COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Variétés algébriques réelles

Frédéric MANGOLTE

24

Épreuve SMF July 12, 2017

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Épreuve SMF July 2, 2017

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR
Bertrand MAURY
Julie DÉSERTI
Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org	www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2017*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-822-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Épreuve SMF July 12, 2017

COURS SPÉCIALISÉS 24

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017

Société Mathématique de France 2017

Épreuve SMF July 12, 2017

À mes enfants Gustave Mangolte et Jeanne Mangolte

Épreuve SMF July 12, 2017

Épreuve SMF July 12, 2017

TABLE DES MATIÈRES

Introduction – modèles algébriques des variétés lisses 1
Remerciements 6

1. Variétés algébriques 7
1.1. Variétés algébriques : points ou spectres ? 7
1.2. Ensembles algébriques affines et projectifs 9
1.3. Variétés algébriques abstraites 30
1.4. Topologie euclidienne 41
1.5. Dimension, points non singuliers 44
1.6. Courbes planes 57
1.7. Parapluies 62
Solution des exercices du chapitre 1 66

2. $\mathbf{R}$-variétés 75
2.1. Structures réelles sur une variété complexe 76
2.2. $\mathbf{R}$-variétés et variétés algébriques réelles 88
2.3. Complexification d'une variété réelle 98
2.4. $\mathbf{R}$-variétés vs variétés algébriques réelles vs schémas sur $\mathbf{R}$ 105
2.5. Faisceaux cohérents et fibrés algébriques 108
2.6. Diviseurs sur une $\mathbf{R}$-variété projective 113
2.7. $\mathbf{R}$-courbes planes 127
Solution des exercices du chapitre 2 132

3. Topologie des variétés avec involution 137
3.1. Homologie et cohomologie des $\mathbf{R}$-variétés 138
3.2. Théorie de Smith 145
3.3. Majoration des nombres de Betti 149
3.4. Forme d'intersection sur une $\mathbf{R}$-variété de dimension paire 155
3.5. Classification des $\mathbf{R}$-courbes et VIe problème de Hilbert 164
3.6. Variétés Galois-Maximales 170
3.7. Cycles algébriques 178
Solution des exercices du chapitre 3 187

4. Surfaces 189
4.1. Courbes et diviseurs sur les surfaces complexes 191
4.2. Exemples de $\mathbf{R}$-surfaces 203

Epreuve SMF July 12, 2017

4.3. **R**-surfaces minimales 210
4.4. Surfaces rationnelles, uniréglées ($\varkappa = -\infty$) 218
4.5. Surfaces K3, d'Enriques, abéliennes, bielliptiques ($\varkappa = 0$) 241
4.6. Surfaces elliptiques ($\varkappa \leqslant 1$) 254
4.7. Surfaces de type général ($\varkappa = 2$) 262
Solution des exercices du chapitre 4 275

5. Approximations algébriques 277
5.1. Modèles rationnels 277
5.2. Applications lisses et applications régulières 278
5.3. Applications à valeurs dans les sphères 284
5.4. Difféomorphismes et applications birégulières 301
5.5. Faux plans réels 315

6. Variétés de dimension 3 319
6.1. La conjecture de Nash de 1952 à 2000 en passant par 1914 319
6.2. Les 3-variétés réelles uniréglées de 2000 à 2012 328
6.3. Questions et conjectures 334

Appendices 335

A. Algèbre commutative 337
A.1. Limites inductives 337
A.2. Anneaux, idéaux premiers, idéaux maximaux, modules 338
A.3. Localisation 340
A.4. Produit tensoriel 343
A.5. Algèbres entières, théorème des zéros (Nullstellensatz) 344
A.6. Modules quadratiques sur **Z**, réseaux 347
A.7. Involutions anti-linéaires 349
Solution des exercices de l'appendice A 351

B. Topologie 353
B.1. Séparation 353
B.2. Ensembles semi-algébriques 354
B.3. Complexes simpliciaux, homologie 355
B.4. Théorème des coefficients universels 357
B.5. Variétés topologiques et différentielles, orientabilité 360
B.6. Cohomologie 364
B.7. Dualité de Poincaré 366
B.8. Variétés de dimension 3 373

C. Faisceaux, espaces annelés 379
C.1. Faisceaux 379
C.2. Espace étalé dans X 381
C.3. Fibres d'un faisceau 382
C.4. Faisceau des sections d'un espace étalé 386

Épreuve SMF July 12, 2017