Astérisque

BERNADETTE PERRIN-RIOU

Fonctions Lp-adiques des représentations p-adiques

Astérisque, tome 229 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__229__1_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

A Georges POITOU

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **3**

Notations **11**

1. Construction du module des fonctions L p-adiques (sans facteur à l'infini) **15**
Résumé 15
1.1. Notations 17
1.2. Etude de quelques Λ-modules locaux 19
1.3. Cohomologie galoisienne 25
1.4. Module des fonctions L p-adiques (sans facteurs à l'infini) 29

2. Modules des fonctions L p-adiques de V **37**
Résumé 37
2.1. Facteurs Γ 39
2.2. Module des fonctions L p-adiques 47
2.3. Quelques propriétés 50
2.4. Lien avec les séries caractéristiques usuelles et exemples 52
2.5. Equation fonctionnelle 59

3. Etude des valeurs du module de fonctions L p-adiques **65**
Résumé 65
3.1. Périodes p-adiques 67
3.2. Exemples et cas particuliers 76
3.3. Multiplicité du zéro (première forme) 79
3.4. Multiplicité du zéro (deuxième forme) 85
3.5. Valeurs spéciales et périodes 96
3.6. Valeurs spéciales 101

4. Fonction L p-adique d'un motif **111**
Résumé 111
4.1. Rappels 113
4.2. Définition conjecturale de la fonction L p-adique d'un motif 118
4.3. Remarques et exemples 125
4.4. Eléments spéciaux 145
4.5. Continuité 152

Appendice A. Résultats de cohomologie galoisienne **155**
A.1. Cohomologie galoisienne 155
A.2. Théorie d'Iwasawa locale : premiers résultats 159
A.3. Suites exactes de Poitou-Tate 163
A.4. Théorie d'Iwasawa et twists 166

Appendice B. Conjecture de Leopoldt faible **169**

Appendice C. Nombres de Tamagawa locaux et caractéristique d'Euler-Poincaré. Application à l'équation fonctionnelle **177**

Résumé 177

C.1. Facteurs locaux et facteurs ϵ : le cas non archimédien 179

C.2. Caractéristique d'Euler-Poincaré locale 181

C.3. Compatibilité des conjectures à la Bloch-Kato à l'équation fonctionnelle 187

Index **191**

Références **195**

INTRODUCTION

L'interprétation arithmétique des valeurs aux entiers des fonctions L complexes associées aux variétés projectives sur un corps de nombres est fondamentale en théorie des nombres. A la suite de nombreux travaux, les conjectures à la Bloch-Kato ont permis de comprendre quelle est l'interprétation de ces nombres dans un cadre très général. D'autre part, depuis les premiers exemples d'interpolation p-adique de ces nombres, on rêve de construire des fonctions L p-adiques qui auraient des propriétés les plus semblables possibles à celles des fonctions L complexes. Ainsi, par la théorie d'Iwasawa, on cherche à construire deux types de fonctions L p-adiques : les premières à partir des valeurs des fonctions L complexes et les secondes à partir de l'interprétation arithmétique de ces valeurs. Un lien entre ces deux types de fonctions est alors conjecturé.

Reprenons rapidement quelques cas bien connus. Le premier exemple de fonction L est celui de la fonction ζ de Riemann définie comme le prolongement méromorphe $\zeta(s)$ à $\mathbb{C}$ de

$$\sum_{n>0} n^{-s} = \prod_{l} (1 - l^{-s})^{-1}$$

où le produit est pris sur les nombres premiers l. Un analogue p-adique de ζ a été construit par Kubota-Leopoldt puis par Iwasawa, non comme produit de facteurs eulériens, ce qui n'a pas (encore !) de sens en p-adique mais par interpolation p-adique des $\zeta(k)$ pour k entier strictement négatif impair : ainsi, l'étude des propriétés p-adiques des $\zeta(k)$ ou plutôt de

$$\zeta_{\{p\}}(k) = (1 - p^{-k})\zeta(k) \tag{1}$$

permet de construire, pour toute classe j modulo $p-1$ une fonction continue $\zeta_p(s, \omega^j)$ pour $s \in \mathbb{Z}_p - \{1\}$ et ω le caractère de Teichmüller telle que $\zeta_p(k, \omega^j) = \zeta_{\{p\}}(k)$ pour $k \equiv j \mod p-1$, k entier négatif impair. En utilisant l'équation fonctionnelle, on peut aussi réécrire cette formule en termes des entiers positifs pairs : les valeurs interpolées sont alors

$$\Gamma(k)(1 - p^{-k})^{-1}(1 - p^{k-1})\frac{\zeta_{\{p\}}(k)}{(2i\pi)^k} \tag{2}$$

pour k entier positif pair appartenant à une classe de congruence fixée modulo $p-1$. On peut d'autre part définir cette fonction ζ p-adique par interpolation des valeurs en k fixé des fonctions L associées aux caractères de Dirichlet η de conducteur une puissance de p et tels que $\eta(-1) = (-1)^k$.

Un autre exemple désormais classique est celui des courbes elliptiques E sur $\mathbb{Q}$ ayant bonne réduction ordinaire en p, modulaire ou à multiplication complexe. Les premières constructions des fonctions L p-adiques associées à de telles courbes elliptiques modulaires sont dues à Mazur et Swinnerton-Dyer dans le premier cas, à Coates et Wiles dans le second cas. Dans le cas des courbes elliptiques modulaires ordinaires en p, la fonction L p-adique est obtenue par interpolation p-adique des valeurs de la fonction de Hasse-Weil de $E/\mathbb{Q}$ en 1 twistée par un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p arbitrairement grande ; la valeur en **1** (en un sens à préciser) de cette fonction L p-adique est alors de la forme

$$(1-\alpha_p^{-1})(1-p^{-1}\alpha_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1) \tag{3}$$

où $L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)$ est la fonction L "incomplète" en p de $E/\mathbb{Q}$,

$$L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},s) = (1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})L(E/\mathbb{Q},s)$$

et où $(1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})$ est le facteur d'Euler en p avec α_p unité p-adique.

L'idée de la théorie d'Iwasawa est alors de construire un idéal de l'algèbre d'Iwasawa à partir de la représentation p-adique associée à la situation : $\mathbb{Q}_p(1)$ dans le premier cas, tensorisé de $\mathbb{Q}_p$ avec le module de Tate des points d'ordre une puissance de p sur la courbe elliptique dans le deuxième cas (Iwasawa, Mazur, Greenberg, Schneider...). Dans ces cas déjà bien étudiés, on a à faire à des représentations dites ordinaires et cet idéal est construit comme l'idéal caractéristique d'un certain module (dual de Pontryagin d'un groupe de Selmer). Les conjectures principales relient alors cet idéal caractéristique et la fonction L p-adique d'interpolation.

Nous proposons dans ce texte une généralisation à des représentations p-adiques ayant bonne réduction en p. Le cas le plus simple non ordinaire est le cas de la représentation p-adique associée à une courbe elliptique modulaire E ayant bonne réduction supersingulière en p. Plusieurs phénomènes nouveaux apparaissent. Du côté de l'interpolation p-adique, deux fonctions L p-adiques peuvent être construites, de valeur en **1** respectivement

$$(1-\alpha_p^{-1})(1-p^{-1}\alpha_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1) \tag{4}$$

et

$$(1-\beta_p^{-1})(1-p^{-1}\beta_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)\ . \tag{5}$$

D'autre part, ces fonctions n'appartiennent plus à l'algèbre d'Iwasawa (algèbre isomorphe à l'algèbre des séries formelles en une variable à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$) mais ont dans leur développement en série des dénominateurs. Du côté des modules d'Iwasawa, les candidats naturels ne sont pas de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa.

Indiquons grossièrement comment ces difficultés peuvent être surmontées.

D'abord, toutes les sortes de fonctions L p-adiques que nous construisons dépendront d'un paramètre appartenant à une puissance extérieure convenable du module de Dieudonné-Fontaine D associé à la représentation p-adique. Lorsqu'elles seront évaluées au caractère trivial $\mathbf{1}$, apparaît alors la même puissance extérieure d'un opérateur $(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}$ où φ est l'opérateur de Frobenius agissant sur D. Les valeurs propres de cet opérateur permettent d'expliquer les facteurs d'Euler "bizarres" apparaissant dans les formules d'interpolation.

Du côté de la théorie d'Iwasawa arithmétique, nous n'essayons pas de construire un module de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa, qui à notre avis n'a en général pas de raison d'exister. Très grossièrement dit, nous nous contentons d'utiliser des modules construits à partir de la cohomologie galoisienne "non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places S suffisamment grand" H^1 et H^2 et de les "mesurer" à l'aide d'une application "logarithme élargi" ou régulateur à valeurs dans le produit tensoriel de D et d'une algèbre de fonctions contenant l'algèbre d'Iwasawa.

Pour préciser un peu cela, fixons quelques notations.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Si F est un corps de nombres contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on pose $\overline{F}=\overline{\mathbb{Q}}$, $G_F=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit p un nombre premier impair. On choisit dans tout le texte un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On fixe un corps de nombres F non ramifié en p. On note $F_\infty=F(\mu_{p^\infty})$ et $F_n=F(\mu_{p^{n+1}})$. On pose $G_n=\mathrm{Gal}(F_n/F)$, $G_\infty=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. Le groupe G_∞ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$. Si S est un ensemble fini de places contenant les places à l'infini, les places divisant p, on note $G_{S,F}$ le groupe de Galois de la plus grande extension algébrique de F non ramifiée en dehors de S.

Soit V une représentation p-adique pseudo-géométrique de G_F (non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places de F et de de Rham aux places de F divisant p) et cristalline en toutes les places divisant p. Soit S un ensemble fini de places contenant les places divisant p, l'infini et les places où V est ramifiée. Ainsi, V est une représentation p-adique de $G_{S,F}$. Nous attachons à tout réseau $\mathbf{T}$ de V stable par G_F un Λ-module de rang ≤ 1, noté $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ et que l'on appelle **module des fonctions L p-adiques arithmétiques de $\mathbf{T}$**. La construction est fonctorielle en $\mathbf{T}$, multiplicative en les suites exactes, compatible aux homomorphismes de twist par la représentation $\mathbb{Q}_p(j)$ de Tate pour tout entier j et l'on a une équation fonctionnelle lorsque l'on change V en $V^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p(1))$ et $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_p(1))$. Plus précisément, si $\mathbf{D}_p(V)$ est le φ-module filtré associé par la théorie de Fontaine à $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ sur $\mathbb{Q}_p$, le Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est naturellement contenu (à un grain de sel près) dans $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \wedge^* \mathbf{D}_p(V^*(1))$ où $\mathcal{K}(G_\infty)$ est l'anneau total des fractions d'une algèbre $\mathcal{H}(G_\infty)$ contenant l'algèbre d'Iwasawa Λ et où $\wedge^* \mathbf{D}_p(V^*(1))$ est l'algèbre extérieure de $\mathbf{D}_p(V^*(1))$ (on peut en fait remplacer $\mathcal{K}(G_\infty)$ par $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes Frac(\Lambda)$ où $Frac(\Lambda)$ est l'anneau total des fractions de Λ). Si l'on considère la composante $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ fixée par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}(\mu_p)^+)$, la puissance extérieure convenable est la puissance d_+-ième où d_+ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ fixé par une conjugaison complexe.

Comment construit-on ce Λ-module ? Le premier ingrédient est le logarithme élargi $\mathcal{L}_V$ qui est un homomorphisme de Λ-modules

$$Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T}) \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$$

où $Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})$ est la limite projective des $\oplus_{v|p} H^1(F_{n,v}, \mathbf{T})$. Cet homomorphisme (ou plutôt son inverse Ω_V) est construit dans [P94] (il dépend d'un entier h mais nous l'oublierons et ne tiendrons pas compte de cette difficulté un peu technique dans l'introduction, quitte à être incorrect). L'existence de Ω_V et de $\mathcal{L}_V$ repose sur des propriétés d'analycité des logarithmes de Bloch-Kato associés aux twists $V(j)$ de V pour j assez grand. Par exemple, une conséquence de ces propriétés de continuité est que pour v divisant p, si j et j' sont des entiers assez grands congrus modulo $(p-1)p^n$, si $P \in H^1(F_v, T(j))$ et $P' \in H^1(F_v, T(j'))$ sont congrus modulo p^{n+1} (c'est-à-dire que leurs projections dans $H^1(F_v, T(j)/p^{n+1}T(j)) \cong H^1(F_v, T(j')/p^{n+1}T(j'))$ sont égales), les logarithmes de Bloch-Kato de P et de P' relativement à $V(j)$ et à $V(j')$ respectivement et convenablement modifiés sont congrus modulo p^n. Pour un énoncé exact, cf. §4.5 et en particulier §4.5.5.

Revenons à la construction de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ ou plutôt de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ pour simplifier. Si M est un $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$-module, on note M_+ le sous-module de M fixé

par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}(\mu_p)^+)$. On peut voir $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ comme un sous-Λ-module de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_+)$$

par l'isomorphisme $\mathcal{K}(G_\infty)_+ \otimes \wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V^*(1)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_+)$. Considérons les Λ-modules

$$H^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}) = \lim_{\leftarrow n} H^i(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \ .$$

Par localisation, on obtient un homomorphisme de Λ_+-modules de $H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})_+$ dans $Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})_+$. A des facteurs techniques près, si $n \in \wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V)$, $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+(n)$ est essentiellement

$$\Lambda_+ f_+(H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})).n \wedge \det_{\Lambda_+} \mathcal{L}_V(H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})_+)$$

où $f_+(H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))$ est une série caractéristique du Λ_+-module $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})_+$. Ainsi, $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ mesure à la fois la position de $H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})_+$ dans $\mathcal{K}(G_\infty)_+ \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$ par l'application logarithme (régulateur) et la taille de $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$.

Pour que cette définition ne donne pas un Λ-module nul, nous devons supposer vraies les conjectures dites de Leopoldt faibles pour V et pour $V^*(1)$, ce que l'on note ici $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$: il s'agit de la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ et de $H^2(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$. Nous conjecturons donc $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$ et montrons que $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est alors libre de rang 1.

Sous certaines hypothèses de régularité, il est d'autre part possible de calculer à une unité près la valeur en **1** du coefficient dominant d'un générateur de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$. Ce calcul fait en particulier apparaître l'opérateur

$$\wedge^{d_+}(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}$$

(qui intervenait déjà dans les propriétés d'interpolation des logarithmes) et les nombres (ou leurs analogues p-adiques quand il s'agit de périodes complexes) intervenant dans les conjectures de Bloch-Kato. Cela nous permettra de faire des comparaisons entre nos conjectures et les conjectures de Bloch-Kato dans le cadre motivique.

De même, si V est toujours une représentation pseudo-géométrique cristalline aux places divisant p et si c est une conjugaison complexe, on attache à (V, c) un Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(V, c)$ libre de rang 1 contenu dans l'anneau total des fractions $\mathbb{K}$ de $\mathbb{H} = B_{cris} \otimes \mathcal{H}(G_\infty)$. Le Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(V, c)$ est obtenu à partir de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ par une projection convenable. Contrairement à $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$, il est indépendant du choix de $\mathbf{T}$.