BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN VALLÈS

Fibrés de Schwarzenberger et coniques de droites sauteuses

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 3 (2000), p. 433-449

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_3_433_0>

© Bulletin de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 433–449.

FIBRÉS DE SCHWARZENBERGER ET CONIQUES DE DROITES SAUTEUSES

PAR JEAN VALLÈS (*)

RÉSUMÉ. — À un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ stable de rang 2 sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2$, on associe son schéma des droites de saut $S(\mathcal{E})$ dans $\mathbb{P}_2^\vee$ [Ba1]. Quand le déterminant de $\mathcal{E}$ est pair, $S(\mathcal{E})$ est une courbe. Dans [LP1] Le Potier demande quels sont les fibrés caractérisés par leurs courbes de saut. Dans cet article nous montrons que si $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger [Sch1] de déterminant pair alors $S(\mathcal{E})$ détermine $\mathcal{E}$; dans ce cas $S(\mathcal{E})$ est de la forme nC où C est une conique lisse de $\mathbb{P}_2^\vee$. Nous donnons aussi une étude fine de la variété des zéros d'une section d'un fibré de Schwarzenberger. Cette étude permet d'ordonner et de simplifier la théorie bien connue des courbes de Poncelet.

ABSTRACT. — SCHWARZENBERGER'S BUNDLES AND CONICS OF JUMPING LINES. — To a stable vector bundle $\mathcal{E}$ of rank 2 on the complex projective plane $\mathbb{P}_2$ Barth associates its scheme $S(\mathcal{E})$ of jumping lines in $\mathbb{P}_2^\vee$ [Ba1]. When the first Chern class of $\mathcal{E}$ is even $S(\mathcal{E})$ is a curve. In [LP1] Le Potier asks which bundles are characterized by their curve of jumping lines. In this paper we prove that if $\mathcal{E}$ is a Schwarzenberger's bundle [Sch1] with even first Chern class then $S(\mathcal{E})$ determine $\mathcal{E}$; in this case $S(\mathcal{E})$ is of the form nC where C is a smooth conic of $\mathbb{P}_2^\vee$. We also give a precise study of the zero-scheme of a section of a Schwarzenberger's bundle. This study gives a simplification of the well known Poncelet's curve theory.

Introduction

Une méthode désormais classique lorsque l'on étudie les fibrés vectoriels stables de rang 2 sur le plan projectif complexe est de considérer leur schéma de droites sauteuses. Les fibrés de rang 2 stables (ceux dont les endomorphismes sont les constantes) de classes de Chern (c_1, c_2) possèdent une variété de modules projective irréductible et normale de dimension $4c_2 - c_1^2 - 3$ notée $M(c_1, c_2)$. Une droite de saut de F est une droite L telle que

$$F_L = O_L(a) \oplus O_L(b) \quad \text{avec} \quad |a - b| > 1.$$

(*) Texte reçu le 14 juin 1999, révisé le 24 février 2000, accepté le 10 mars 2000.
J. VALLÈS, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire LAMA, UFR des Sciences, Bât. Fermat 3^e étage 45, av. des États Unis, 78035 Versailles CEDEX (France).
Email : valles@math.uvsq.fr.

Classification mathématique par matières : 14.

Mots clés : Fibrés vectoriels, droites de saut, courbes de Poncelet.

© Société mathématique de France

L'entier $\left[\frac{1}{2}|a-b|\right]$ est l'ordre de saut de L. Si $\left[\frac{1}{2}|a-b|\right]$ ne dépend pas du choix de la droite de saut, on dira que le saut est uniforme. D'après Grauert et Mülich, une droite générale n'est pas une droite de saut de F.

Soit $F \in M(c_1, c_2)$; on note $S(F)$ l'ensemble des droites de saut de F. Cet ensemble a une structure naturelle de sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_2^\vee$ (voir [Ba1], pour c_1 pair et [Hu] pour c_1 impair).

• Pour un fibré $F \in M(c_1, c_2)$ de c_1 pair, $S(F)$ est une courbe de degré $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2$, image de F par le « morphisme de Barth »

$$\gamma : M(c_1, c_2) \longrightarrow \mathbb{P}\big(H^0(O_{\mathbb{P}_2^\vee}(c_2 - \tfrac{1}{4}c_1^2))\big)$$

Ce morphisme est génériquement fini sur son image, il est même quasi-fini lorsque l'on considère sa restriction à l'ouvert des fibrés vectoriels (voir [LP2, th. 6.11]). Pour $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 = 4$, Le Potier [LP1, cor. 5.16] a montré que $M(c_1, c_2)$ est birationnel à son image et il conjecture que c'est encore vrai pour $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 > 4$.

PROBLÈME. — *Pour $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 > 4$, existe t-il un fibré qui soit déterminé par sa courbe de saut ?*

La réponse est *oui*; nous montrons dans la deuxième partie de cet article que les fibrés de Schwarzenberger [Sch1] de déterminant pair sont déterminés par leur courbe de saut. Plus présisément, nous montrons (th. 2.4)

THÉORÈME. — *Soient C une conique lisse de $\mathbb{P}_2^\vee$ d'équation $\{f = 0\}$ et $\mathcal{E}$ un fibré stable sur $\mathbb{P}_2$ de déterminant pair tels que $S(\mathcal{E})$ est le diviseur nC d'équation $\{f^n = 0\}$. Alors $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger de la conique C.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est que la courbe multiple nC lorsque n n'est pas un nombre binômial n'appartient pas à l'image de $M(0, 2n)$ par le morphisme de Barth.

La première partie est consacrée à une étude détaillée de la variété des zéros d'une section d'un fibré de Schwarzenberger. Cette étude permet d'ordonner et de simplifier la théorie bien connue des courbes de Poncelet.

Je remercie Christian Peskine pour ses conseils dans l'élaboration de ce travail.

1. Fibrés de Schwarzenberger

Schwarzenberger [Sch1, th. 3] a montré que tout fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ provient de la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une surface lisse X qui est un revêtement double de $\mathbb{P}_2$. Il étudie plus précisément le cas où le revêtement $\pi : X \to \mathbb{P}_2$ est ramifié le long d'une conique lisse de $\mathbb{P}_2$; on appelle *fibrés de Schwarzenberger* les fibrés vectoriels de rang deux $\pi_*\mathcal{L}$.

Plusieurs descriptions de cette surface X existent ; nous utiliserons la description qui suit.

Soit $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2^\vee$ la variété d'incidence points-droites de $\mathbb{P}_2$. Soit C une conique lisse de $\mathbb{P}_2^\vee$, posons $X := \mathbb{F} \cap (\mathbb{P}_2 \times C)$ et considérons les diagrammes d'incidence :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}_2^\vee \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbb{P}_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{q}} & C \\ {\scriptstyle \bar{p}}\downarrow & & \\ \mathbb{P}_2 & & \end{array}$$

On sait que X est un revêtement double de $\mathbb{P}_2$ ramifié le long de la conique duale $C^\vee \subset \mathbb{P}_2$.

DÉFINITION 1. — *On appelle fibrés de Schwarzenberger de la conique C, les fibrés vectoriels de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$*

$$E_{n,C}(a) := (\bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}_n(C))(a)$$

où $\mathcal{L}_n(C)$ est le faisceau inversible de degré n sur C et a est un entier.

Les classes de Chern de ces fibrés sont :

$$c_1(E_{n,C}) = n - 1, \quad c_2(E_{n,C}) = \tfrac{1}{2} n(n-1).$$

Comme le morphisme $\bar{p}$ est fini on a $H^i(E_{n,C}) = H^i(\mathcal{L}_n(C))$ pour tout n. En particulier, $h^0(E_{n,C}) = n + 1$ pour $n \geq 0$.

1.0.1. *Suites de liaison.* — La suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_{n-1}(C) \longrightarrow \mathcal{L}_n(C) \longrightarrow O_{L^\vee} \to 0$$

où $L^\vee$ est le point de $\mathbb{P}_2^\vee$ correspondant à la droite L de $\mathbb{P}_2$ tangente à $C^\vee$, induit une suite exacte :

$$0 \to E_{n-1,C} \to E_{n,C} \to O_L \to 0. \tag{1}$$

Plus généralement on a, pour le choix de k points distincts, $L_1^\vee, \ldots, L_k^\vee$ sur C des suites de liaisons de la forme :

$$0 \to E_{n,C} \longrightarrow E_{n+k,C} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} O_{L_i} \to 0.$$

1.0.2. *Résolution.* — Rappelons [Sch1, prop. 2] que le fibré de Schwarzenberger $E_{n,C}$ $(n > 0)$ est décrit par

$$0 \to (n-1) O_{\mathbb{P}_2}(-1) \xrightarrow{M} (n+1) O_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow E_{n,C} \to 0.$$

Les coordonnées (X_0, X_1, X_2), de $\mathbb{P}_2$ peuvent être choisies de telle manière qu'un représentant de M soit la matrice $(n+1) \times (n-1)$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} X_0 & & & & & \\ X_1 & X_0 & & & & \\ X_2 & X_1 & . & & & \\ & X_2 & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & X_0 \\ & & & & . & X_1 \\ & & & & & X_2 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE. — Dans ce cas, l'équation de $C^\vee \subset \mathbb{P}_2$ est $X_1^2 - 4X_0X_2 = 0$.

1.0.3. *Quelques remarques.* — On vérifie facilement que

$$E_{0,C} = O_{\mathbb{P}_2} \oplus O_{\mathbb{P}_2}(-1), \quad E_{1,C} = O_{\mathbb{P}_2} \oplus O_{\mathbb{P}_2} \quad \text{et} \quad E_{2,C} = \Omega^\vee_{\mathbb{P}_2}(-1).$$

En utilisant les suites de liaison, on en déduit la relation de dualité suivante :

$$E_{-i,C} = E^\vee_{i,C}(-1) = E_{i,C}(-i).$$

Il est clair d'après la résolution ci-dessus que $E_{n,C}$ est engendré par ses sections pour $n > 0$ et que $H^0(E_{n,C}(-1)) = 0$ pour tout n.

On en déduit que les fibrés de Schwarzenberger sont stables pour $n \neq -1, 0, 1$.

Pour $-2 \leq n \leq 2$, les fibrés de Scharzenberger ne dépendent pas du choix de la conique de $\mathbb{P}_2^\vee$. Pour $|n| \geq 3$, $E_{n,C}$ caractérise C ; nous le verrons dans le paragraphe concernant le schéma des droites de saut de $E_{n,C}$.

On supposera dans la suite de ce texte que $n \geq 2$.

1.1. Une caractérisation des fibrés de Schwarzenberger.

Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ de première classe de Chern égale à c_1. Compte tenu de la suite exacte canonique

$$0 \to \Lambda^2\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow S^2\mathcal{E} \to 0,$$

l'équivalence

$$\mathcal{E} \text{ est stable} \iff h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee) = 1$$

peut encore s'écrire

$$\mathcal{E} \text{ est stable} \iff h^0\big((S^2\mathcal{E})(-c_1)\big) = 0$$

Peut-on caractériser les fibrés stables $\mathcal{E}$ qui vérifient $H^0((S^2\mathcal{E})(1-c_1)) \neq 0$?