

BULLETIN DE LA S. M. F.

RÉMI LANGEVIN

HAROLD ROSENBERG

Quand deux sous-variétés sont forcées par leur géométrie à se rencontrer

Bulletin de la S. M. F., tome 120, n° 2 (1992), p. 227-235

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_227_0

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUAND DEUX SOUS-VARIÉTÉS SONT FORCÉES PAR LEUR GÉOMÉTRIE A SE RENCONTRER

PAR

RÉMI LANGEVIN ET HAROLD ROSENBERG (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de montrer que deux sous-variétés complètes d'une variété M de courbure sectionnelle supérieure ou égale à une constante $c > 0$ peuvent être forcées par leur géométrie à se rencontrer. En particulier nous montrons que dans ce cas une géodésique et une hypersurface totalement géodésique se rencontrent.

ABSTRACT. — The goal of this article is to show that two complete submanifolds of a manifold M of sectional curvature greater or equal than a constant $c > 0$ may be forced to meet by their geometry. In particular we show that in this case a geodesic and a totally geodesic hypersurface meet.

Le but de cet article est de montrer que deux sous-variétés complètes d'une variété M de courbure sectionnelle strictement positive peuvent être forcées par leur géométrie à se rencontrer.

Dans la suite N_1 et N_2 seront deux sous-variétés complètes de géométrie bornée de dimensions respectives n_1 et n_2 satisfaisant

$$n_1 + n_2 \geq \dim M.$$

Notre but initial était de répondre à la question suivantes : soient L_1 et L_2 deux courbes holomorphes complètes de $\mathbb{CP}_2$, de géométrie bornée (c'est-à-dire de courbure bornée). Leur intersection est-elle non vide? Nous n'avons pu, malheureusement répondre à cette question. Signalons cependant une question analogue qui admet une réponse positive due à R. SCHOEN.

(*) Texte reçu le 17 octobre 1990, révisé en avril 1991.

R. LANGEVIN, Université de Bourgogne, Dépt. de Mathématiques, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France.

H. ROSENBERG, Université de Paris VII, Dépt. de Mathématiques, 2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

Classification AMS : 58E10, 53C99

Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés minimales complètes plongées, de géométrie bornée d'une variété M^3 de courbure sectionnelle strictement positive. Leur intersection est alors non vide. En effet la réunion $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ est une lamination par des sous-variétés minimales et si l'intersection de L_1 et L_2 était vide, une feuille L de $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ serait, d'un côté au moins, limite des sous-variétés minimales de $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, et donc serait stable. Le théorème de R. Schoen [Sc] montre que L est dans ce cas totalement géodésique. La courbure intrinsèque de L est donc strictement positive. Le théorème de Myers implique donc que L est compacte. Les feuilles de $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ qui spiralent vers L sont aussi compactes, puisqu'elles sont de courbures intrinsèque strictement plus grande qu'une constante strictement positive sur des domaines de diamètre suffisamment grands (là où elles spiralent vers L). Mais nous obtiendrions ainsi deux feuilles minimales compactes disjointes, ce qui est impossible (voir en PROPOSITION 1.3 ce résultat de FRANKEL [Fr]).

Le deuxième auteur conjecture que deux courbes holomorphes complètes de géométrie bornée de $\mathbb{CP}_2$ se rencontrent, et donc qu'une courbe holomorphe complète de géométrie bornée plongée dans $\mathbb{CP}_2$ est compacte.

Par ailleurs C. CAMACHO pense avoir observé les moustaches, les yeux de chat et la queue d'un minimal exceptionnel de $\mathbb{CP}_2$ qui, s'il existait, contredirait la conjecture précédente.

Ici nous étudierons en particulier les géodésiques non compactes, généralisant le théorème suivant dû à HADAMARD [Ha] :

THÉORÈME 0.1. — *Soit M^2 une sphère de courbure strictement positive et C une géodésique fermée de M^2 . Toute autre géodésique C' doit couper C .*

Notre énoncé est :

THÉORÈME 0.2. — *Deux géodésiques complètes d'une sphère M^2 de courbure strictement positive se coupent toujours.*

Nous écartons l'existence de deux géodésiques non compactes asymptotes qui n'avait pas été étudié par Hadamard. En particulier les géodésiques plongées doivent être compactes, puisque l'adhérence d'une géodésique plongée est une lamination géodésique.

1. Minima locaux de la distance

Deux sous-variétés N_1 et N_2 sont à une distance positive si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- a) il existe $p \in N_1$ et $q \in N_2$ tels que $d(p, q) = d(N_1, N_2) > 0$;
- b) la borne inférieure $d(N_1, N_2) > 0$ n'est pas atteinte.

Nous allons dans ce premier paragraphe donner, en adaptant une démonstration de FRANKEL [Fr] des conditions géométriques interdisant le cas a).

Dans la suite M sera une variété riemannienne de dimension m et de courbure (sectionnelle) supérieure ou égale à une constante $C > 0$.

LEMME 1.1. — *Si N_1 et N_2 sont des sous-variétés totalement géodésiques dont les dimensions n_1 et n_2 satisfont $n_1 + n_2 \geq m$, les points critiques de la fonction distance de valeur critique non nulle sont d'indice supérieur ou égal à $n_1 + n_2 - m + 1$.*

COROLLAIRE (FRANKEL [Fr]) 1.2. — *La fonction distance définie plus haut ne peut avoir de minimum local différent de zéro.*

Dans le même esprit, FRANKEL démontre aussi :

PROPOSITION [Fr] 1.3. — *Lorsque N_1 et N_2 sont deux hypersurfaces minimales complètes de M , la fonction distance ne peut avoir de minimum local non nul.*

Démonstration du Lemme. — Soient $p \in N_1$ et $q \in N_2$ deux points distincts réalisant un point critique de la distance. Soit γ un arc géodésique de M dont la longueur est la distance $d(p, q)$.

Transportons parallèlement le long de γ l'espace $T_p N_1$ tangent en N_1 à p . L'image $\tau_\gamma(T_p N_1)$ coupe $T_q N_2$ en un sous-espace de dimension $p + q - m + 1 \geq 1$ que nous noterons V_q . Il existe donc un vecteur unitaire $V \in T_p N_1$ tel que $\tau_\gamma V$ soit contenu dans $T_q N_2$.

Notons V_s le vecteur tangent en $\gamma(s)$ obtenu à partir de V par transport parallèle le long de l'arc de géodésique $[\gamma(0), \gamma(s)]$.

Soit $\gamma(t, s)$ une variation de la courbe γ telle que :

- $\gamma(0, s) = \gamma(s)$;
- $\partial/\partial t(\gamma(s, 0)) = V_s$;
- $\gamma(s, t)$ est, pour chaque s , une géodésique paramétrée par sa longueur d'arc t .

Par hypothèse, l'énergie est :

$$E(t) = \int_0^d \left\| \frac{d}{ds} \gamma(t, s) \right\|^2 ds.$$

La variation seconde en 0 de l'énergie satisfait :

$$\frac{d^2 E}{dt^2}(0) = -2 \int_0^d K\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, V(s)\right) ds \leq -2cd,$$

où K désigne la courbure sectionnelle.

Comme le résultat est vrai pour tout secteur $V(0,0)$ non nul appartenant à un sous-espace de dimension $n_1 + n_2 - m + 1$, ceci démontre le résultat du lemme.

Nous pouvons de même étudier des hypersurfaces complexes de $\mathbb{CP}_n$.

PROPOSITION 1.4. — *Soient N_1 et N_2 deux hypersurfaces, holomorphes complètes de $\mathbb{CP}_n$. La fonction distance $N_1 \times N_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ne peut avoir de minimum local non nul. Le même résultat reste vrai si la variété ambiante est Kählerienne compacte de courbure positive.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un tel minimum $p \in N_1$, $q \in N_2$. Nous pouvons répéter le calcul fait par FRANKEL dans le cas de deux hypersurfaces minimales (PROPOSITION 1.3) car le transport parallèle le long de la géodésique γ joignant p à q amène l'espace tangent $T_q N_2$ à coïncider avec l'espace tangent $T_p N_1$ en effet le transport parallèle préserve les sous-espaces complexes. Il suffit maintenant de répéter le calcul en utilisant le fait qu'une sous-variété complexe de $\mathbb{CP}_n$ est minimale et la positivité de la courbure sectionnelle de $\mathbb{CP}_n$. Ceci permet de déduire un résultat de CAMACHO, LINS et SAD [CLS].

COROLLAIRE 1.5. — *Un feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe de $\mathbb{CP}_n$ admet au plus un ensemble saturé minimal ne contenant pas de point singulier.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe deux tels minimaux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Comme $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont compacts, il existe $p \in \mathcal{M}_1$, $q \in \mathcal{M}_2$ tels que $d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = d(p, q) > 0$. Il suffit d'appliquer la PROPOSITION 1.5 aux feuilles de $\mathcal{F}$ passant par p et q .

En supposant que les singularités du feuilletage $\mathcal{F}$ soient isolées et admettent chacune au moins une séparatrice c'est-à-dire une feuille qui est une hypersurface d'équation $F = 0$ au voisinage de la singularité, F holomorphe admettant le point singulier comme singularité isolée, on pourrait démontrer que si chaque fois qu'elle admet une singularité dans son adhérence, la feuille L admet aussi une de ses séparatrices dans son adhérence, cette feuille admet le minimal $\mathcal{M}$ dans son adhérence.