AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume I

S. Brochard, B. Conrad, J. Oesterlé

Panoramas et Synthèses

Numéro 42-43

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 42-43

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume I

S. Brochard, B. Conrad, J. Oesterlé

Société mathématique de France 2014
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Sylvain Brochard
Université de Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34 095 Montpellier Cedex 5, France
E-mail : sylvain.brochard@univ-montp2.fr

Brian Conrad
Math Dept., Stanford University, Stanford, CA 94305, USA
E-mail : conrad@math.stanford.edu

Joseph Oesterlé
UMR 7586 du CNRS, Institut Mathématique de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
E-mail : joseph.oesterle@imj-prg.fr

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — 14L15, 14F20.

Key words and phrases. — Group schemes, tori, Hochschild cohomology.

Mots-clé et phrases. — Schémas en groupes, tores, cohomologie de Hochschild.

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

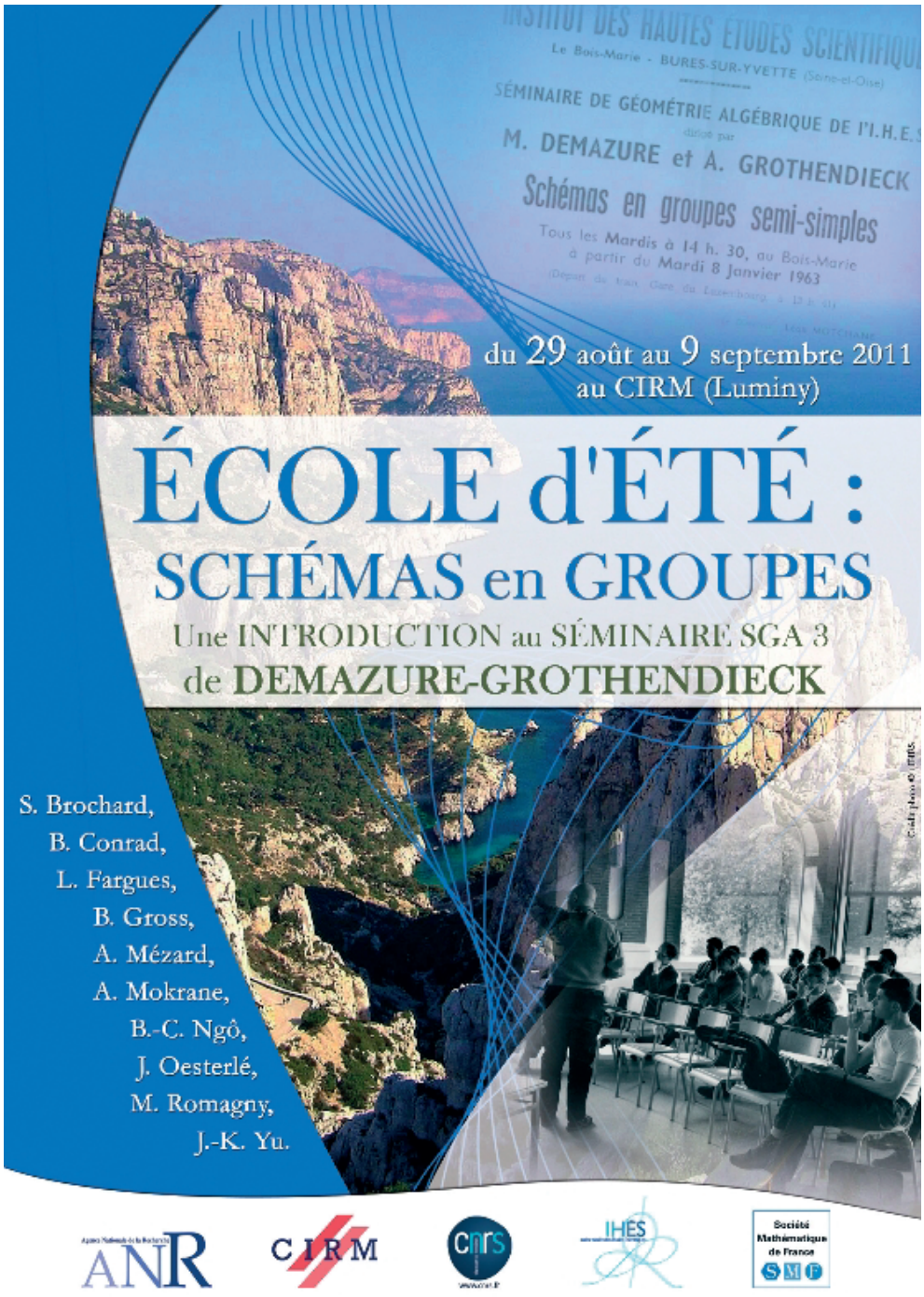
Volume I

S. Brochard, B. Conrad, J. Oesterlé

Abstract. — This volume contains the first part of the lecture notes of the Summer school "Group schemes, an introduction to the SGA3 seminar of Demazure-Grothendieck", which was held at the Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) at Luminy in September 2011. This summer school was devoted to the theory of group schemes and especially reductive group schemes.

The contributions in this first part are expanded versions of the talks introducing Grothendieck topologies (S. Brochard), group schemes of multiplicative type (J. Oesterlé) and reductive group schemes (B. Conrad).

Résumé. — Ce volume contient la première partie des notes de cours de l'école d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck », qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs. Cette première partie est constituée de versions développées des exposés sur les topologies de Grothendieck (S. Brochard), sur les schémas en groupes de type multiplicatif (J. Oesterlé) et sur les schémas en groupes réductifs (B. Conrad).



Réalisation graphique : Julien Fournigault.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles vii
Abstracts ix
Avant-propos xi
Foreword xiii

Sylvain Brochard — *Topologies de Grothendieck, descente, quotients* 1
Introduction 1
1. Topologies de Grothendieck 4
2. Descente 17
3. Quotients 27
Références 61

Joseph Oesterlé — *Schémas en groupes de type multiplicatif* 63
0. Introduction 63

I. Schémas en groupes diagonalisables 63
1. Foncteur des points d'un S-schéma 63
2. Schémas en groupes 65
3. Schémas en groupes constants 68
4. Caractères 69
5. Schémas en groupes diagonalisables 70

II. Schémas en groupes de type multiplicatif 73
6. Schémas en groupes de type multiplicatif 73
7. Classification des schémas en groupes de type multiplicatif 75
8. Le théorème de densité 78

III. Opérations de schémas en groupes de type multiplicatif 79
9. Représentations linéaires de schémas en groupes 79
10. Opérations de schémas en groupes 82
11. Cohomologie de Hochschild 85

IV. Propriétés infinitésimales des schémas en groupes de type multiplicatif . . . 86
12. Rigidité infinitésimale des schémas en groupes de type multiplicatif 86

13. Application à la descente radicielle 88
14. Conjugaison d'homomorphismes 88
15. Conjugaison de sous-groupes de type multiplicatif 89
16. Rigidité infinitésimale dans le cas central 89
17. Conclusion 90
Références 91

Brian Conrad — *Reductive group schemes* 93
Introduction 93
1. Review of the classical theory 98
2. Normalizers, centralizers, and quotients 142
3. Basic generalities on reductive group schemes 165
4. Roots, coroots, and semisimple-rank 1 189
5. Split reductive groups and parabolic subgroups 215
6. Existence, Isomorphism, and Isogeny Theorems 259
7. Automorphism scheme 306
A. Grothendieck's theorem on tori 332
B. Groups of multiplicative type 343
C. Orthogonal group schemes 363
D. Proof of Existence Theorem over **C** 420
References 435
Index 440

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Topologies de Grothendieck, descente, quotients
Sylvain Brochard 1

Ces notes sont celles d'un cours donné à Luminy en 2011, dans le cadre d'une école d'été organisée à l'occasion de la réédition de SGA3. L'objectif est de présenter quelques théorèmes d'existence du quotient d'un schéma par une action de groupe, ou plus généralement par une relation d'équivalence. Nous donnons dans un premier temps les bagages nécessaires de théorie des faisceaux et de théorie de la descente.

Schémas en groupes de type multiplicatif
Joseph Oesterlé 63

Ce texte reprend sans changements majeurs les notes rédigées par l'auteur pour préparer ses exposés oraux. Il fournit un synopsis détaillé de la théorie, sans entrer dans les détails de certaines démonstrations. Il a été inclus dans ce volume à la demande pressante des éditeurs. Ceux-ci signalent d'ailleurs que plusieurs démonstrations présentent des simplifications par rapport au texte original de SGA3.

Schémas en groupes réductifs
Brian Conrad 93

Nous développons la théorie relative des schémas en groupes réductifs, à l'aide de techniques dynamiques et d'espaces algébriques afin de simplifier le développement original dans SGA3.

8

ABSTRACTS

Grothendieck topology, descent, quotients

Sylvain Brochard 1

These are the notes of a course given at Luminy in 2011, in the context of a summer school organized on the occasion of the publication of the new edition of SGA 3. The purpose is to present some existence theorems of the quotient of a scheme by a group action, or more generally by an equivalence relation. We start by giving the necessary preliminary knowledge in the theory of sheaves and the theory of descent.

Group schemes of multiplicative type

Joseph Oesterlé 63

This text contains, without any major changes, the notes written by the author to prepare his talks. It gives a detailed summary of the theory, without going into the details of certain proofs. It has been included in this volume at the urgent request of the editors. The latter would moreover like to point out that several proofs give simplifications of those in the original text of SGA3.

Reductive group schemes

Brian Conrad 93

We develop the relative theory of reductive group schemes, using dynamic techniques and algebraic spaces to streamline the original development in SGA3.

AVANT-PROPOS

Ce volume contient la première partie des notes de cours de l'*École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck »*, que nous avons organisée en septembre 2011 au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM, UMS 822 du CNRS) à Luminy.

Cette école a été financée par le CIRM (labex Carmen), l'Agence Nationale de la Recherche (projet PEPR : Points Entiers et Points Rationnels), le CNRS (formation permanente), l'IMJ-PRG (Institut Mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche), ses équipes de recherche Analyse algébrique et Géométrie et topologie algébriques, l'IHÉS, et la fondation Compositio Mathematica.

Nous adressons nos vifs remerciements à Julien Fournigault, assistant de communication à l'École normale supérieure, pour la réalisation de l'affiche de l'école d'été reproduite en page iv.

Paris, Septembre 2014,

B. Edixhoven, P. Gille, P. Polo et G. Prasad

FOREWORD

The *Luminy Summer School on Group Schemes* was devoted to the SGA3 seminar edited by Demazure-Grothendieck. It was held in the Centre International de Rencontres Mathématiques of Luminy (CIRM) from August 29 to September 9 of 2011 and was supported by the CIRM (Labex Carmin), the Agence Nationale de la Recherche (ANR, project PEPR), the Centre National de Recherches Scientifiques (CNRS, continuing training), the Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS, Bures sur Yvette), the Institut Mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche (IMJ-PRG) and its two research groups Analyse algébrique and Géométrie et topologie algébriques, and the Foundation Compositio Mathematica.

The main purpose of the Summer school was to revisit the Demazure-Grothendieck seminar after almost fifty years and it coincided with the publication of corrected and annotated editions of the first and the third volumes of SGA3 in the series "Documents Mathématiques" of the Société Mathématique de France. A large part of the Summer School was devoted to the following series of lectures :

1. Sylvain Brochard : *Grothendieck topologies, descent, quotients*,
2. Brian Conrad and Jiu-Kang Yu : *Reductive group schemes, parabolic subgroups*,
3. Benedict Gross : *Reductive group schemes over* Spec($\mathbb{Z}$),
4. Laurent Fargues and Abdallah Mokrane : *Formal groups*,
5. Ariane Mézard and Mathieu Romagny : *Extension of rational laws*,
6. Joseph Oesterlé : *Groups of multiplicative type and subtori of group schemes.*

The present volume provides expanded versions of the lecture series (1), (2), (3), and (6). The notes for (2) and (3) were written by B. Conrad. An expanded version of (5) and a complement for (3) on non-split group schemes over $\mathbb{Z}$ will be included in the second volume of proceedings. During the summer school there were several very interesting sessions organized mainly by young researchers which discussed many problems, examples and applications. We list below some of these.

- Cyril Demarche : *Non-abelian Hochschild cohomology and extensions of group schemes*,
- Baptiste Calmès and Jean Fasel : *Classical group schemes*,
- Michel Demazure : *Reminiscences*,
- Ting-Yu Lee : *The adjoint quotient of Chevalley group schemes*,

– Fabrice Orgogozo : *Extended fundamental group*,
– Simon Pépin Le Halleur : *The Borel-de Siebenthal theorem*,
– Gopal Prasad : *Bruhat-Tits theory and non-reductive group schemes*,
– Jilong Tong : *Unipotent group schemes (after Dolgachev-Weisfeiler)*.

An extra course was given by B. Conrad on unipotent and solvable groups in positive characteristic (after J.Tits) of which the two last days were on the recent developments. Conrad's article giving a comprehensive treatment of unipotent and solvable groups, based on his course, will appear in the second volume of the proceedings of the summer school.

We thank the following institutions for their important financial contribution to the Summer School (we give in parentheses the names of the directors at that time) : CIRM (UMS 822 du CNRS, Patrick Foulon), foundation Compositio Mathematica (Gerard van der Geer), IHES (Jean-Pierre Bourguignon), Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche (UMR 7539 du CNRS, Hakan Eliasson et Sinnou David) as well as its research groups Analyse algébrique (Patrice Le Calvez) and Géométrie et topologie algébriques (Christian Blanchet). We thank Bruno Véron from the "service de la formation permanente" of CNRS (délégation Paris B) who initiated and managed the relevant CNRS support.

We also thank Nicolas Bergeron, head of the series Panoramas et synthèses, for offering us to publish the present Proceedings in this series and for agreeing to our request that we, organizers of the Summer School, be running the refereeing process of the submitted articles. Finally, we thank Reinie Erné for having put into LaTeX, in a quick and professional manner, the article of Joseph Oesterlé, submitted in (plain) TeX.

Paris, Septembre 2014,

B. Edixhoven, P. Gille, P. Polo et G. Prasad