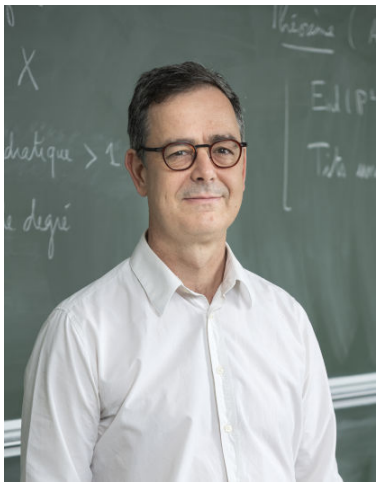
un texte
une aventure mathématique

Les transformations de Luigi Cremona au fil d'un siècle

par

Serge CANTAT

Exposé à la BnF le 3 février 2027



Serge Cantat



Luigi Cremona

Société Mathématique de France
Animath
BnF Bibliothèque nationale de France

Les transformations de Luigi Cremona au fil d'un siècle

En 1864, depuis Milan, Luigi Cremona fait parvenir un texte de plus de cent pages à l'Académie des sciences de Berlin. Il espère ainsi recevoir le prix Steiner, nouvellement créé, qu'il partagera finalement avec Rudolf Sturm. Son texte traite de la géométrie des surfaces qui sont définies par certaines équations polynomiales. La sphère unité est un exemple d'une telle surface : si désignent les coordonnées cartésiennes de l'espace, elle est définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (voir la Figure 2).



FIGURE 1. La surface cubique de Clebsch : photographie d'un modèle en plâtre disponible à la maison Henri Poincaré, au centre de Paris. Pour analyser cette surface et les droites qu'elle contient, on peut utiliser l'équation $x^3 + y^3 + z^3 + 1 = 0$

Cremona, lui, s'intéresse aux surfaces cubiques, c'est-à-dire définies par une équation polynomiale de degré, comme la surface de Clebsch, représentée sur la photographie précédente. Combien y a-t-il de droites tracées le long d'une telle surface cubique? Peut-on passer d'une telle surface au plan par une construction géométrique analogue à la projection stéréographique? C'est à ce type de questions que répond Cremona.

Cent ans plus tard, près de Boston, le météorologiste Edward Lorenz s'intéresse à des modèles simplifiés décrivant les mouvements de l'atmosphère et les phénomènes de convection. Il découvre un objet mathématique qui deviendra l'un des joyaux de la théorie du chaos et sera rapidement appelé attracteur de Lorenz. Cet « attracteur » illustre l'imprévisibilité des mouvements atmosphériques, au sens où une toute petite modification des conditions initiales du système peut mener à de grandes perturbations de l'écoulement. Son lien avec les mouvements de l'atmosphère conduira d'ailleurs Lorenz à demander si un battement d'aile de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas. Or, une fois revisité

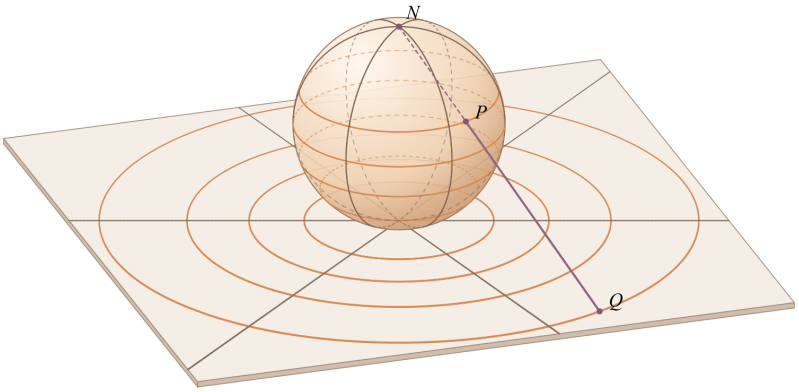


FIGURE 2. Projection stéréographique. Les points de la sphère, par exemple le point P, peuvent être projeté sur le plan à partir du pôle N.

par Michel Hénon, l'attracteur de Lorenz, ou plutôt un de ses cousins mathématiques, apparaît au sein des objets étudiés par Cremona.

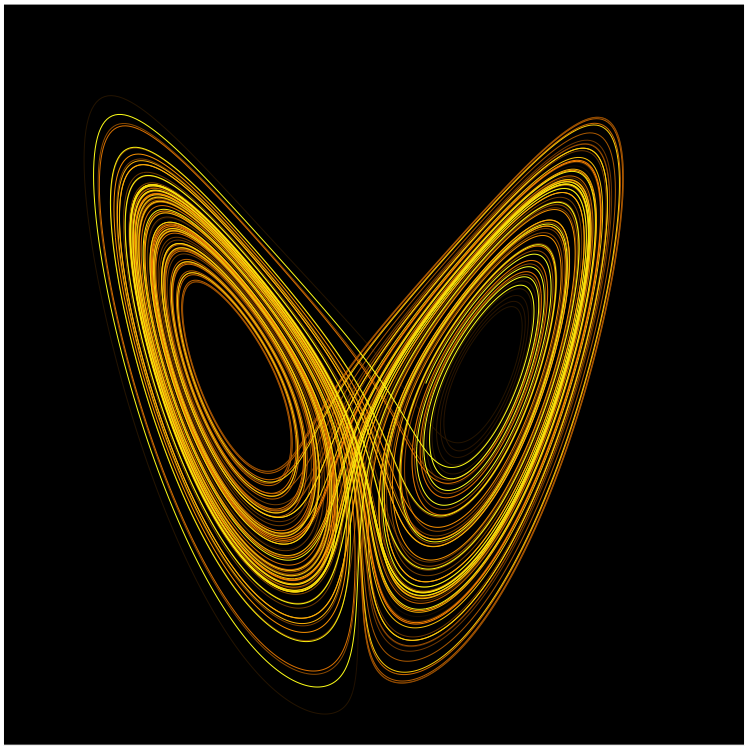


FIGURE 3. L'attracteur de Lorenz. L'évolution du système de Lorenz avec le temps forme des courbes tracées dans l'espace. La figure représente l'une de ces courbes.

Simultanément, mais à Moscou, Yuri Manin s'attaque à un problème d'arithmétique lui-même en lien avec les travaux de Cremona et un théorème de Samuel Ryley datant de 1825, qui stipule que tout nombre rationnel est la somme de trois

cubes de nombres rationnels. Par exemple, l'entier peut être décomposé en les sommes

$$5 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{6}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

et

$$5 = \left(\frac{1}{51}\right)^3 + \left(\frac{15}{17}\right)^3 + \left(\frac{83}{51}\right)^3$$

Comment peut-on produire toutes les décompositions d'un entier en sommes de trois cubes, comment peut-on les organiser, les analyser ? C'est à ce problème que s'intéresse Manin, et c'est pour cela qu'il poursuit les travaux de Cremona. Partant de quelques décompositions initiales, il est en effet possible d'en produire une infinité à l'aide de constructions géométriques étudiées par l'école italienne de géométrie algébrique. Géométrie, arithmétique et dynamique offrent ainsi trois regards croisés sur le même type d'objets : c'est cette multiplicité des points de vue qui sera le fil directeur de l'exposé.

Autour du texte. — Luigi Cremona, "Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre", Journal de Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik), 1868 , pages 1 à 133.

Biographie

Serge Cantat est mathématicien, directeur de recherche au CNRS. Il travaille actuellement au sein de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes. Ses sujets de prédilection se situent à l'interface des systèmes dynamiques, de la théorie des groupes et de la géométrie algébrique. Il a obtenu la médaille d'argent du CNRS en 2025 pour ses travaux sur les transformations polynomiales.

Crédits photos :

Serge Cantat : *Jean-Claude Moschetti, pour le CNRS*

Luigi Cremona : *Wikimedia Commons : Reinhard Bölling (1994) Das Fotoalbum für Weierstrass, Braunschweig/Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn ISBN : 3-528-06602-4. Self-scanned*

Figure 1 : *collections de l'Institut Henri Poincaré, Creative Commons 4.0 BY-NC SA.*

Figure 2 : *Serge Cantat, production personnelle*

Figure 3 : *Wikimedia commons : Wikimol, Dschwen*

SERGE CANTAT, CNRS, IRMAR - UMR 6625, Université de Rennes, France