

BULLETIN DE LA S. M. F.

BRUNO BLIND

Distributions homogènes sur une algèbre de Jordan

Bulletin de la S. M. F., tome 125, n° 4 (1997), p. 493-528

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_4_493_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_4_493_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTIONS HOMOGÈNES SUR UNE ALGÈBRE DE JORDAN

PAR BRUNO BLIND (*)

« *Gute Uhrwerke sind sie : nur Sorge man, sie richtig aufzuziehn !...* »
(« Ce sont de bonnes horloges ; qu'on prenne soin seulement
de les bien remonter !... »)

F. Nietzsche : Also sprach Zarathustra

RÉSUMÉ. — Nous donnons une base holomorphe (en s) de l'espace $\mathcal{H}^s$ des distributions homogènes de degré s sur une algèbre de Jordan V euclidienne simple, et établissons pour la transformée de Fourier de cette base des formules qui constituent la généralisation directe des formules classiques donnant la transformée de Fourier des distributions $|x|^s$ et $\text{sign}(x)|x|^s$ sur $\mathbb{R}$.

ABSTRACT. — We give a holomorphic (in s) basis of the space $\mathcal{H}^s$ of s -homogeneous distributions on simple euclidean Jordan algebras. We compute also the Fourier transform of this basis. This gives a direct generalization of classical formulas for the Fourier transform of the distributions $|x|^s$ and $\text{sign}(x)|x|^s$.

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur lequel agit un groupe G ; la détermination des distributions homogènes sous l'action du groupe G est un problème classique (*cf.* A. Weil [We] et M. Raïs [Ra]).

Dans [Ri-St], F. Ricci et E.M. Stein donnent la dimension de l'espace $\mathcal{H}^s$ des distributions G -homogènes de degré s sur l'espace $\text{Herm}(r, \mathbb{C})$ où G est

(*) Texte reçu le 11 juillet 1996, révisé le 17 juillet 1997, accepté le 14 novembre 1997.
B. BLIND, URA CNRS 750, Département de Mathématiques, Université H. Poincaré,
BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy. Email : blind@iecn.u-nancy.fr.

Classification AMS : 46F10, 17C.

Mots clés : Distributions homogènes, algèbres de Jordan, distribution zêta, transformation de Fourier.

le groupe $GL(r, \mathbb{C})$: la dimension est égale au nombre d'orbites ouvertes du groupe G , soit $r + 1$. Ces auteurs évoquent la possibilité d'étendre leur méthode au cas d'une algèbre de Jordan simple et euclidienne ; M. Muro, utilisant l'analyse micro-locale, donne la dimension de l'espace $\mathcal{H}^s$ dans ce cas (cf. [Mu], elle est toujours égale au nombre d'orbites ouvertes du groupe G).

Nous montrons dans ce travail que les techniques de [Ri-St], généralisées aux algèbres de Jordan simples et euclidiennes, et les résultats de J. Faraut et I. Satake sur les coefficients intervenant dans l'équation fonctionnelle des distributions zêta conduisent naturellement à une base de l'espace $\mathcal{H}^s$ qui constitue un analogue des distributions $|x|^s$ et $\text{sign}(x)|x|^s$ sur $\mathbb{R}$.

Après les rappels sur les algèbres de Jordan, nous généralisons dans le paragraphe 3 aux algèbres de Jordan simples et euclidiennes, certains résultats de F. Ricci et E.M. Stein sur les pôles, ainsi que sur le support des coefficients intervenant dans la partie singulière du développement de Laurent en ces points, des distributions du type

$$\sum_{i=0}^r a_i |\det x|^s \chi_{\Omega_i}(x)$$

où les coefficients a_i sont dans $\mathbb{C}$. Notons que M. Muro [Zürich, 1994] trouve, en utilisant l'analyse micro-locale, les mêmes résultats dans le cas de l'algèbre des matrices symétriques réelles.

Ces résultats, combinés avec ceux de M. Muro [Mu] sur la dimension de l'espace $\mathcal{H}^s$, nous permettent de donner, au paragraphe 4, une base holomorphe en s de $\mathcal{H}^s$. Nous calculons également la transformée de Fourier de cette base et trouvons des formules analogues à celles que I.M. Gelfand et G.E. Chilov établissent pour $|x|^s$ et $\text{sign}(x)|x|^s$ (voir [Ge-Ch, formules 12' et 13, p. 170–171]) :

$$\hat{f}_s = \sqrt{2\pi} f_{-s-1}, \quad \hat{g}_s = i\sqrt{2\pi} g_{-s-1}$$

où

$$f_s(x) = 2^{-\frac{1}{2}s} \frac{|x|^s}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))}, \quad g_s(x) = 2^{-\frac{1}{2}s} \frac{\text{sign}(x)|x|^s}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+2))}.$$

Avec nos théorèmes 3.3 et 3.6, on peut copier la méthode de F. Ricci et E.M. Stein et redémontrer le résultat de M. Muro sur la dimension de l'espace $\mathcal{H}^s$, c'est ce que nous indiquons brièvement dans l'appendice.

C'est avec plaisir que je remercie J. Faraut pour m'avoir suggéré le problème, et P.Y. Gaillard pour ses nombreux encouragements. Je remercie également le rapporteur de la première version de ce travail pour m'avoir (fortement) incité à rajouter le paragraphe 6.

2. Notations et rappels sur les algèbres de Jordan

A. Les algèbres de Jordan simples et euclidiennes.

Nous renvoyons à [Br-Koe], [Fa-Ko], [Sa1] pour les définitions et les principaux faits concernant les algèbres de Jordan.

Soit V une algèbre de Jordan euclidienne sur le corps $\mathbb{R}$, simple, de dimension n , de rang r et d'élément unité e . L'entier d est déterminé par l'égalité

$$n = r + \frac{1}{2}dr(r-1).$$

Pour x et y dans V , on définit les endomorphismes de V :

$$\mathcal{L}(x)y = xy, \quad \mathcal{P}(x) = 2\mathcal{L}^2(x) - \mathcal{L}(x^2), \quad x \square y = \mathcal{L}(xy) + [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)].$$

On munira V de la forme bilinéaire définie positive

$$\langle x, y \rangle = \frac{r}{n} \operatorname{tr} \mathcal{L}(xy)$$

et dx désignera la mesure euclidienne associée à ce produit scalaire.

On note $\det x$ le déterminant de V . C'est un polynôme irréductible et homogène de degré r . Un élément x de V est inversible si $\det x \neq 0$. Nous noterons $\operatorname{Det} g$ le déterminant d'un élément g de $\operatorname{GL}(V)$.

Tout élément x de l'algèbre V peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

où $\{e_1, \dots, e_r\}$ est un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux (dépendant de x). Les nombres λ_i sont appelés les valeurs propres de x et l'on a

$$\det x = \prod_{i=1}^r \lambda_i.$$

Le rang de x est le nombre de réels λ_i non nuls (comptés avec multiplicité). Si un élément inversible x possède p valeurs propres positives et q valeurs propres négatives, on dira que sa signature est (p, q) ($p + q = r$). On note Ω_j l'ensemble des éléments inversibles de signature $(r - j, j)$. Le cône $\Omega = \Omega_0$ est la composante connexe contenant e de l'ensemble des éléments inversibles de V .

Notons G la composante neutre du groupe de structure de V et fixons un système complet d'idempotents orthogonaux $\{e_1, \dots, e_r\}$ de l'algèbre V ; le groupe G admet une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$

où K est le sous-groupe de G des éléments qui fixent l'unité e , A est engendré par les $\mathcal{P}(\sum_{i=1}^r a_i e_i)$ (avec $a_i > 0$), et où N est engendré par les transformations de Frobenius $\exp(2z \square e_i)$ avec z dans

$$V_{ij} = \{x \in V; e_i x = e_j x = \frac{1}{2} x\}, \quad i < j,$$

(pour tout ceci voir [Fa-Ko]). Les orbites de V sous l'action du groupe G ont été déterminées par S. Kaneyuki et I. Satake (cf [Ka], [Sa2]) : ce sont les ensembles $S_{p,q} = Go_{p,q}$ où

$$o_{p,q} = \sum_{i=1}^{p-q} e_i - \sum_{i=1}^q e_{p-q+i} \quad (\text{avec } 0 \leq q \leq p \leq r);$$

en particulier la signature est invariante sous G . Pour $p = r$, les orbites $S_{p,q}$ sont ouvertes et l'on a $S_{r,q} = \Omega_q$; les autres orbites sont contenues dans le lieu singulier $S = \{x \in V; \det x = 0\}$ de l'algèbre V et sont en fait des G^1 orbites où $G^1 = \{g \in G; \text{Det } g = 1\}$.

Rappelons brièvement la classification des algèbres de Jordan sur $\mathbb{R}$ simples et euclidiennes (voir [Br-Koe], [Fa-Ko]).

1) $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles d'ordre r avec

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx), \quad d = 1 \quad n = \frac{1}{2}r(r + 1), \quad \langle x, y \rangle = \text{tr } xy.$$

Ici le déterminant est le déterminant usuel.

2) $V = \text{Herm}(r, \mathbb{C})$ l'espace des matrices hermitiennes complexes d'ordre r avec

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx), \quad d = 2, \quad n = r^2, \quad \langle x, y \rangle = \text{tr } xy.$$

Ici encore le déterminant est le déterminant usuel.

3) $V = \text{Herm}(r, \mathbb{H})$ l'espace des matrices hermitiennes sur $\mathbb{H}$ d'ordre r , avec le produit

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Ici $d = 4$.

4) $V = \mathbb{R} \times E$ où E est un espace euclidien de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$, de dimension $n - 1$. Le produit de Jordan est défini par

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu + (u, v)_E, \lambda v + \mu u);$$

ici $r = 2$, $d = n - 2$ et le déterminant est donné par $\det(\lambda, u) = \lambda^2 - \|u\|_E^2$.

5) Une algèbre de Jordan exceptionnelle constituée de matrices $(3, 3)$ à coefficients dans les octaves de Cayley ($d = 8$, $r = 3$, $n = 27$).