un texte
une aventure mathématique

Le problème des rencontres

par

Javier FRESÁN

Exposé à la BnF le 17 mars 2027



Javier Fresán



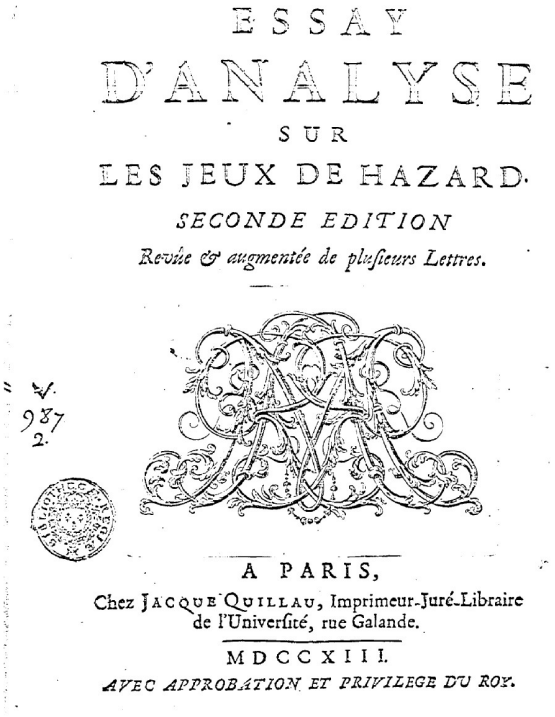
Pierre Rémond de Montmort

Société Mathématique de France
Animath
BnF Bibliothèque nationale de France

Le problème des rencontres

« Pierre a un certain nombre de cartes qui ne sont point répétées, et qui sont mêlées à discrétion ; il parie contre Paul que s'il les tire de suite, et qu'il les nomme selon l'ordre des cartes [...] il lui arrivera au moins une fois de tirer celle qu'il nommera. On demande quel est le sort ou l'espérance de Pierre, pour quelque nombre de cartes que ce puisse être [...] ».

C'est ainsi que Pierre Rémond de Montmort formule le « problème des rencontres » dans son Essay d'analyse sur les jeux de hazard publié en 1708. Il a alors trente ans, et son livre marque un pas décisif dans l'étude des lois mathématiques du hasard, encore largement associé aux superstitions.



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de pluſieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

FIGURE 1. Page de titre de la seconde édition de l'Essay d'analyse sur les jeux de hazard de Montmort (1713), contenant la solution complète du problème des rencontres.

Montmort n'était pourtant pas destiné aux mathématiques. Après avoir abandonné les études de droit imposées par son père, il part voyager à travers l'Europe. La lecture de Malebranche le conduit d'abord vers la philosophie, puis vers l'algèbre et la géométrie. Installé dans un château en Champagne, il y reçoit les

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, $\boxed{2143}$, 2314, $\boxed{2341}$, $\boxed{2413}$, 2431,
3124, $\boxed{3142}$, 3214, 3241, $\boxed{3412}$, $\boxed{3421}$,
$\boxed{4123}$, $\boxed{4132}$, 4213, 4231, $\boxed{4312}$, $\boxed{4321}$.

FIGURE 2. Parmi les 24 permutations de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, les neuf dérangements sont encadrés.

grands mathématiciens de son époque et entretient une abondante correspondance. Ses échanges avec Nicolas Bernoulli nourriront la seconde édition de son essai, parue en 1713, où figure la solution complète du problème des rencontres. Une querelle l'oppose à Abraham de Moivre sur la nouveauté de leurs travaux. Ils se réconcilieront en 1715, année où Montmort observe une éclipse totale de Soleil en compagnie d'Edmond Halley.

Aujourd'hui, on peut reformuler le problème des rencontres comme suit : si l'on se donne n cartes, numérotées de 1 à n, chaque tirage possible correspond à une façon d'ordonner ces nombres, c'est-à-dire à une permutation de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Pour calculer la probabilité que Pierre perde, il suffit alors de savoir, parmi ces $n!$ permutations, combien ne possèdent aucun point fixe, autrement dit aucun nombre qui occupe la place indiquée par sa valeur. Une permutation sans point fixe s'appelle un dérangement. Par exemple, avec trois cartes, les ordres possibles sont

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Les seuls dérangements sont 231 et 312 ; la probabilité que Pierre perde est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Lorsque le nombre de cartes augmente, dresser la liste de toutes les permutations devient vite impraticable, mais on peut contourner cette difficulté de différentes manières. Une possibilité consiste à compter les permutations qui fixent un nombre donné, puis à corriger les comptages multiples : celles qui fixent deux nombres ont été comptées deux fois, celles qui en fixent trois requièrent une nouvelle correction, et ainsi de suite. C'est le principe d'inclusion-exclusion.

Ces raisonnements conduisent à une formule exacte « pour quelque nombre de cartes que ce puisse être ». À mesure que ce nombre augmente, la probabilité que Pierre perde converge rapidement vers la somme de la série

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \dots$$

soit environ 37%. On y reconnaît l'inverse du nombre e, qui ne s'appelait pas encore comme cela à l'époque.

Nous retrouverons enfin la probabilité de perdre au jeu de Montmort dans une question d'arithmétique étudiée par Leopold Kronecker en 1880. Étant donné un polynôme à coefficients entiers, quelle proportion des nombres premiers ne



FIGURE 3. Le mathématicien allemand Leopold Kronecker (1823–1891), en 1865.

divisent aucune de ses valeurs aux entiers ? Par exemple, aucun des nombres premiers 7, 13, 19, 37, 61…ne divise un entier de la forme $x^3 - 2$; parmi les 168 nombres premiers plus petits que 1000, il y en a 56 avec cette propriété. Si le polynôme est suffisamment général, cette proportion limite est exactement la probabilité de perdre au jeu de Montmort avec autant de cartes que le degré du polynôme. Ce sont encore les permutations et leurs points fixes qui font le lien entre ces deux problèmes en apparence si éloignés.



FIGURE 4. Vue aérienne du château de Montmort, en Champagne.

Autour du texte. — Pierre Rémond de Montmort, “Essay d’analyse sur les jeux de hazard”, 2e éd. rev. et augm. d’un traité des combinaisons, et de plusieurs lettres, Paris : J. Quillau, 1713.
Leopold Kronecker, “Über die Irreductibilität von Gleichungen”, Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1880), 155–162.

Biographie

Javier Fresán est professeur de mathématiques à Sorbonne Université. Né à Pampelune en 1987, il a étudié à Madrid avant de préparer sa thèse à l’Université Paris 13. Après des séjours postdoctoraux à l’Institut Max-Planck de Bonn et à l’ETH Zurich, il a enseigné à l’École polytechnique de 2017 à 2023. Ses recherches portent sur les liens entre théorie des nombres et géométrie algébrique, notamment à travers l’étude des périodes, des nombres comme π que l’on peut représenter par des volumes. Avec Peter Jossen, il a résolu une question posée en 1929 par Carl Ludwig Siegel sur une famille de fonctions généralisant l’exponentielle. Il a reçu la médaille de bronze du CNRS en 2023 et une bourse ERC Consolidator en 2024. Il est également l’auteur de plusieurs ouvrages de vulgarisation, dont *Le rêve de la raison* et *Jusqu’à ce que l’algèbre nous sépare.*

Crédits photos :

Javier Fresán : *Gustavo de Gennaro*

Pierre Rémond de Montmort : *Wikimedia Commons, portrait par Alexis-Simon Belle, Le Musée du Grand Siècle*

Figure 1 : *Page de titre de la seconde édition de l’Essay d’analyse sur les jeux de hazard, Gallica.*

Figure 3 : *Wikimedia Commons, auteur inconnu*

Figure 4 : *Wikimedia Commons, Philippe Fruitier de la société Altimage*

JAVIER FRESÁN, Sorbonne Université 4 place Jussieu, case 247 75252 Paris Cedex 5 FRANCE