Cours Spécialisés

COLLECTION SMF

Numéro 1

INTRODUCTION À LA THÉORIE ANALYTIQUE ET PROBABILISTE DES NOMBRES

1995

Gérald Tenenbaum

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de Rédaction

Michèle AUDIN
Daniel BARLET (Directeur)
Jean-Benoît BOST
Paul-Louis HENNEQUIN
Rémi LANGEVIN
François LOESER
Joseph OESTERLÉ
Pierre SCHAPIRA

Diffusion

S.M.F. (vente directe)
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05, France

MAISON DE LA S.M.F.
Société Mathématique de France
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 09
France

OFFILIB
48, Rue Gay-Lussac
75240 Paris Cedex 05
France

A.M.S.
American Mathematical Society
P.O. BOX 6248, Providence
Rhode Island 02940, USA

Tarifs

(frais de port non compris)

Prix membre S.M.F. : 300 FF
Prix membre A.M.S. : 400 FF (80$)
Prix public : 450 FF

Directeur de la publication : R. Langevin
Secrétariat technique de la Rédaction et Administration : Nathalie Christiaën
Couverture : Armelle Stosskopf

© Société Mathématique de France 1995

Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres

Gérald Tenenbaum

Professeur à l'Université Henri Poincaré–Nancy 1

classification AMS : 11-01

A Catherine Jablon,

pour la douceur du jour,
ce bouquet de symboles
dont ta conversation
éclaire les secrets.

Table des Matières

Avant-propos xiii
Notations xv

Tome I : Méthodes élémentaires 1

Chapitre I.0. Quelques outils d'analyse réelle 3
§ **0.1.** La sommation d'Abel 3
§ **0.2.** La formule sommatoire d'Euler–Maclaurin 5
Exercices 8

Chapitre I.1. Les nombres premiers 9
§ **1.1.** Introduction 9
§ **1.2.** Les estimations de Tchébychev 10
§ **1.3.** Valuation p-adique de $n!$ 13
§ **1.4.** Le premier théorème de Mertens 14
§ **1.5.** Deux nouvelles formules asymptotiques 15
§ **1.6.** La formule de Mertens 17
§ **1.7.** Un autre théorème de Tchébychev 19
Notes 20
Exercices 21

Chapitre I.2. Fonctions arithmétiques 23
§ **2.1.** Définitions 23
§ **2.2.** Exemples 23
§ **2.3.** Séries de Dirichlet formelles 25
§ **2.4.** L'anneau des fonctions arithmétiques 26
§ **2.5.** Les formules d'inversion de Möbius 29
§ **2.6.** La fonction de von Mangoldt 30
§ **2.7.** La fonction indicatrice d'Euler 32
Notes 34
Exercices 35

Chapitre I.3. Ordres moyens 37
§ **3.1.** Introduction 37
§ **3.2.** Le problème de Dirichlet et le principe de l'hyperbole 37
§ **3.3.** La fonction somme des diviseurs 40
§ **3.4.** La fonction indicatrice d'Euler 40

§ **3.5.** Les fonctions ω et Ω 42
§ **3.6.** Valeur moyenne de la fonction de Möbius et fonctions sommatoires de Tchébychev 43
§ **3.7.** Entiers sans facteur carré 47
§ **3.8.** Valeur moyenne d'une fonction multiplicative à valeurs dans $[0,1]$ 49
Notes 52
Exercices 54

Chapitre I.4. Méthodes de crible 57
§ **4.1.** Le crible d'Ératosthène 57
§ **4.2.** Le crible combinatoire de Brun 58
§ **4.3.** Application aux nombres premiers jumeaux 61
§ **4.4.** Le grand crible – forme analytique 63
§ **4.5.** Le grand crible – forme arithmétique 70
§ **4.6.** Applications 72
Notes 75
Exercices 78

Chapitre I.5. Ordres extrémaux 82
§ **5.1.** Introduction et définitions 82
§ **5.2.** La fonction $\tau(n)$ 83
§ **5.3.** Les fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ 85
§ **5.4.** La fonction d'Euler $\varphi(n)$ 86
§ **5.5.** Les fonctions $\sigma_\kappa(n), \kappa > 0$ 87
Notes 89
Exercices 90

Chapitre I.6. La méthode de van der Corput 92
§ **6.1.** Introduction et rappels 92
§ **6.2.** Intégrales trigonométriques 93
§ **6.3.** Sommes trigonométriques 94
§ **6.4.** Application au théorème de Voronoï 98
Notes 101
Exercices 103

Tome II : Méthodes d'analyse complexe 105

Chapitre II.1. Fonctions génératrices : séries de Dirichlet 107
§ **1.1.** Séries de Dirichlet convergentes 107
§ **1.2.** Séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives 108
§ **1.3.** Propriétés analytiques fondamentales des séries de Dirichlet 109