380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉS 1089–1103

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Comité de rédaction

Ahmed Abbes
Viviane Baladi
Laurent Berger
Gérard Besson
Philippe Biane
Hélène Esnault
Damien Gaboriau
Michael Harris
Fabrice Planchon
Pierre Schapira
Bertrand Toën

Éric Vasserot (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉS 1089–1103

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.
École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
URL : `http://www.bourbaki.ens.fr`

***Mots-clefs et classification mathématique par sujets* (2000)**

Exposé nº 1089. — Petite simplification, familles de rotations, espaces hyperboliques, espace cône, groupe modulaire, groupe d'automorphismes du groupe libre, groupe de Cremona — 20F65, 20F67, 20F06, 57M50, 20F28, 14E07.
Exposé nº 1090. — Catégories de foncteurs, objets noethériens, ensembles ordonnés, bases de Gröbner — 18A25, 06A07, 16P40 ; 18A40, 18E15, 20J06, 55S10.
Exposé nº 1091. — Équations aux dérivées partielles, dynamique des fluides — 35Q31.
Exposé nº 1092. — Espaces de modules, surfaces plates, billards, systèmes dynamiques, exposants de Lyapunov — 37C40, 37D25, 37D40, 57M50.
Exposé nº 1093. — Courants, régularité, problème de Plateau — 49Q15, 49Q20, 49N60.
Exposé nº 1094. — Principe du maximum, estimation spectrale, surface minimale — 35B50 ; 35P15, 53C44, 53A10.
Exposé nº 1095. — Métriques de Kähler-Einstein, variétés de Fano — 53C55, 53C25, 14J45, 32Q20, 32W20.
Exposé nº 1096. — Groupe de Brauer, méthode des fibrations, groupes de Chow, principe local-global — 11G35, 14G25.
Exposé nº 1097. — Théorie des catégories, algèbre homotopique, topos, catégories supérieures — 18-02, 18B25, 18E35, 18G30, 18G55, 55U40 .
Exposé nº 1098. — Courbure négative, flot géodésique, spectre, fonction zêta dynamique — 53D25, 37C30, 37D20.
Exposé nº 1099. — Espaces de Banach possédant très peu d'opérateurs, problème scalaire-plus-compact, espaces de Bourgain-Delbaen, problème du sous-espace invariant — 46B20, 46A32, 46B28, 47A15.
Exposé nº 1100. — Combinatoire, designs de bloc, système de Steiner, la méthode probabiliste, empilement et recouvrement, constructions algébriques aléatoires — 05B05, 05D40 ; 05C70, 51E05, 05B40.
Exposé nº 1101. — Dimension essentielle, catégories, foncteurs, groupes algébriques, torseurs versels, variétés incompressibles, groupes de spineurs, algèbres simples — 14E05, 14L30 ; 19E08, 13A18.
Exposé nº 1102. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, représentations galoisiennes de torsion — 11F75, 11G18, 14L05, 14G35, 14G22.
Exposé nº 1103. — Variétés lorentziennes, anti-de Sitter, espaces-temps de Margulis, surfaces hyperboliques, feuilletages de type temps — 20H10, 30F60, 32G15, 53C50.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉS 1089-1103

Résumé. — Ce 67e volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2014/2015 : combinatoire, théorie des catégories, théorie des topos supérieurs, théorie de la mesure géométrique, équations aux dérivées partielles, théorie spectrale, géométrie différentielle, théorie ergodique, théorie géométrique des groupes, géométrie algébrique, représentations galoisiennes, et points rationnels.

***Abstract* (Séminaire Bourbaki, volume 2014/2015, exposés 1089–1103)**

This 67th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the fifteen survey lectures done during the year 2014/2015: combinatorics, category theory, higher topos theory, geometric measure theory, partial differential equations, spectral theory, differential geometry, ergodic theory, geometric group theory, algebraic geometry, Galois representations, and rational points.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2016

Résumés des exposés vii

NOVEMBRE 2014

1089 Rémi COULON — *Théorie de la petite simplification : une approche géométrique (d'après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy)* 1

1090 Aurélien DJAMENT — *La propriété noethérienne pour les foncteurs entre espaces vectoriels (d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden)* 35

1091 David GÉRARD-VARET — *Phénomène d'amortissement dans les équations d'Euler (d'après J. Bedrossian et N. Masmoudi)* 61

1092 Jean-François QUINT — *Rigidité des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-orbites dans les espaces de modules de surfaces plates (d'après Eskin, Mirzakhani et Mohammadi)* 83

JANVIER 2015

1093 Luigi AMBROSIO — *The regularity theory of area-minimizing integral currents (after Almgren-De Lellis-Spadaro)* 139

1094 Gilles CARRON — *De nouvelles utilisations du principe du maximum en géométrie (d'après B. Andrews, S. Brendle, J. Clutterbuck)* 171

1095 Philippe EYSSIDIEUX — *Métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano (d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian)* 207

1096 David HARARI — *Zéro-cycles et points rationnels sur les fibrations en variétés rationnellement connexes (d'après Harpaz et Wittenberg)* 231

MARS 2015

1097 Denis-Charles CISINSKI — *Catégories supérieures et théorie des topos* 263

1098 Sébastien GOUËZEL — *Spectre du flot géodésique en courbure négative (d'après F. Faure et M. Tsujii)* 325

1099 Sophie GRIVAUX & Maria ROGINSKAYA — *Espaces de Banach possédant très peu d'opérateurs (d'après S. Argyros et R. Haydon)* 355

JUIN 2015

1100 Gil KALAI — *Designs exist! (after Peter Keevash)* 399

1101 Alexander S. MERKURJEV — *Essential dimension* 423

1102 Sophie MOREL — *Construction de représentations galoisiennes de torsion (d'après Peter Scholze)* 449

1103 Jean-Marc SCHLENKER — *Variétés lorentziennes plates vues comme limites de variétés anti-de Sitter (d'après Danciger, Guéritaud et Kassel)* 475

Rémi COULON — *Théorie de la petite simplification : une approche géométrique (d'après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy)*

Une « bonne » action de groupe sur un espace hyperbolique (au sens de Gromov) permet de capturer les propriétés à large échelle du groupe. N'importe quelle action n'est pas exploitable. Toutefois des hypothèses relativement faibles sont suffisantes pour étendre la théorie de la petite simplification bien au-delà des groupes hyperboliques. S. Cantat et S. Lamy ont ainsi montré que le groupe de Cremona n'est pas simple. V. Guirardel, F. Dahmani et D. Osin ont revisité cette théorie grâce aux familles de rotations et étudié les propriétés de certains sous-groupes et quotients de groupes tels que les groupes modulaires de surfaces, le groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre, certains groupes d'Artin à angles droits, etc.

Aurélien DJAMENT — *La propriété noethérienne pour les foncteurs entre espaces vectoriels (d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden)*

Les bases de Gröbner permettent de démontrer le théorème de la base de Hilbert, en ramenant le caractère noethérien à une propriété combinatoire d'ensembles ordonnés. A. Putman, S. Sam et A. Snowden viennent de développer cette idée pour montrer des résultats de finitude sur les foncteurs. Un cas particulier de leurs travaux est la démonstration d'une conjecture émise à la fin des années 1980 par J. Lannes et L. Schwartz : la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini k est localement noethérienne. Cela revient à dire que, pour tout entier n, le foncteur $V \to k[V^n]$ est noethérien. Seul le cas $n = 1$ est facile ; le problème était ouvert pour $n \geq 4$ avant les travaux susmentionnés.

David GÉRARD-VARET — *Phénomène d'amortissement dans les équations d'Euler (d'après J. Bedrossian et N. Masmoudi)*

L'équation d'Euler, établie par Leonhard Euler en 1755, est l'équation reine de la dynamique des fluides. La stabilité de ses solutions, et donc des écoulements qu'elles modélisent, est un champ d'analyse mathématique incessant depuis les travaux de Kelvin et Rayleigh à la fin du 19$^{\text{e}}$ siècle. La stabilité du « flot de Couette » — écoulement dont le profil des vitesses croît linéairement avec la hauteur — est un problème majeur du domaine. Nous présenterons à ce sujet des résultats remarquables de J. Bedrossian et N. Masmoudi, qui montrent la stabilité Lyapunov du flot de Couette, et un phénomène d'amortissement des perturbations similaire à l'amortissement Landau en physique des plasmas.

Jean-François QUINT — *Rigidité des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-orbites dans les espaces de modules de surfaces plates (d'après Eskin, Mirzakhani et Mohammadi)*

Récemment, Eskin, Mirzakhani et partiellement Mohammadi ont établi des résultats de rigidité pour les adhérences de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-orbites dans les espaces de modules de surfaces plates à singularités coniques, vérifiant ainsi une conjecture de McMullen. Ces résultats reposent sur une analogie entre l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur ces espaces et son action sur les espaces homogènes de volume fini, où les propriétés de rigidité découlent des théorèmes de Ratner. Ils entraînent des conséquences sur le comptage de trajectoires périodiques dans les billards plans polygonaux et à angles rationnels. Je m'efforcerai de donner une introduction à ces travaux.

Luigi AMBROSIO — *The regularity theory of area-minimizing integral currents (after Almgren-De Lellis-Spadaro)*

The theory of currents, developed in the '70 by Federer and Fleming, provides weak solutions (area-minimizing currents) to Plateau's problem with no restriction on dimension and codimension. The regularity theory of area-minimizing currents, besides its intrinsic interest, has been the source of inspiration for many regularity theorems in elliptic and parabolic partial differential equations even in a non-geometric context. The regularity theory of area-minimizing currents started with the seminal work of De Giorgi for codimension one currents, namely weak hypersurfaces, and culminated in a monumental work (even in terms of size) by F.J. Almgren, who established an optimal result for currents of arbitrary codimension. In the last few years Almgren's work has been revisited, improved and streamlined in a series of papers by De Lellis and Spadaro. The seminar will describe these recent developments, emphasizing the key technical ideas.

Gilles CARRON — *De nouvelles utilisations du principe du maximum en géométrie (d'après B. Andrews, S. Brendle, J. Clutterbuck)*

Le principe du maximum est un outil simple mais puissant pour étudier des problèmes géométriques qui se formulent à l'aide d'une équation scalaire aux dérivées partielles elliptique ou parabolique. Des formules à la Bochner permettent également d'étudier des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cet outil avait par exemple été utilisé par S-T. Yau et T. Aubin dans la résolution du problème de Calabi pour obtenir des estimées a priori des solutions d'une équation de Monge-Ampère. Récemment des techniques de doublement de variables ont permis la résolution de deux problèmes célèbres : la conjecture de Lawson à propos des 2-tores plongés minimalement dans la sphère $\mathbb{S}^3$ par S. Brendle et la conjecture de l'écart fondamental qui permet une minoration optimale de l'écart entre les deux premières valeurs propres d'un domaine convexe de l'espace euclidien par B. Andrews et J. Clutterbuck. On veut donc se servir de la présentation de la preuve de ces deux résultats pour illustrer l'efficacité et l'élégance de ce nouvel outil.

Philippe EYSSIDIEUX — *Métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano (d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian)*

Une conjecture centrale de Géométrie kählérienne, d'abord formulée par Yau puis précisée par Tian et Donaldson, prédit qu'une variété projective lisse complexe polarisée admet une métrique kählérienne de courbure scalaire constante si et seulement si elle est stable en un sens approprié issu de la théorie géométrique des invariants. Dans le cas de la polarisation anticanonique sur une variété de Fano, elle prédit l'équivalence entre existence d'une métrique de Kähler-Einstein et K-polystabilité. La direction la plus difficile – l'existence de la métrique – a été établie récemment de façon simultanée par Chen-Donaldson-Sun et Tian par une méthode de continuité singulière dont le succès repose sur un énoncé d'algébricité de certaines limites de Gromov-Hausdorff de variétés kählériennes. L'exposé expliquera les grandes lignes de cette solution.

David HARARI — *Zéro-cycles et points rationnels sur les fibrations en variétés rationnellement connexes (d'après Harpaz et Wittenberg)*

Soit X une variété algébrique définie sur $\mathbf{Q}$, possédant des points dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$. Colliot-Thélène a conjecturé que, pour X rationnellement connexe (par exemple unirationnelle), une certaine obstruction cohomologique (dite *de Brauer-Manin*) à l'existence d'un point rationnel était la seule ; il existe aussi une conjecture analogue en remplaçant les