

324

ASTÉRISQUE

2009

FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS
AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 324, 2009

Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST	Patrice LE CALVEZ
Guy DAVID	Guy MÉTIVIER
Olivier DEBARRE	Robert Alain OLIVER
Damien GABORIAU	Raphaël ROUQUIER
Guy HENNIART	Wolfgang SOERGEL
Masaki KASHIWARA	Wendelin WERNER
Yves ANDRÉ (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

Tarifs 2009

Vente au numéro : 70 € (\$ 105)

Abonnement Europe : 454 €, hors Europe : 503 € (\$ 754)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2009

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-264-8

Directeur de la publication : Aline BONAMI

324

ASTÉRISQUE

2009

FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS
AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Joël Bellaïche

509 Math Building, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027
jbellaic@math.columbia.edu

Gaëtan Chenevier

Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, Institut Galilée, Université Paris 13,
99 Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
Gaetan.Chenevier@normalesup.org

Classification mathématique par sujet (2000). — 11F80 (11F33, 11F85, 14F30), 14D15 (14B12, 14G22), 11G40 (11S25, 11F70, 11R39, 11F55), 20G05 (20C15, 15A24).

Mots-clefs. — Pseudo-caractère, lieu de réductibilité, représentation galoisienne, trianguline, déformation p -adique, variété de Hecke, groupe de Selmer, conjectures de Bloch-Kato, groupe unitaire, représentation automorphe, conjecture d'Arthur.

Ce livre est dédié à la mémoire de Serge Bellaïche, frère et ami.

FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS

Joël BELLAÏCHE & Gaëtan CHENEVIER

Abstract. — This book presents an in-depth study of the families of Galois representations carried by the p -adic eigenvarieties attached to unitary groups. The study encompasses some general algebraic aspects (properties of the space of representations of a group in the neighbourhood of a point, reducibility loci, pseudocharacters), and other aspects more specific to Galois groups of local or number fields. In particular, we define and study certain deformation functors of crystalline representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$, namely *trianguline deformations*, which are naturally associated to the families above. As an application, we show how the geometry of these eigenvarieties at “classical” points is related to the dimension of certain Selmer groups. This, combined with conjectures of Langlands and Arthur on the discrete automorphic spectrum of unitary groups, allows us to prove, amongst other things, new cases of the Bloch-Kato conjectures (in any dimension).

Résumé (Familles de représentations galoisiennes et groupes de Selmer). — Ce livre présente une étude approfondie des familles de représentations galoisiennes portées par les variétés de Hecke p -adiques des groupes unitaires. Cette étude comprend des aspects algébriques généraux (propriétés de l’espace des représentations d’un groupe au voisinage d’un point, lieux de réductibilité, pseudo-caractères), et d’autres plus spécifiques aux groupes de Galois des corps locaux ou des corps de nombres. Nous définissons et étudions notamment certains foncteurs de déformations des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$ (*déformations triangulines*) qui sont naturellement associés aux familles ci-dessus. En guise d’application, nous montrons comment la géométrie de ces variétés de Hecke aux points « classiques » est reliée à la dimension de certains groupes de Selmer. Ceci, conjugué aux conjectures de Langlands et Arthur sur le spectre automorphe discret des groupes unitaires, nous permet entre autres de démontrer de nouveaux cas des conjectures de Bloch-Kato (en toute dimension).

CONTENTS

Introduction	1
1. Pseudocharacters, representations and extensions	7
1.1. Introduction	7
1.2. Some preliminaries on pseudocharacters	12
1.2.1. Definitions	12
1.2.2. Main example	13
1.2.3. The Cayley-Hamilton identity and Cayley-Hamilton pseudocharacters	14
1.2.4. Faithful pseudocharacters, the kernel of a pseudocharacter	14
1.2.5. Cayley-Hamilton quotients	15
1.2.6. Two useful lemmas on pseudocharacters	16
1.2.7. Tensor operations on pseudocharacters	18
1.3. Generalized matrix algebras	19
1.3.1. Definitions, notations and examples	20
1.3.2. Structure of a GMA	21
1.3.3. Representations of a GMA	22
1.3.4. An embedding problem	24
1.3.5. Solution of the embedding problem in the reduced and nondegenerate case	25
1.3.6. Solution of the embedding problem in the general case	28
1.4. Residually multiplicity-free pseudocharacters	31
1.4.1. Definition	31
1.4.2. Lifting idempotents	31
1.4.3. The structure theorem	33
1.5. Reducibility loci and Ext-groups	34
1.5.1. Reducibility loci	34
1.5.2. The representation ρ_i	36
1.5.3. An explicit construction of extensions between the ρ_i 's	37
1.5.4. The projective modules M_i and a characterization of the image of $\iota_{i,j}$	39
1.5.5. Complement: Topology	42
1.6. Representations over A	43
1.7. An example: the case $r = 2$	47

1.8. Pseudocharacters with a symmetry	50
1.8.1. The set-up	50
1.8.2. Lifting idempotents	51
1.8.3. Notations and choices	53
1.8.4. Definition of the morphisms $\tau_{i,j}$	54
1.8.5. Definition of the morphisms $\perp_{i,j}$	54
1.8.6. The main result	55
1.8.7. A special case	56
2. Trianguline deformations of refined crystalline representations .	59
2.1. Introduction	59
2.2. Preliminaries of p -adic Hodge theory and (φ, Γ) -modules	63
2.2.1. Notations and conventions	63
2.2.2. (φ, Γ) -modules over the Robba ring $\mathcal{R}_A$	63
2.2.3. Some algebraic properties of $\mathcal{R}_A$	64
2.2.4. Étale and isocline φ -modules	66
2.2.5. Cohomology of (φ, Γ) -modules	67
2.2.6. (φ, Γ) -modules and representations of G_p	67
2.2.7. Berger's theorem	68
2.3. Triangular (φ, Γ) -modules and trianguline representations over artinian $\mathbb{Q}_p$ -algebras	71
2.3.1. (φ, Γ) -modules of rank one over $\mathcal{R}_A$	71
2.3.2. Definitions	72
2.3.3. Weights and Sen polynomial of a triangular (φ, Γ) -module	72
2.3.4. De Rham triangular (φ, Γ) -modules.	73
2.3.5. Deformations of triangular (φ, Γ) -modules	75
2.3.6. Trianguline deformations of trianguline representations	80
2.4. Refinements of crystalline representations	81
2.4.1. Definition	81
2.4.2. Refinements and triangulations of (φ, Γ) -modules	82
2.4.3. Non critical refinements	83
2.5. Deformations of non critically refined crystalline representations	85
2.5.1. A local and infinitesimal version of Coleman's classicity theorem	86
2.5.2. A criterion for a deformation of a non critically refined crystalline representation to be trianguline	86
2.5.3. Properties of the deformation functor $X_{V, \mathcal{G}}$	89
2.6. Some remarks on global applications	91
3. Generalization of a result of Kisin on crystalline periods	93
3.1. Introduction	93
3.2. A formal result on descent by blow-up	95
3.2.1. Notations	95
3.2.2. The left-exact functor D	96