

382

ASTÉRISQUE

2016

ARITHMÉTIQUE p -ADIQUE DES FORMES DE HILBERT

Fabrizio ANDREATTA, Stéphane BIJAKOWSKI, Adrian IOVITA,
Payman L. KASSAEI, Vincent PILLONI, Benoît STROH,
Yichao TIAN & Liang XIAO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 382, 2016

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOEN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 55 € (\$82)

Abonnement Europe : 472 €, hors Europe : 512 € (\$768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-843-5

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

382

ASTÉRISQUE

2016

ARITHMÉTIQUE p -ADIQUE DES FORMES DE HILBERT

Fabrizio ANDREATTA, Stéphane BIJAKOWSKI, Adrian IOVITA,
Payman L. KASSAEI, Vincent PILLONI, Benoît STROH,
Yichao TIAN & Liang XIAO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Fabrizio Andreatta

Dipartimento di Matematica “Federigo Enriques”
Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italie
fabrizio.andreatta@unimi.it

Stéphane Bijakowski

Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité,
LAGA, CNRS, UMR 7539,
F-93430, Villetaneuse, France
bijakows@math.univ-paris13.fr

Adrian Iovita

Department of Mathematics and Statistics
Concordia University, Faculty of Arts and Science
7141 Sherbrooke St. W., AD-328, Montreal, Québec, Canada H4B 1R6
iovita@mathstat.concordia.ca

Payman L. Kassaei

Department of Mathematics and Statistics,
McGill University,
805 Sherbrooke St. W., Montreal H3A 0B9, QC, Canada.
kassaei@math.mcgill.ca

Vincent Pilloni

Unité de Mathématiques pures et appliquées
École normale supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69 364 Lyon Cedex 07, France
vincent.pilloni@ens-lyon.fr

Benoît Stroh

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
Institut Galilée, Université Paris 13
99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
stroh@math.univ-paris13.fr

Yichao Tian

Morningside Center of Mathematics,
Chinese Academy of Sciences,
55 Zhong Guan Cun East Road,
Beijing, 100190, China
yichaot@math.ac.cn

Liang Xiao

University of Connecticut,
Storrs, Department of Mathematics,
341 Mansfield Road, Unit 1009, Storrs, CT 06250, U.S.A.
liang.xiao@uconn.edu

Classification mathématique par sujet (2000). — 11F41, 11G18, 11F33, 14G35, 11F80.

Mots-clefs. — Formes modulaires de Hilbert, formes modulaires p -adiques, formes modulaires surconvergentes, représentations galoisiennes, modularité, conjecture d’Artin, conjecture de Fontaine-Mazur.

ARITHMÉTIQUE p -ADIQUE DES FORMES DE HILBERT

Fabrizio ANDREATTA, Stéphane BIJAKOWSKI, Adrian IOVITA,
Payman L. KASSAEI, Vincent PILLONI, Benoît STROH,
Yichao TIAN & Liang XIAO

Résumé — Ce volume est consacré à l'arithmétique p -adique des formes modulaires de Hilbert. Il contient plusieurs théorèmes de classicité de formes surconvergentes généralisant d'une part le critère de Coleman, valable en poids assez grand, d'autre part celui de Buzzard-Taylor, valable en poids un, ce dont on déduit des applications aux conjectures d'Artin et de Fontaine-Mazur. On construit également des variétés de Hecke pour les formes de Hilbert.

Abstract (p -adic arithmetic of Hilbert modular forms). — This volume is devoted to the study of Hilbert p -adic modular forms. It contains classicality theorems for overconvergent forms which generalize on the first hand Coleman criterion, which can be applied in big weights, and on the second hand Buzzard-Taylor criterion, which can be applied in weight one. We deduce applications to the Artin and Fontaine-Mazur conjectures. We finally construct Hecke varieties for Hilbert modular forms.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	xvii
PAYMAN L. KASSAEI — <i>Analytic Continuation of Overconvergent Hilbert Modular Forms</i>	
1. The classical case	1
1.1.	1
1.2. The proof of Coleman’s theorem via analytic continuation	2
1.3. Discussion : the essential ingredients in the second step of analytic continuation	11
2. Hilbert Modular Varieties	13
2.1. Notation	13
2.2. The (φ, η) -invariant on $\bar{Y}$	15
2.3. The type invariant on $\bar{X}$	16
2.4. The relationship between the type and the (φ, η) invariants	16
2.5. Definition of the strata	17
2.6. The infinitesimal nature of $\bar{Y}$	17
2.7. The geometry of $\bar{Y}$	20
2.8. The Key Lemma	23
2.9. The p -adic geometry of Y	24
2.10. The Key Lemma revisited	27
3. Domains of automatic analytic continuation	28
3.1. The preliminaries	28
3.2. A guide to visualizing the geometry of $\mathfrak{Y}_{\text{rig}}$	28
3.3. Analytic continuation, the first step	29
3.4. Analytic continuation, the second step	30
4. The Strong Artin Conjecture	34
5. Classality	38
5.1.	38
5.2. The norm estimates	45
References	47

STÉPHANE BIJAKOWSKI — <i>Classicité de formes modulaires de Hilbert</i>	49
Introduction	49
1. Variété et formes de Hilbert	50
1.1. L'espace de modules	50
1.2. Formes modulaires de Hilbert	53
1.3. Normes	54
2. Opérateurs de Hecke	54
2.1. Définition	54
2.2. Propriétés	56
2.3. Décomposition des opérateurs de Hecke	59
2.4. Normes	60
3. Classicité de formes surconvergentes	62
3.1. Prolongement automatique	62
3.2. Séries de Kassaei	62
3.3. Fin de la démonstration	66
4. Compactifications et principe de Koecher	66
4.1. Compactification toroïdales	66
4.2. Principe de Koecher	70
Références	71
YICHAO TIAN & LIANG XIAO — <i>p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms</i>	73
1. Introduction	73
Structure of the paper	77
Acknowledgements	78
Notation	78
2. Preliminaries on Hilbert Modular Varieties and Hilbert Modular Forms	79
2.1. Shimura varieties for $\mathrm{GL}_{2,F}$	79
2.2. Automorphic Bundles	80
2.3. Moduli interpretation and integral models	81
2.9. Tame Hecke actions on $\mathbf{Sh}_K(G)$	85
2.10. Compactifications	86
2.11. De Rham cohomology	87
2.12. Integral models of automorphic bundles	88
2.14. De Rham complex and Hodge filtrations	90
2.15. The dual BGG-complex	90
3. Overconvergent Hilbert Modular Forms	92
3.1. Notation	92
3.2. Hasse invariant and ordinary locus	93
3.3. Overconvergent Cusp Forms	93
3.4. Rigid cohomology of the ordinary locus.	94
3.7. Prime-to- p Hecke actions	96
3.10. The operator $S_{\mathfrak{p}}$	98

3.11. The $\mathfrak{p}$ -canonical subgroup	99
3.12. Partial Frobenius $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$	100
3.13. Study of $\varphi_{\mathfrak{p}}$ over the ordinary locus	101
3.15. $U_{\mathfrak{p}}$ -correspondence	103
3.18. $U_{\mathfrak{p}}$ -operator	105
3.21. Norms	107
4. Formalism of Rigid Cohomology	109
4.1. A brief recall of rigid cohomology	109
4.2. Formalism of dual Čech complex	111
4.4. Setup of Hilbert modular varieties	112
4.5. Isocrystals on the Hilbert modular varieties	112
4.6. Partial Frobenius on X	113
4.9. Twisted partial Frobenius	115
4.12. Étale Cohomology	118
5. Quaternionic Shimura Varieties and Goren-Oort Stratification	122
5.1. Quaternionic Shimura variety	122
5.4. Auxiliary CM extension	124
5.5. Auxiliary Shimura varieties	125
5.6. Automorphic sheaves on Shimura varieties	126
5.8. Family of Abelian varieties	127
5.9. Tensorial induced representations	128
5.10. Automorphic representations of $\mathrm{GL}_{2,F}$	129
5.11. Cohomology of $\mathbf{Sh}_{K_{\mathfrak{s}}}(G_{\mathfrak{s}})$	130
5.13. Cohomology of $\mathbf{Sh}_{K_{E,p}}(T_{E,\tilde{\mathfrak{s}}})$	130
5.21. Description of the GO-stratification of $\mathbf{Sh}_{K''_{\emptyset,p}}(G''_{\emptyset})_{\overline{\mathbb{F}}_p}$	136
6. Computation of the Rigid Cohomology I	140
6.4. Overconvergent Eigenforms of level $K_1(\mathfrak{N})$	146
7. Computation of the Rigid Cohomology II	150
7.4. Reduction of the proof of Theorem 7.1	151
7.5. Contribution of the one-dimensional representations	152
7.6. Contribution of the cuspidal representations	153
7.7. Cyclic words	154
References	159

FABRIZIO ANDREATTA & ADRIAN IOVITA & VINCENT PILLONI — <i>On overconvergent Hilbert modular cusp forms</i>	163
1. Introduction	163
2. The weight spaces	169
3. Overconvergent modular forms for the group G^*	170
3.1. Hilbert modular varieties	170
3.2. The canonical subgroup theory	171
3.3. The sheaf $\mathcal{F}$	173
3.4. The modular sheaves	174

3.5. Families of modular sheaves	176
3.6. The specialization map for cusp forms	178
3.7. Hecke operators	182
4. Overconvergent modular forms for the group G	184
4.1. Overconvergent descent from G^* to G	184
4.2. Arithmetic Hilbert modular forms	188
4.3. Hecke operators	188
5. The arithmetic eigenvariety	189
6. An appendix : Some toric geometry	190
References	192
VINCENT PILLONI & BENOÎT STROH — <i>Surconvergence, ramification et modularité</i>	195
Partie I. Réductions et preuve des corollaires	200
1. Une forme faible du théorème	200
2. Modularité résiduelle	202
2.1. Modularité potentielle des représentations icosaédrales	202
2.2. Corollaires	203
Partie II. Déformations et méthode de Taylor-Wiles-Kisin	204
3. L'algèbre Λ et les déformations du déterminant	205
4. Anneaux de déformations locales	205
4.1. En les places divisant p	205
4.2. En les places de Taylor-Wiles	210
4.3. Représentations spéciales	210
5. Anneaux de déformations globales	211
5.1. Notations et définitions	211
5.2. Calculs d'espaces tangents	212
6. Variétés de Hilbert	213
6.1. Variétés abéliennes de Hilbert polarisées	213
6.2. Le faisceau des formes modulaires	214
6.3. Action du centre	214
6.4. Ajout de niveau en les places de Taylor-Wiles	217
6.5. Algèbres de Hecke	218
6.6. Théorie de Hida	219
6.7. Les modules	219
7. La méthode de Taylor-Wiles-Kisin	221
7.1. Représentations galoisiennes	221
7.2. Un théorème de relèvement modulaire	222
Partie III. Classicité de formes modulaires surconvergentes	227
8. Énoncé du critère de classicité	227
9. Préliminaires sur les schémas en groupes	228