

INTRODUCTION
À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH
ANALYSE ET PROBABILITÉS

Daniel Li
Hervé Queffélec

Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST
François LOESER

Joseph OESTERLÉ

Daniel BARLET (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2004

Vente au numéro : 72 € (\$ 104)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2004

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-155-4

Directeur de la publication : Marie-Françoise ROY

COURS SPÉCIALISÉS 12

**INTRODUCTION
À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH**

ANALYSE ET PROBABILITÉS

**Daniel Li
Hervé Queffélec**

Société Mathématique de France 2004

Table des matières

Introduction	ix
Préliminaire. Topologies faible et préfaible. Filtres, ultrafiltres. Ordinaux	1
I. Topologies faible et préfaible	1
II. Filtres, ultrafiltres. Ordinaux	6
III. Exercice	11
0. Notions fondamentales de Probabilités	13
I. Introduction	13
II. Convergences	15
III. Séries de variables aléatoires indépendantes	20
IV. Inégalités de Khintchine	28
V. Martingales	32
VI. Commentaires	39
VII. Exercices	40
1. Bases dans les espaces de Banach	43
I. Bases de Schauder : généralités	43
II. Bases et structure des espaces de Banach	54
III. Commentaires	67
IV. Exercices	69
2. Convergence inconditionnelle	75
I. Convergence inconditionnelle	75
II. Bases inconditionnelles	81
III. Base canonique de c_0	85
IV. Les théorèmes de James	87

V. Le Théorème de dichotomie de Gowers	91
VI. Commentaires	100
VII. Exercices	101
3. Variables aléatoires banachiques	107
I. Définitions ; convergences	107
II. Principe de symétrie de P. Lévy et applications	117
III. Principe de contraction	121
IV. Inégalités de Kahane	126
V. Commentaires	136
VI. Exercices	137
4. Type et cotype des espaces de Banach. Factorisation par un espace de Hilbert	143
I. Compléments de Probabilités	143
II. Compléments sur les espaces de Banach	155
III. Type et cotype des espaces de Banach	160
IV. Factorisation par un espace de Hilbert et Théorème de Kwapien	173
V. Quelques applications des notions de type et de cotype	179
VI. Commentaires	182
VII. Exercices	184
5. Opérateurs p-sommants. Applications	187
Introduction	187
I. Opérateurs p -sommants	188
II. Théorème de Grothendieck	193
III. Quelques applications de l'utilisation des opérateurs p -sommants	202
IV. Ensembles de Sidon	206
V. Commentaires	230
VI. Exercices.	232
6. Quelques propriétés des espaces L^p	237
I. Espace L^1	238
II. Le système trigonométrique	247
III. La base de Haar dans L^p	254
IV. Une autre preuve du Théorème de Grothendieck	264
V. Commentaires	272
VI. Exercices	281
7. L'espace ℓ_1	291
I. Le Théorème ℓ_1 de Rosenthal	291
II. Quelques autres résultats sur les espaces contenant ℓ_1	304
III. Commentaires	312
IV. Exercices	315
8. Sections euclidiennes	319
I. Inégalité de concentration de la mesure	319

II. Comparaison des vecteurs gaussiens	325
III. Le Théorème de Dvoretzky	334
IV. Théorème de Lindenstrauss-Tzafriri	353
V. Commentaires	357
VI. Exercices	358
9. Espaces de Banach séparables sans la Propriété d'Approximation	363
I. Introduction et définitions	363
II. Les réductions de Grothendieck	364
III. Les contre-exemples d'Enflo et Davie	370
IV. Commentaires	378
V. Exercices	379
10. Processus gaussiens	381
I. Processus gaussiens	381
II. Mouvement brownien	385
III. Théorème de majoration de Dudley	387
IV. Théorème de minoration de Fernique pour les processus stationnaires ...	392
V. Théorème d'Elton-Pajor	400
VI. Commentaires	423
VII. Exercices	424
11. Sous-espaces réflexifs de L^1	427
I. Structure des sous-espaces réflexifs de L^1	428
II. Exemples de sous-espaces réflexifs de L^1	439
III. Théorème de factorisation de Maurey et Théorème de Rosenthal	446
IV. Sous-espaces de dimension finie de L^1	452
V. Commentaires	467
VI. Exercices	470
12. Quelques exemples d'utilisation de la méthode des sélecteurs	481
I. Extraction d'ensembles quasi-indépendants	481
II. Sommes de sinus et transformation de Hilbert vectorielle	501
III. Minoration de la constante de K -convexité	505
IV. Commentaires	510
V. Exercices	511
13. Espace de Pisier des fonctions presque sûrement continues. Applications ...	515
I. Introduction	515
II. Compléments sur les variables banachiques	516
III. Espace $\mathcal{E}^{ps}$	523
IV. Applications de l'espace $\mathcal{E}^{ps}$	537
V. Théorème de Bourgain-Milman	544
VI. Commentaires	556
VII. Exercices	560

Annexe. Algèbres de Banach. Groupes abéliens compacts	563
I. Algèbres de Banach	563
II. Groupes abéliens compacts	569
Bibliographie	585
Livres	585
Articles	589
Index des notations	615
Index des noms cités	617
Index terminologique	621