Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 112
Nouvelle série

REPRÉSENTATIONS *p*-ADIQUES CRISTALLINES DE DE RHAM DANS LE CAS RELATIF

Olivier BRINON

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE
Emmanuel BREUILLARD
Gérard BESSON
Antoine CHAMBERT-LOIR
Jean-François DAT
Charles FAVRE
Daniel HUYBRECHTS
Yves LE JAN
Laure SAINT-RAYMOND
Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 27 € ($ 40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2008*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-265-5

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 112

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES CRISTALLINES ET DE DE RHAM DANS LE CAS RELATIF

Olivier Brinon

Société Mathématique de France 2008
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

O. Brinon
LAGA, Institut Galilée, Université Paris-Nord, 99 avenue J.B. Clément,
93430 Villetaneuse (France).
E-mail : brinon@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F80, 11S25, 14F30.

***Mots clefs*. —** Représentations galoisiennes, périodes p-adiques, cohomologie galoisienne, cohomologie cristalline, F-cristaux.

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES CRISTALLINES ET DE DE RHAM DANS LE CAS RELATIF

Olivier Brinon

***Résumé.* —** On définit et étudie les notions de faisceaux p-adiques lisses de de Rham et cristallins sur des bases p-adiques « convenables ». On introduit pour cela des anneaux de périodes p-adiques (analogues à ceux de J.-M. Fontaine), qui permettent de leur associer des invariants de nature différentielle. Dans le cas de bonne réduction, on obtient un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux p-adiques lisses cristallins dans celle des F-isocristaux filtrés sur la fibre spéciale.

***Abstract* (Crystalline and de Rham p-adic representations in the relative case)**

We define and study the notions of de Rham and crystalline smooth p-adic sheaves over "suitable" p-adic bases. To do this, we introduce p-adic period rings (analogous to those of J.-M. Fontaine), which are used to associate differential invariants to them. In the good reduction case, we obtain a fully faithful functor from the category of crystalline smooth p-adic sheaves in that of filtred F-isocrystals on the special fiber.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 112, SMF 2008

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 1

2. Notations, premières propriétés 7

3. L'anneau C 13
3.1. Propriétés galoisiennes 13
3.2. Platitude 21
3.3. Localisation 23

4. Rappels sur l'anneau B_{HT} de Hyodo 31
4.1. L'anneau B_{HT} et sa cohomologie galoisienne 31
4.2. Finitude de $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ 35

5. L'anneau B_{dR} 43
5.1. Construction 43
5.2. Filtration de B_{dR} 48
5.3. Connexion de B_{dR} 55
5.4. Platitude 58

6. L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ 61
6.1. Construction 61
6.2. Relations avec B_{dR} 69
6.3. Platitude 85

7. (φ, ∇)-modules filtrés 91
7.1. La catégorie des (φ, ∇)-modules filtrés 91
7.2. Changement de Frobenius 100

8. Représentations p-adiques 105
8.1. Représentations discrètes, représentations non ramifiées 106
8.2. Représentations de de Rham, représentations cristallines et représentations de Hodge-Tate 110

8.3. Structures supplémentaires sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ 121
8.4. $\mathcal{G}_R$-régularité de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et de B_{dR} 125
8.5. Pleine fidélité du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$, admissibilité 131
8.6. Cas des caractères 133

9. Appendices 137
9.1. Rappels et compléments sur les revêtements presque étales 137
9.2. I-platitude 142
9.3. Calculs de cohomologie cristalline 146
9.4. Cas d'une base lisse 152

Bibliographie 155

Index 159

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de construire et d'étudier des anneaux de périodes p-adiques de de Rham et cristallines dans une situation relative, ainsi que les catégories de représentations p-adiques de de Rham et cristallines que ces anneaux permettent de définir. Ce travail est un prolongement de [**15**], sur lequel il s'appuie. Rappelons brièvement le contenu de *loc. cit.*

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k de caractéristique p. On note $e \in \mathbf{N}_{>0}$ l'indice de ramification absolu de K et on fixe une uniformisante ϖ de K. On suppose que k admet une p-base finie. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et posons $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On note v la valuation de $\overline{K}$, normalisée par $v(p) = 1$. Notons C_K le complété de $\overline{K}$ pour v. L'action de $\mathcal{G}_K$ se prolonge à C_K par continuité.

On s'intéresse à la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ des représentations p-adiques de $\mathcal{G}_K$, dont les objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_K$, et dont les morphismes sont les applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires $\mathcal{G}_K$-équivariantes. Lorsque k est parfait (*i.e.* $d = 0$ avec les notations qui suivent), tout ce qui suit est dû à Fontaine (*cf.* [**29**]).

Choisissons $t_1, \ldots, t_d \in \mathcal{O}_K$ des relèvements d'une p-base de k. Soit alors $\mathcal{O}_{K_0}$ le sous-anneau de $\mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_{K_0}$ est un anneau de Cohen pour k et $t_1, \ldots, t_d$ des éléments de $\mathcal{O}_{K_0}$. On pose $K_0 = \mathcal{O}_{K_0}[p^{-1}]$: on a alors $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_0}[\varpi]$. On se fixe un relèvement $\sigma\colon \mathcal{O}_{K_0} \to \mathcal{O}_{K_0}$ du Frobenius de k. On note $\widehat{\Omega}$ le module des différentielles continues de $\mathcal{O}_{K_0}$ relativement à $\mathbf{Z}$:

$$\widehat{\Omega} = \varprojlim_{n>0} \Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbf{Z}}/p^n\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbf{Z}}.$$

Le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\widehat{\Omega}$ est libre de base $(\mathrm{d}t_i)_{1\leq i\leq d}$. On définit alors un (φ, ∇)-module filtré sur K relativement à K_0 comme étant un K_0-espace vectoriel de dimension finie D muni des structures supplémentaires suivantes :

1) un opérateur de Frobenius $\varphi\colon D \to D$ qui est σ-linéaire et dont le linéarisé $\sigma^* D \to D$ est un isomorphisme ;
2) une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla\colon D \to D \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle le Frobenius est horizontal ;
3) une filtration décroissante séparée exhaustive $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ sur $D_K := K \otimes_{K_0} D$ telle qu'on a la transversalité de Griffith pour ∇.

Ces objets forment une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire notée $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. Elle ne dépend pas, à équivalence près, du choix de σ (*i.e.* de K_0) parce qu'elle est équivalente à la catégorie des F-isocristaux sur k dont l'évaluation en un $(\mathcal{O}_K, p\mathcal{O}_K)$ est munie d'une filtration décroissante séparée exhaustive.

On définit par ailleurs, sur la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$, des fonctions additives t_N et t_H, qui permettent de définir la notion de (φ, ∇)-module filtré faiblement admissible : $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est faiblement admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout sous-objet D' de D dans $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. Cela définit une sous-catégorie $\mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

On construit les anneaux de périodes $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Ils sont munis de structures supplémentaires : B_{dR} est une $\overline{K}$-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_K$, d'une connexion intégrable $\nabla\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ et d'une filtration décroissante séparée et exhaustive pour laquelle on a la transversalité de Griffith. L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est une sous-K_0-algèbre de B_{dR} stable sous l'action de $\mathcal{G}_K$ et de ∇ et munie d'un opérateur de Frobenius φ horizontal. On dispose en outre d'un homomorphisme injectif de K-algèbres $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. On a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_K} = K$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathcal{G}_K} = K_0$.

Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$, on pose

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}.$$

Ces objets héritent de structures supplémentaires déduites de celles de B_{dR} et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$: le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration (décroissante séparée exhaustive) et d'une connexion intégrable qui vérifie la transversalité de Griffith. Le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'une connexion intégrable et d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire horizontal. En outre, on a une application K-linéaire injective $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. On montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est de dimension finie sur K. En particulier, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un (φ, ∇)-module filtré sur K relativement à K_0 (en munissant $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)_K = K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ de la filtration induite par celle de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$).

On dispose des applications de périodes

$$\alpha_{\mathrm{cris}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V,$$
$$\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

dont on montre qu'elles sont toujours injectives (voir [**14**, prop. 3.22]), de sorte que $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ et $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. On dit alors que V est cristalline (resp. de de Rham) lorsque $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$) est un isomorphisme (*i.e.* lorsque $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$)).