Astérisque

AST

Pages préliminaires

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__1_0>

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 3

Exposé 1 L'obstruction locale d'Euler et le théorème de Mac-Pherson par Gerardo GONZALEZ-SPRINBERG 7

Exposé 3 Courbures au voisinage d'une singularité algébrique isolée par Rémi LANGEVIN 33

Exposé 4 Limites d'espaces tangents et obstruction d'Euler des surfaces par LÊ DŨNG TRÁNG 45

Exposé 5 Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom, pour une pseudo-varité par J.P. BRASSELET 71

Exposé 6 Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe par J.P. BRASSELET et M.H. SCHWARTZ 93

Exposé 7 Spécialisation des classes de Chern par J.L. VERDIER 149

Exposé 8 Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré d'après P. Deligne, par Luc ILLUSIE 161

Exposé 9 Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne) par G. LAUMON 173

Exposé 10 Majoration de sommes trigométriques (d'après P. Deligne et N. Katz) par G. LAUMON 221

L'objet de ce séminaire, dirigé par L. ILLUSIE et le rédacteur, et publié dans le volume 82-83 d'Astérisque, est d'étudier la caractéristique d'Euler - Poincaré des variétés algébriques ou des espaces analytiques complexes compacts. Pour préciser ce sujet, rappelons d'abord quatre faits classiques :

I) Soient M une variété analytique lisse, complexe, compacte, de dimension pure n, $c^\bullet(T_M) \in H^{2\bullet}(M, \mathbb{Z})$ les classes de Chern du fibré tangent à M. La caractéristique d'Euler-Poincaré de M est l'entier $\chi(M)$ défini par :

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \dim H^i(M, \mathbb{Z}) .$$

On sait qu'on a :

$$\chi(M) = \int_M c^n(T_M) \cap [M],$$

où $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z})$ est la classe fondamentale de M, $c^n(T_M) \cap [M] \in H_o(M, \mathbb{Z})$ est le cap-produit et $\int_M : H_o(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est l'augmentation canonique. Posons alors pour tout $i \leq n$, $c_i(M) = c^{n-i}(T_M) \cap [M] \in H_{2i}(M, \mathbb{Z})$. On obtient ainsi des classes d'homologie que nous appelons les classes d'homologie de Chern. Avec ce changement de notation, on obtient :

$$(A) \quad \chi(M) = \int_M c_n(M) .$$

II) Conservons les notations précédentes et munissons le fibré tangent de M d'une métrique hermitienne. Cette métrique et la structure analytique de T_M permettent de définir une connexion sur T_M. Cette connexion a un tenseur de courbure qui engendre des formes différentielles fermées W_p, de type (p,p) qu'on appelle les formes de courbures ou formes de Chern-Weil. Les formes W_p sont dans les classes de cohomologie $c^p(T_M)$. On a donc

$$(B) \quad \chi(M) = \int_M W_n$$

III) Soient M une variété différentiable compacte et $m \longrightarrow \vec{X}(m)$ un champ de vecteurs tangents dont les zéros sont isolés. En chaque point m tel que $\vec{X}(m) = 0$, on peut définir un entier $i(m, \vec{X})$ appelé indice du champ de vecteurs en m et on a

$$(C) \quad \chi(M) = \sum_{m, \vec{X}(m)=0} i(m, \vec{X}) .$$

IV) Soient M un complexe cellulaire et T_M un fibré vectoriel complexe sur M . Les classes de Chern $c^p(T_M)$ peuvent être interprétées comme des obstructions à l'existence de champ de p-repères de T_M .

On se propose dans ce séminaire d'étudier ce qu'il advient de ces notions et de ces égalités lorsque M est une variété analytique complexe compacte, éventuellement singulière, ou bien lorsque M est une variété algébrique abstraite.

Le point de départ de cette étude dans le cas transcendant est le théorème de Mac Pherson qui affirme l'existence et l'unicité d'une théorie des classes d'homologie de Chern essentiellement définie par l'égalité (A) interprétée dans un contexte fonctoriel convenable.

Pour construire ces classes d'homologie, Mac Pherson définit un invariant numérique attaché à chaque point singulier et appelé nombre d'Euler du point. Ce nombre est "l'indice du champ de vecteurs radial", champ de vecteurs et indice auxquels on donne un sens dans ce contexte singulier.

Ce nombre d'Euler est étudié dans l'exposé 1 où on en donne une description en termes de multiplicité d'intersection de cycles dans le transformé de Nash de M . Ce nombre d'Euler est aussi exprimé dans l'exposé 4, dans le cas des surfaces, à l'aide des multiplicités des variétés polaires c'est-à-dire des variétés critiques de projections linéaires. Ce résultat a été étendu par la suite en dimension quelconque par LE et TEISSIER.

On peut, en plongeant M dans un espace projectif, définir sur la partie non singulière de M des formes de courbure et étudier l'existence et la valeur des intégrales de courbure. Cette valeur n'est pas en général la caractéristique d'Euler-Poincaré. Les classes d'homologie qui correspondent à ces formes différentielles ne sont pas en général les classes de Chern ; ce sont les classes de Mather. D'après le théorème de Mac Pherson, il faut faire des combinaisons linéaires formant une matrice θ et les coefficients de θ^{-1} sont les nombres d'Euler des différentes singularités de M .Les différentes intégrales de courbure sous leurs formes locales au voisinage des singularités sont étudiées dans l'exposé 3. L'exposé n° 2 du séminaire par A. DUBSON n'est pas publié dans ce volume.

Dans les exposés 5 et 6, on montre en utilisant des stratifications de Whitney de M , comment on peut définir des classes d'homologie qui sont des obstructions à l'existence de champs de p-repères tangents. Il s'agit là de