L’incomplétude de Gödel : les limites de la méthode axiomatique

Sylvy Anscombe

Un texte, une aventure mathématique — BnF, 13 janvier 2027



Sylvy Anscombe.
Photo : Tianyiwa Xie.

« Cette phrase est fausse. » Si elle dit vrai, elle est fausse ; si elle est fausse, elle dit vrai. Ce vieux paradoxe du menteur ressemble à un simple jeu de mots. Kurt Gödel en a pourtant tiré, en 1931, l’un des résultats les plus profonds des mathématiques.

Les règles du jeu

Aux échecs comme au go, le hasard n’intervient pas : les règles, fixées une fois pour toutes, décident de toutes les parties possibles. Personne ne demande de démontrer que le cavalier se déplace en L : c’est la règle. Les mathématiques fonctionnent de la même façon. On part de quelques énoncés que l’on accepte sans démonstration, les *axiomes*, et l’on en déduit tout le reste, pas à pas. Un théorème, c’est une position que l’on peut atteindre en jouant selon les règles.

Euclide, le premier jeu de règles

Vers 300 avant notre ère, Euclide bâtit toute la géométrie plane à partir d’une poignée de postulats, comme « par deux points passe une droite ». Pendant deux mille ans, on a tenté de déduire le cinquième, celui des parallèles, des quatre autres. Vers 1830, Lobatchevski et Bolyai (et, sans le publier, Gauss) construisent une autre géométrie, qui respecte les quatre premiers postulats mais pas le cinquième ; Beltrami montrera en 1868 qu’elle n’est pas plus contradictoire que celle d’Euclide. Le cinquième postulat ne se déduit donc pas des autres : un ensemble de règles peut laisser une question ouverte. En géométrie, rien de choquant : plusieurs géométries sont légitimes, et l’on choisit l’axiome qui convient.

AITHMATA.

ά. Ητήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ᾽ εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν.

POSTULATA.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d’un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D’un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l’infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

Les « demandes » (postulats) d’Euclide, en grec, en latin et en français ; la cinquième est le postulat des parallèles. *Les Œuvres d’Euclide*, trad. F. Peyrard, tome I, Paris, C. F. Patris, 1814, p. 5 (extraits recomposés).
Domaine public. Bibliothèque nationale de France, via Wikimedia Commons.

Le rêve de Hilbert

Dans les années 1920, le grand mathématicien David Hilbert rêve d’aller plus loin : un seul système d’axiomes, sans contradiction, capable de trancher toute question sur les nombres. « Nous devons savoir, nous saurons », proclame-t-il le 8 septembre 1930 à Königsberg.

Le texte de Gödel

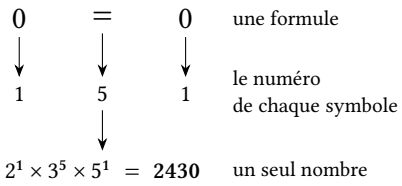
La veille, dans la même ville, un jeune homme de 24 ans avait annoncé le résultat qui allait briser ce rêve. Dans son article de 1931, « Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés » (le grand traité de Whitehead et Russell), Gödel montre que tout système de règles qui ne se contredit pas et qui est assez riche pour parler des nombres entiers laisse forcément échapper des énoncés vrais : il ne peut pas les démontrer. Ajouter un axiome n’y change rien, une nouvelle lacune apparaît aussitôt. Pire encore : un tel système ne peut même pas démontrer qu’il ne se contredit pas, ce que Hilbert espérait précisément établir.



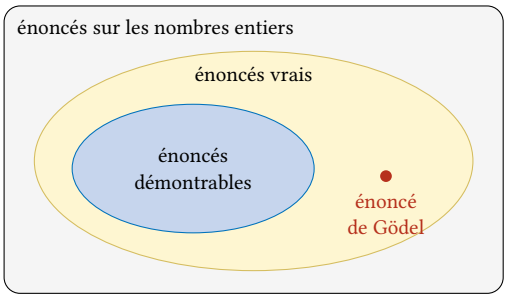
Kurt Gödel, étudiant à Vienne, vers 1925.
Photographe anonyme. Kurt Gödel Papers, IAS, Princeton. Domaine public.

Comment les mathématiques parlent d'elles-mêmes

L'idée géniale de Gödel est de coder chaque énoncé, et chaque démonstration, par un nombre entier. Dire « cet énoncé est démontrable » devient alors une propriété des nombres, dont les mathématiques peuvent parler. Gödel fabrique ainsi un énoncé qui affirme, en substance : « je ne suis pas démontrable dans ce système ». Contrairement à la phrase du menteur, ce n'est pas un paradoxe : si le système ne se contredit pas, cet énoncé est vrai, et pourtant indémontrable.



Coder une formule par un nombre (code simplifié) : chaque symbole reçoit un numéro, puis on les range dans les exposants des nombres premiers successifs.



Vrai ne veut pas dire démontrable : l'énoncé de Gödel est vrai, mais le système ne le démontre pas.

Vrai et démontrable

Un énoncé est *vrai* s'il dit juste sur les nombres eux-mêmes ; il est *démontrable* si l'on peut l'atteindre en jouant selon les règles. Ce n'est pas la même chose. Ce n'est pas une faiblesse des mathématicien·nes, mais une limite de la méthode axiomatique elle-même. Elle vaut aussi pour les machines : en 1936, avant les premiers ordinateurs, Alan Turing en tire qu'aucune machine ne peut prévoir, pour tout programme, s'il finira par s'arrêter.

S'il ne fallait retenir qu'une chose : aucun ensemble de règles ne peut capturer toute la vérité sur les nombres entiers. Il manquera toujours quelque chose.

Schémas : Sylvy Anscombe.

Université Paris Cité et Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France