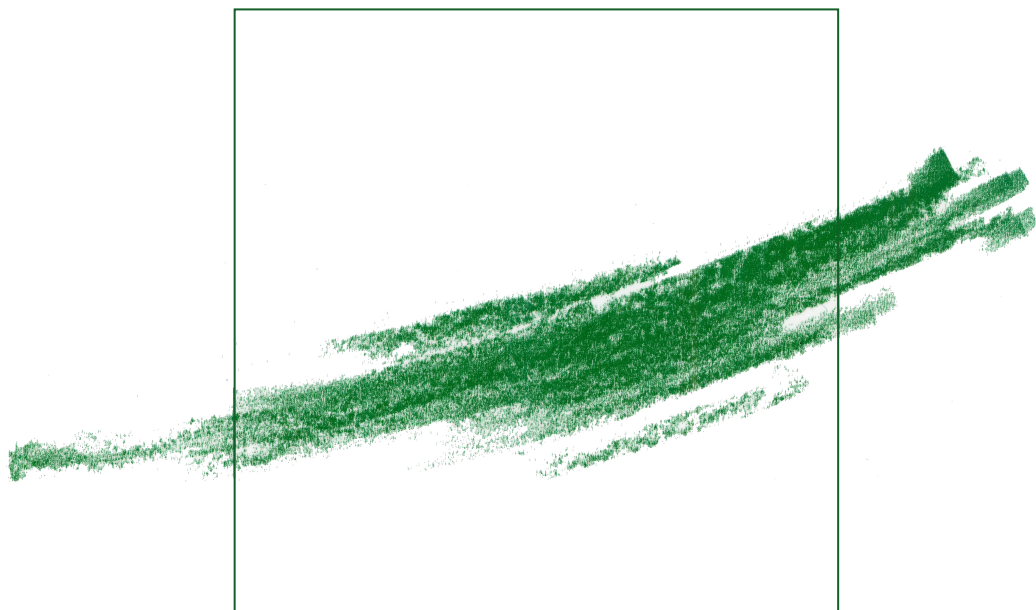


C O U R S S P É C I A L I S É S
C O L L E C T I O N S M F

Stochastic properties of dynamical systems

Françoise PÈNE



30

Comité de rédaction

Raphaël CÔTE
Cyril DEMARCHE
Romain DUJARDIN
Olivier GUICHARD

Thierry LÉVY
Bertrand MAURY
Alain VALETTE

Sophie GRIVAUX (Rédactrice en chef)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 54 € (\$ 81)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
cours_specialises@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-967-8

Directeur de la publication : Fabien DURAND

**AN INTRODUCTION TO THE STUDY
OF THE STOCHASTIC PROPERTIES
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

Françoise Pène

COURS SPÉCIALISÉS 30

**AN INTRODUCTION TO THE STUDY
OF THE STOCHASTIC PROPERTIES
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

Françoise Pène

Société Mathématique de France 2022

Françoise Pène

UBO, UFR Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

6 avenue Le Gorgeu

29238 Brest cedex 3

Mathematical Subject Classification (2010). — 37-00, 37A25, 37A30, 60F05, 60G42, 47A55.

Keywords. — Recurrence, ergodicity, mixing, Markov, operator, quasi-compactness, martingale method, Nagaev-Guivarc'h method, Keller-Liverani perturbation theorem, decorrelation, Lindeberg method, central limit theorem.

Mots-clefs. — Récurrence, ergodicité, mélange, Markov, opérateur, quasi-compacité, méthode de martingales, méthode de Nagaev-Guivarc'h, théorème de perturbation de Keller-Liverani, décorrelation, méthode de Lindeberg, théorème central limite.

AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF THE STOCHASTIC PROPERTIES OF DYNAMICAL SYSTEMS

Françoise Pène

Abstract. — This book provides an introduction to the study of the stochastic properties of probability preserving dynamical systems. Only the usual knowledge of the first year of a Master's degree is required. Many reminders are given. The definitions and results are illustrated by examples and corrected exercises. The book presents the notions of Poincaré's recurrence, of ergodicity, of mixing. It enlightens also existing links between dynamical systems and Markov chains. The final objective of this book is to present three methods for establishing central limit theorems in the context of chaotic dynamical systems: a first method based on martingale approximations, a second method based on perturbation of quasi-compact linear operators and a third method based on decorrelation estimates.

Résumé (Une introduction à l'étude des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques). — Ce livre est un ouvrage introductif à l'étude des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques chaotiques préservant une mesure de probabilité. Les prérequis de ce livre sont les connaissances usuellement enseignées en première année de Master en Mathématiques (ce livre contient de plus des rappels de niveau Bac+4). Les définitions et les résultats contenus dans cet ouvrage sont illustrés par des exemples et des exercices corrigés. Le livre commence par une présentation des notions classiques dans l'étude des systèmes dynamiques telles que la notion de mesure invariante, le théorème de récurrence de Poincaré, les propriétés d'ergodicité et de mélange, la notion d'isomorphisme. Il met également en évidence les liens existants entre les systèmes dynamiques et les chaînes de Markov. L'objectif final de ce livre est de présenter trois méthodes permettant d'établir des théorèmes centraux limites dans le cadre des systèmes dynamiques chaotiques : une première méthode basée sur les approximations martingales, une deuxième méthode basée sur la perturbation d'opérateurs quasi-compacts et une troisième méthode basée sur des estimées de décorrélation.

CONTENTS

Preamble	xiii
Introduction	xv
List of Symbols	xxi
1. Probability preserving dynamical systems, recurrence, ergodicity, mixing	1
1.1. Dynamical system, invariant measure	1
1.1.1. Definition of probability preserving dynamical systems	1
1.1.2. First examples	2
1.2. Recurrence	5
1.3. Ergodicity	7
1.3.1. Definition of ergodicity by visits to sets of positive measure	7
1.3.2. Link between ergodicity and density of orbits	7
1.3.3. Characterization of ergodicity by (sub)-invariant sets and invariant functions	8
1.3.4. Characterization of ergodicity by almost surely (sub)-invariant sets and almost surely invariant functions	10
1.3.5. ★ Ergodicity and Birkhoff sums	14
1.4. Mixing	15
1.4.1. Definition and properties	16
1.4.2. Examples of mixing and non mixing dynamical systems	18
1.5. Exercises	21
1.6. Solutions of the exercises	23
2. Factors, extensions, isomorphisms	33
2.1. Definitions and first examples	33
2.2. Properties preserved by factorization	35
2.3. Natural extension	36
2.4. Exercises	42
2.5. Solutions of the exercises	43
3. Stationary processes, Markov chains, Transfer operator	49
3.1. Stationary processes and dynamical systems	49
3.2. Markov chains, stationary measures	50

3.2.1. Markov operator and Markov properties	51
3.2.2. Stationary measures of Markov chains	53
3.3. Transfer operator of a dynamical system	55
3.3.1. Definitions and first properties	55
3.3.2. Invariant measures and transfer operator	60
3.4. Exercises on dynamical systems isomorphic to Markov chains	70
3.5. Solutions of the exercises	73
4. Ergodic theorems, asymptotic variance	83
4.1. The von Neumann ergodic Theorem	84
4.2. The Birkhoff ergodic theorem	87
4.3. Asymptotic variance	91
4.4. Exercises	94
4.5. Solutions of the exercises	97
5. Martingale approximation method	105
5.1. Reversed martingales	106
5.2. Central Limit Theorem for reversed martingales and applications	109
5.3. Martingale-coboundary decomposition	114
5.4. Non-degeneracy of the Gaussian limit	122
5.5. Other limit theorems	123
5.6. Exercises	125
5.7. Solutions of the exercises	126
6. Quasi-compactness of transfer operators	131
6.1. Review of spectral theory	133
6.2. A variant of the Ionescu Tulcea and Marinescu theorem	136
6.2.1. Application	138
6.2.2. Proof of Theorem 6.7	139
6.3. ★ Further spectral theory: Essential spectrum and quasi-compact operators	145
6.3.1. ★ Essential spectrum and decomposition of quasi-compact operators	145
6.3.2. ★ Other characterizations of the essential spectral radius	151
6.3.3. ★ Quasi-compactness and Doeblin Fortet type Condition	155
6.4. Application to the study of dynamical systems	157
6.5. Exercise	160
6.6. Solution of the exercise	162
7. The Nagaev-Guivarc'h operator perturbation method	169
7.1. A perturbation theorem based on the implicit function theorem	171
7.2. Application to the Central Limit Theorem	175
7.3. Exercises	180
7.4. ★ The Keller and Liverani perturbation theorem	181
7.4.1. ★ Continuity of the resolvent	183

7.4.2. ★ Continuity of the dimension of the generalized eigenspaces	188
7.4.3. ★ Proof of Theorem 7.8	190
7.5. ★ Exercises	191
7.6. Solutions of the exercises	194
8. ★ Central Limit Theorem via decorrelation	209
8.1. ★ Central Limit Theorem under a general decorrelation assumption . . .	211
8.2. ★ A general strategy to prove the decorrelation assumptions using conditioning	219
8.3. ★ Central Limit Theorem in a general (partially) hyperbolic context . . .	221
8.4. ★ Application to ergodic toral automorphisms	224
8.4.1. ★ Exponential rate of decorrelation for Hölder observables	228
8.4.2. ★ Proof of the exponential convergence of conditional expectations	232
8.5. ★ Solutions of the exercises	237
Bibliography	243
Index	251