elbaz–Vincent, pour leur soutien. Enfin, nous exprimons notre gratitude aux organisateurs du colloque « Jeunes » *Formes modulaires et transcendance* organisé au Centre International de Recherche Mathématique en mai 2003 : Stéphane Fischler, Éric Gaudron, Samy Khémira pour leur relecture de versions préliminaires de ce texte. Nous adressons nos remerciements sincères au rapporteur pour ses riches remarques.

PARTIE I

FORMES MODULAIRES

1. Préliminaires sur les sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Z})$

1.1. Action homographique et domaine fondamental. — Soit $\mathscr{H}$ le *demi-plan de Poincaré* défini par $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$. Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathscr{H}$ par l'action homographique

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{R}) \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathscr{H} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned} \tag{1}$$

On s'intéresse dans ce texte à l'action de sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Q})$, aussi on restreint désormais l'étude à $SL(2,\mathbb{Q})$.

On définit un point ∞ (qu'on identifiera géométriquement au point $i\infty$) et on étend l'action (1) restreinte à $SL(2,\mathbb{Q})$ en une action sur $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ avec

$\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ en posant

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \frac{-d}{c} = \infty$$
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \infty = \frac{a}{c}.$$

Cette action n'est pas fidèle puisque $-I$ agit trivialement. Cependant, $-I$ et I sont les seules matrices à agir trivialement. Autrement dit, l'action induite par

$$PSL(2,\mathbb{Q}) = SL(2,\mathbb{Q})/\{\pm I\}$$

est fidèle.

Si Γ est un sous-groupe discret[(1)] de $SL(2,\mathbb{R})$, on appelle *domaine fondamental* un ensemble qui satisfait à la définition suivante.

Définition 1. — Soit Γ un sous-groupe discret de $SL(2,\mathbb{R})$. On dit que $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental de Γ si

– l'ensemble $\mathcal{F}$ contient au moins un point de chaque orbite de $\mathscr{H}$ par l'action de Γ ;

– l'ensemble $\mathcal{F}$ est fermé ;

– l'intérieur de $\mathcal{F}$ ne contient qu'un point de chaque orbite de $\mathscr{H}$ par l'action du quotient $\Gamma/\Gamma \cap \{\pm I\}$.

Tout sous-groupe discret de $SL(2,\mathbb{R})$ admet un domaine fondamental connexe [**Miy89**, § 1.6]. On trouve dans [**Ser77**, chapitre VII, § 1] la preuve des deux propositions suivantes :

Proposition 2. — *Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. — *Un domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$ est*

$$F_1 = \left\{ z \in \mathscr{H} :\ -\frac{1}{2} \leqslant \Re e\, z \leqslant \frac{1}{2},\ |z| \geqslant 1 \right\}.$$

(1) Ayant muni Γ d'une norme, par exemple $\| \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \| = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$, on dit que Γ est discret si toutes les boules sont finies.