

363-364

ASTÉRISQUE

2014

TRAVAUX DE GABBER
SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE
ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de
Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud,
Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 363-364, 2014

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 140 € (\$ 210)

Abonnement Europe : 530 €, hors Europe : 569 € (\$ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2014

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-790-2

Directeur de la publication : Marc Peigné

363-364

ASTÉRISQUE

2014

TRAVAUX DE GABBER
SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE
ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de
Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud,
Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Luc Illusie

Mathématique, Bât. 425

Université Paris-Sud

91405 Orsay Cedex - France

Luc.Illusie@math.u-psud.fr

Yves Laszlo

École normale supérieure

45 rue d'Ulm

75005 Paris - France

yves.laszlo@ens.fr

Fabrice Orgogozo

Centre de mathématiques Laurent Schwartz

École polytechnique

91128 Palaiseau Cedex - France

Fabrice.Orgogozo+math@normalesup.org

Classification mathématique par sujet (2000). — 12F15, 12G05, 12G10, 12L10, 13B02, 13B40, 13F40, 13H05, 13J10, 14B05, 14E15, 14F17, 14F20, 14L30, 18F10, 20M32.

Mots-clefs. — Diviseurs à croisements normaux, altérations, approximation d'Artin, champs en groupoïdes, cohomologie étale, cycles proches, descente cohomologique, dimension cohomologique, désingularisation canonique, géométrie logarithmique, pureté, revêtement modéré, rigidité, résolution des singularités, topos, torseurs.

TRAVAUX DE GABBER SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET LA COHOMOLOGIE ÉTALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS

dirigé par Luc ILLUSIE, Yves LASZLO et Fabrice ORGOGOZO

Résumé. — Les travaux d'Ofer Gabber présentés dans ce volume comportent deux parties étroitement liées, l'une, géométrique, l'autre, cohomologique. La première est constituée de théorèmes d'uniformisation locale, affirmant que tout couple formé par un schéma noethérien quasi-excellent et un fermé rare devient, après localisation par des morphismes étales et des altérations convenables, isomorphe au couple formé par un schéma régulier et un diviseur à croisements normaux. Il s'agit de résultats de nature locale, mais leur démonstration fournit des corollaires globaux, raffinant des théorèmes d'altération de de Jong pour les schémas de type fini sur un corps ou un anneau de Dedekind. Des techniques de géométrie logarithmique, et, pour les résultats les plus fins, de désingularisation canonique en caractéristique nulle jouent un rôle clef dans les démonstrations. Dans la seconde partie, on donne des applications, accompagnées d'exemples et contre-exemples, à des théorèmes de finitude (abéliens), de dimension cohomologique, et de dualité en cohomologie étale sur les schémas quasi-excellents. On y démontre notamment la conjecture de dualité locale de Grothendieck, et, par une nouvelle méthode, sa conjecture de pureté cohomologique absolue. Des résultats de rigidité et finitude non abéliens sont également établis dans les derniers exposés.

Abstract (Gabber's work on local uniformization and étale cohomology of quasi-excellent schemes.) — The work of Ofer Gabber presented in this book can be divided roughly into two closely related parts, a geometric one and a cohomological one. The first part contains local uniformization theorems which state that any pair consisting of a quasi-excellent noetherian scheme and a nowhere dense closed subscheme becomes isomorphic, after localization by suitable étale morphisms and alterations, to a pair consisting of a regular scheme and a normal crossings divisor. These are local results, but their proofs have global theorems as corollaries, refining alteration theorems of de Jong for schemes of finite type over a field or a Dedekind ring. Techniques from logarithmic geometry and, as regards the finest results, canonical desingularization in characteristic zero, play a key role in the proofs. In the second part, we give

applications, with examples and counter-examples, to abelian finiteness theorems, as well as theorems on cohomological dimension and duality in étale cohomology over quasi-excellent schemes. In particular, Grothendieck's local duality conjecture is proved, and his absolute cohomological purity conjecture is proved by a new method. Non-abelian rigidity and finiteness results are also established in the final exposés.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	xiii
Remerciements	xxi
Leitfaden	xxiii
I. Anneaux excellents	1
par Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo	
1. Introduction	1
2. Définitions	1
3. Exemples immédiats.	5
4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.	5
5. Permanence par localisation et extension de type fini	6
6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais	9
7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents	10
8. Hensélisation et anneaux excellents	11
9. Complétion formelle et anneaux excellents	12
10. Approximation d'Artin et anneaux excellents	13
11. Exemples de méchants anneaux noethériens	14
II. Topologies adaptées à l'uniformisation locale	21
par Fabrice Orgogozo	
1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie alt/S	21
2. Topologies : définitions	25
3. Formes standard	28
4. Applications	31
III. Approximation	37
par Luc Illusie et Yves Laszlo	
1. Introduction	37
2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu	37
3. Approximations et topologie des altérations	39
4. Gradués supérieurs et approximations de complexes	42
5. Modèles et a -isomorphismes	45

6. Réduction au cas local noethérien complet	47
IV. Le théorème de Cohen-Gabber	51
par Fabrice Orgogozo	
1. p -bases et différentielles (rappels)	51
2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique > 0	55
3. Autour du théorème de Epp	61
4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte	63
V. Algébrisation partielle	69
par Fabrice Orgogozo	
1. Préparatifs (rappels)	69
2. Algébrisation partielle en égale caractéristique	71
3. Algébrisation partielle première à ℓ en caractéristique mixte	73
VI. Log régularité, actions très modérées	77
par Luc Illusie	
1. Log régularité	77
2. Revêtements Kummer étales	80
3. Actions très modérées	84
4. Points fixes	92
VII. Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)	99
par Fabrice Orgogozo	
1. Énoncé	99
2. Réductions : rappel des résultats antérieurs	99
3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong ..	100
4. Résolution des singularités	101
VIII. Gabber's modification theorem (absolute case)	103
par Luc Illusie et Michael Temkin	
1. Statement of the main theorem	103
2. Functorial resolutions	105
3. Resolution of log regular log schemes	119
4. Proof of Theorem 1.1 – preliminary steps	143
5. Proof of Theorem 1.1 – Abelian inertia	150
IX. Uniformisation locale première à ℓ	161
par Luc Illusie	
1. Rappel de l'énoncé et premières réductions	161
2. Log régularité, fin de la démonstration	164
X. Gabber's modification theorem (log smooth case)	167
par Luc Illusie et Michael Temkin	
1. The main theorem	168

2. Prime to ℓ variants of de Jong's alteration theorems	185
3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction	194
XI. Produits orientés	213
par Luc Illusie	
1. Construction des produits orientés	213
2. Tubes et changement de base	220
3. Produits fibrés	227
4. Topos évanescents et co-évanescents	229
XII_A. Descente cohomologique orientée	235
par Fabrice Orgogozo	
1. Acyclicité orientée des morphismes propres	235
2. Descente cohomologique orientée	241
XII_B. On hyper base change	251
par Weizhe Zheng	
1. A descent formalism	251
2. Variants and counterexamples	256
3. Appendix: Proper base change for stacks on topological spaces	258
XIII. Le théorème de finitude	261
par Fabrice Orgogozo	
1. Introduction	261
2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible	262
3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à ℓ	266
4. Coefficients ℓ -adiques	273
XIV. Fonctions de dimension	277
par Vincent Pilloni et Benoît Stroh	
1. Universelle caténarité des schémas henséliens	277
2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension	280
XV. Théorème de Lefschetz affine	293
par Vincent Pilloni et Benoît Stroh	
1. Énoncé du théorème et premières réductions	293
2. Pureté, combinatoire des branches et descente	294
3. Uniformisation et approximation des données	297
XVI. Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue	301
par Joël Riou	
1. Classes de Chern	301
2. Morphismes de Gysin	305
3. Théorème de pureté	323
4. Conventions de signes	340

XVII. Dualité	351
par Joël Riou	
1. Le morphisme de transition en codimension 1	353
2. Complexes dualisants putatifs et potentiels	364
3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal	370
4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels	385
5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels	393
6. Le théorème de dualité locale	401
7. Anneaux de coefficients généraux	411
8. Produits tensoriels de complexes non bornés	432
9. Complexes inversibles	439
10. Coefficients universels	441
11. Modules ind-unipotents	444
12. Le morphisme de bidualité	448
XVIII_A. Cohomological dimension: First results	455
par Luc Illusie	
1. Bound in the strictly local case and applications	455
2. Proof of the main result	457
XVIII_B. Dimension cohomologique : raffinements et compléments	461
par Fabrice Orgogozo	
1. Préliminaires	461
2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique ..	463
3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique	466
4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »	469
5. Majoration : amélioration	471
6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre époiné : minoration	474
XIX. Un contre-exemple	481
par Yves Laszlo	
1. Introduction	481
2. La construction	481
3. Noéthérianité de A	485
4. Étude des points doubles	488
5. D est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux	488
XX. Rigidité	491
par Yves Laszlo et Alban Moreau	
1. Introduction	491
2. Lemme de rigidité	492