PANORAMAS ET SYNTHÈSES 4

FORMALISME THERMODYNAMIQUE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES HOLOMORPHES

Michel Zinsmeister

Société Mathématique de France 1996

FORMALISME THERMODYNAMIQUE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES HOLOMORPHES

Michel Zinsmeister

L'objet de la thermodynamique et de la physique statistique est de comprendre l'équilibre d'un gaz ou des différents états de la matière. L'un des buts de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes est de comprendre les étranges objets fractals qui apparaissent dans l'itération d'un polynôme quadratique. Or un lien singulier réunit ces deux théories : il se trouve que des lois physiques de la thermodynamique sont un outil extrêmement efficace pour comprendre les objets de la dynamique holomorphe. Un formalisme thermodynamique s'est développé, mettant en parallèle des notions n'ayant *a priori* rien de commun.

Si l'explication profonde de ce parallélisme reste une énigme, le but de cet ouvrage est de décrire ce formalisme du point de vue physique et mathématique afin d'en dégager les rouages fondamentaux et d'en montrer quelques applications.

Cet ouvrage ne prétend à aucune exhaustivité, que ce soit pour l'aspect physique ou mathématique. Son objectif sera atteint si le lecteur éprouve du plaisir à comprendre les articulations de cette belle machine.

To understand the equilibrium of a gas or the different states of matter is the purpose of thermodynamics or statistical physics. To understand the strange fractal sets appearing when one iterates a quadratic polynomial is one of the goals of the theory of holomorphic dynamical systems.

Oddly enough, those two theorems are strongly linked: The laws of thermodynamics happen to be an extremely powerful tool to understand the objects of holomorphic dynamical systems. A "Thermodynamic Formalism" has been developped bringing in the same light notions that are *a priori* unrelated. If the deep reasons of this parallelism are unknown, the goal of this book is to describe this formalism both from the physical and mathematical point of view in order to understand how it works and how useful it can be.

This book is by no means exhaustive neither from the physical nor from the mathematical point of view. Its objective will be attained if the reader feels pleased in understanding this beautifull machinery.

Classification AMS : 28D, 30, 80, 82B.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

1. L'HYPOTHÈSE ERGODIQUE 7

1. Mécanique statistique des systèmes continus 7
2. Transformations préservant la mesure 9
3. Ergodicité 11
4. Interprétation géométrique de l'ergodicité 14

2. LA NOTION D'ENTROPIE 17

1. Un peu de thermodynamique classique : l'entropie de Clausius 17
2. L'entropie en théorie de l'information : l'entropie de Shannon 20
3. L'entropie de Boltzmann 25

3. L'ENTROPIE EN THÉORIE ERGODIQUE 29

1. Le cadre physique : la thermodynamique des réseaux 29
2. Entropie d'une mesure invariante 32
3. Entropie et pression topologique 36
4. Sous-décalages 38

4. LE THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS-RUELLE 41

1. Énoncé et démonstration du théorème 41
2. Mesures de Gibbs et états d'équilibre 47
3. L'opérateur de Ruelle complexe 51

5. LES RÉPULSEURS CONFORMES 55

1. Définition et propriétés générales 55
2. Exemples 58
2. Calcul de la dimension de Hausdorff de J 61

6. ITÉRATION DES POLYNÔMES QUADRATIQUES 65

1. Quelques notions d'itération 65
2. La cardioïde principale 68
3. Applications numériques 72
4. La formule de Manning 73
5. Les ensembles de Julia de $z^2 + c$ sont de dimension > 1 si $c \neq 0$ dans la cardioïde principale 75
6. Développement à l'ordre 2 en 0 de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia de $z^2 + c$ 77

7. TRANSITIONS DE PHASE 83

1. Les transitions de phase comme phénomènes naturels 83
2. Interprétation théorique des transitions de phase 86
3. Transition de phase parabolique 87

APPENDICE : DIMENSION ET MESURES DE HAUSDORFF 91

1. Rappels admis sur la théorie de la mesure 91
2. Mesures de Hausdorff 91
3. Dimension de Hausdorff 93

BIBLIOGRAPHIE 95

INTRODUCTION

Ainsi c'est chose sûre : nul repos n'est accordé aux atomes dans leur course à travers le vide. Bien au contraire, les uns, cédant à un mouvement perpétuel et varié sont renvoyés, en se choquant, à de grandes distances ; les autres, sous le coup, se rapprochent et se nouent. Ceux qui dans une étroite union, rassemblés à des intervalles inappréciables, se lient entre eux, en confondant intimement leurs formes, ceux-là constituent les corps solides, tels les rochers, le fer, et un petit nombre d'autres substances. Pour ceux qui errent dans l'immensité du vide et, rapides, courent au loin séparés l'un de l'autre par de grands intervalles, c'est à eux que nous devons l'air transparent et la splendide lumière du soleil.

Lucrèce, *De la Nature des Choses, Chant II, −98 −55 A.J.C.*

Les mathématiques sont le langage des sciences physiques, et les caractères de ce langage sont les triangles, cercles et autres figures géométriques. Ce point de vue de Galilée constitue depuis le XVII^{e} siècle l'approche philosophique dominante du couple mathématiques-physique. Le formalisme mathématique est indéniablement un outil puissant et universel pour énoncer les lois de la nature. Ainsi la géométrie a été développée pour comprendre le mouvement des astres ou encore l'optique tandis que le calcul infinitésimal se développait pour formaliser la mécanique. Ces branches se sont ensuite développées considérablement suivant des lois proprement mathématiques et selon une logique d'où les préoccupations physiques ont eu tendance à disparaître. Le couple mathématiques-physique est donc historiquement indissociable, les mathématiques servant à modéliser la réalité physique pour la comprendre rationnellement et en dégager les lois.

Naturellement un tel point de vue doit, sitôt énoncé, être corrigé comme trop schématique ; le lien mathématiques-physique est plus complexe que cela. Les grecs de l'Académie de Platon étudiaient la géométrie *pour elle-même*, sans souci d'une quelconque application, comme un pur jeu de l'esprit ; comme l'a observé Dieudonné, Apollonius connaissait les coniques bien avant qu'elles servent à décrire les trajectoires des planètes et de plus en plus les physiciens utilisent des résultats mathématiques réputés abstraits et en tous cas développés *per se* pour élaborer leurs modèles.

Même corrigé, ce point de vue reste orienté ; il accrédite l'idée d'une *dissymétrie* importante dans le rapport entre mathématiques et physique. Imaginons une planète

habitée par des créatures pensantes faisant des mathématiques très différemment de nous : le point de vue précédent nous force à conclure que leur physique est nécessairement très différente.

Dissipons tout de suite un malentendu ; le constat de cette dissymétrie ne présuppose aucun jugement de valeur : s'il est clair que la physique est tributaire des mathématiques, le contraire n'en est pas moins vrai : sans la physique, les mathématiques ne seraient qu'une coquille vide, une production de tautologies inconsistantes. Un exemple frappant est celui de la théorie du potentiel. C'est pour comprendre les lois de l'électromagnétisme qu'en deux siècles ont été façonnés les outils les plus puissants de l'analyse moderne : théorie de la mesure, analyse harmonique, distributions, etc. La différence provient du fait que les physiciens ne peuvent se passer du modèle mathématique alors que les mathématiciens ont oublié l'origine physique des concepts ; la théorie moderne de la mesure est une théorie complètement autonome et son origine physique ne joue plus qu'un rôle historique.

Un des objets du présent travail est de développer une thèse due à Ruelle [Ru1] tendant à infirmer cette position répandue : le rapport physique-mathématiques est plus symétrique qu'on le croit. Nous allons montrer en effet que des résultats purement mathématiques ont été obtenus comme *corollaires* de résultats (lois) de la physique, en l'occurrence de la thermodynamique. Ici le problème mathématique n'est pas issu de la physique et sa résolution utilise toute la force d'un formalisme qui a été façonné en un siècle pour comprendre un phénomène naturel, à savoir l'équilibre d'un gaz. C'est cet exemple qui fait dire à Ruelle [Ru1] que nos mathématiques sont *naturelles*. En d'autre termes nous voulons montrer un exemple où les mathématiciens ont utilisé un modèle physique pour résoudre un problème mathématique, inversant par là-même le rapport communément supposé entre les deux sciences.

La thermodynamique fait maintenant partie de la *mécanique statistique*, science qui a été créée au siècle dernier par (entre autres) Clausius, Boltzmann, Carnot, Kelvin, Maxwell, Gibbs. Son acte de naissance épistémologique est un constat d'échec ; les lois de la mécanique classique, applicables au niveau microscopique pour l'étude d'un fluide sont totalement inopérantes au niveau macroscopiques vu le nombre énorme de particules interagissant. Les quantités à mesurer ne peuvent donc être que des moyennes et le mouvement des particules perçu comme aléatoire et par là seulement étudiable statistiquement.

Le début de cette science commence comme une illustration d'école du point de vue exposé plus haut et que l'on veut précisément corriger. Cette science (physique) enfante de la théorie (mathématique) des systèmes dynamiques qui verra ses premiers succès avec Poincaré puis Birkhoff et son fameux théorème identifiant moyennes spatiales et temporelles. Enfin Kolmogorov et Sinai prendront à leur compte la notion d'entropie (inventée par Clausius et Boltzmann) pour l'utiliser comme un invariant fondamental en théorie ergodique.

On reste ici dans le schéma classique : une nouvelle science physique invente de nouveaux concepts comme l'entropie qui sont empruntés (volés ?) par les mathématiciens qui, en les formalisant, en font des outils mathématiques dont l'origine physique a été complètement évacuée.

L'*histoire* mathématique que nous allons raconter pour illustrer la thèse de Ruelle a pour origine une remarque de Poincaré dans son *Mémoire sur les groupes Kleinéens* [Po1]. Soit G un groupe Fuchsien, c'est-à-dire un groupe de transformations homographiques fixant le disque unité D dont un système générateur identifie par paires les côtes d'un polygone (pour la géométrie hyperbolique) inclus dans D et tel que les images de ce polygone par le groupe forment un pavage de D. Ce groupe agit symétriquement sur le complémentaire de D et le cercle ∂D apparaît comme un ensemble invariant remarquable de G agissant sur la sphère de Riemann. Imaginons maintenant que nous perturbons le système générateur précédent en un système d'homographies de la sphère de sorte que le polygone associé et ses images par le nouveau groupe forment encore un pavage d'un domaine de Jordan Δ (cela revient algébriquement à perturber continûment les générateurs de façon à préserver les relations). La courbe $\partial\Delta$ est alors l'ensemble invariant remarquable pour le groupe Kleinéen perturbé (l'ensemble limite analogue de l'ensemble de Julia en itération). Poincaré remarque donc que $\partial\Delta$, si ce n'est pas un cercle, doit être une courbe très irrégulière : remarquable intuition qui préfigure entre autres le théorème de rigidité de Mostow et un champ de recherches considérable !

Cette intuition est confirmée rigoureusement par Fricke et Klein quelques années plus tard ; ces auteurs démontrent que la courbe en question, si ce n'est un cercle, est localement non rectifiable (la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle n'est pas σ-finie). Notons au passage que c'est le premier exemple historique d'une telle courbe (la courbe de Van Koch viendra 10 ans plus tard) (cette observation provient de [Po2]). Il faudra attendre Mostow [Mo] pour comprendre mieux le phénomène et enfin Bowen [Bo1] utilisera Mostow et le formalisme thermodynamique pour montrer que si ce n'est pas un cercle, la dimension de Hausdorff de la courbe est > 1 et calculable selon une formule que nous allons maintenant expliquer.

Bowen généralise tout d'abord le problème au cadre général des *répulseurs conformes*. Vu sous cet angle, on peut modéliser l'action du groupe sur $\partial\Delta$ comme l'action d'un décalage sur un ensemble de mots infinis sur un alphabet fini (penser à la multiplication par 10 mod 1 sur l'intervalle $[0,1]$ codé par le développement décimal), soit $A^{\mathbb{N}}$; on interprète alors cet ensemble comme l'ensemble des configurations en réseau d'un gaz unidimensionnel ; la mesure de Hausdorff dans la dimension apparaît alors comme un état de Gibbs du système associée à une interaction φ dépendant de la géométrie et à une température T telle que l'état d'équilibre μ associé minimise l'énergie libre

$$U - TS$$

où U est l'énergie potentielle associée à φ, S l'entropie de μ, la température T étant telle que l'énergie libre soit nulle. La dimension vaut alors $k^{-1}T$ (où k est la constante de Boltzmann).

Ce résultat est en tout point remarquable ; les grandeurs thermodynamiques s'appliquent parfaitement au problème alors qu'aucun sens physique ne peut lui être donné. Le problème mathématique a ici été modélisé par la physique alors même qu'il n'a lui-même aucune origine naturelle. C'est la situation exactement

symétrique de celle que l'on a coutume d'observer : les physiciens utilisant des résultats mathématiques abstraits à la grande surprise de leur créateur pour modéliser des situations expérimentales. Ici ce sont les mathématiciens qui plaquent sur leur problème le modèle de la thermodynamique. Il ne s'agit pas seulement ici d'intuition ou d'emprunt de concept, mais de l'utilisation pleine et entière d'un modèle physique.

Le but de ce survol est de tenter d'expliquer cette théorie sous ses deux angles physiques et mathématiques.

En ce qui concerne la physique nous tenterons d'expliquer (aussi bien qu'un non physicien peut le faire) les notions thermodynamiques nécessaires à la compréhension de la preuve. Nous essayerons autant que possible d'accompagner cette introduction de remarques historiques afin de mieux comprendre l'évolution des idées. C'est ainsi que nous commençons par un chapitre où nous tentons d'expliquer l'origine physique de la notion d'ergodicité avant d'exposer rigoureusement les bases de la théorie ergodique et la démonstration du théorème de Birkhoff.

Dans le chapitre suivant nous développons les différentes notions d'entropie telles qu'elles sont apparues (presque) chronologiquement. Nous nous attarderons sur la théorie de l'information car il nous semble que c'est pédagogiquement le bon cadre pour aborder cette notion complexe. Le chapitre se termine par un modèle jouet de thermodynamique où l'on peut définir facilement toutes les fonctions thermodynamiques et comprendre les liens fondamentaux qui les unissent et qui constituent le cœur de ce qui va suivre.

Les chapitres suivants développent de façon rigoureuse la thermodynamique des réseaux, le théorème de Perron-Frobenius-Ruelle qui est la clé de voûte de tout ce travail, et toutes ses conséquences thermodynamiques. On insistera sur les notions d'état de Gibbs et d'état d'équilibre, deux notions éminemment physiques qui sont mises à contribution mathématique.

Ce qui vient d'être décrit constitue ce qui est communément appelé le formalisme thermodynamique ; le reste de l'ouvrage est consacré aux applications de ce concept. Le terme d'illustration semble mieux convenir, tant le formalisme est présent dans ces applications. Nous commençons par une étude générale des répulseurs conformes, théorie qui englobe le théorème de Bowen dont nous avons déjà parlé à propos du problème de Poincaré. Le formalisme thermodynamique permet de relier la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite au rayon spectral d'un opérateur de Ruelle. Ce fait nous permet d'une part de déduire des propriétés de cette dimension mais aussi d'étudier la variation de cette dimension suivant la variation d'un paramètre dont dépend le répulseur conforme. Dans le cas du problème de Poincaré, cela revient à considérer l'espace de toutes les perturbations possibles d'un groupe Fuchsien qui n'est autre que l'espace de Teichmüller du groupe et qui est muni d'une structure complexe finie-dimensionnelle naturelle. La question qui se pose alors est celle de la régularité des fonctions thermodynamiques intervenant comme fonction sur l'espace de Teichmüller. Tout cela a été étudié mais le nombre de paramètres intervenant et les techniques spécifiques de théorie de Teichmüller font que cette étude n'a pas sa place ici.

Nous abandonnons donc le problème de Poincaré évoqué plus haut pour fixer notre attention sur le cas de l'itération des polynômes quadratiques ($z \mapsto z^2 + c$). Pour les valeurs de c dans la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia est une courbe de Jordan sur laquelle le polynôme agit comme un répulseur conforme, ce qui rend toute la théorie applicable. La complexité est ici atténuée par le fait que l'espace de Teichmüller associé (l'ensemble des valeurs de c) est de dimension1.

Concrètement, nous nous proposons de démontrer rigoureusement les trois résultats suivants qui illustrent la force du formalisme thermodynamique :

1) La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + c$, soit $d(c)$ varie de façon réelle analytique avec c dans la cardioïde principale.

2) Dans cette même cardioïde, $d(c) > 1$ sauf si $c = 0$.

3) Au voisinage de 0, on a le développement limité

$$d(c) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + \mathrm{o}\big(|c|^2\big).$$

Notons que les résultats 1) et 3) sont dûs à Ruelle [Ru2] tandis que le deuxième doit être crédité à Bowen [Bo1] ; nous donnons ici une démonstration différente de 3). Celle de Ruelle est, de son propre aveu, heuristique ; la nôtre est rigoureuse et c'est peut-être là l'une des seules nouveautés de cette monographie, une autre étant, nous l'espérons, de combler un vide dans la littérature et de rendre service à tous les analystes qui veulent étudier des questions de dimension de Hausdorff d'ensembles limites de groupes ou de semi-groupes et, pourquoi pas, aux physiciens intéressés à l'aspect analytique du sujet.

Dans un dernier chapitre, nous abordons le problème de la transition de phase. Il s'agit d'un problème rendu fascinant par le paradoxe qu'il véhicule : c'est un problème éminemment concret, palpable même, alors que la théorie censée l'expliquer est difficile et encore largement incomplète. Après un préliminaire rappelant les résultats physiques bien connus, nous montrons tout d'abord que le formalisme thermodynamique se généralise au cas des polynômes dont l'ensemble de Julia ne contient pas de point critique ; c'est la théorie de Denker Urbanski [DU1]. Nous montrons alors que dans le cas de l'existence d'un point fixe indifférent rationnel il apparait une transition de phase à la température correspondant à la dimension de Hausdorff. Nous utilisons alors ces résultats pour montrer que la fonction $d|\mathbb{R}$ est continue à gauche en $\frac{1}{4}$ (voir [BZ]).

Nous concluons cette introduction en confessant que le travail qui suit n'est pas à 100 % autosuffisant ; nous admettons en effet en cours de route le théorème de Koebe dont la démonstration figure dans tout bon ouvrage sur la variable complexe (par exemple [Pom1]) et le théorème récent de Slodkowski dont la démonstration nécessiterait un autre ouvrage de la même taille et pour laquelle nous renvoyons à [Sl], [AM]. Nous admettons également le théorème du point fixe de Schauder-Tychonov dont on peut trouver une démonstration dans [Rud] ainsi que le théorème de Kato-Rellich sur la perturbation du spectre pour lequel nous renvoyons à [RS].

Enfin nous avons délibéremment (c'est sûrement un tort) laissé de côté tout l'aspect quantique du sujet.

Un mot encore concernant la forme : comme l'indique le titre de la collection, il s'agit d'un ouvrage de synthèse. Mon but en l'écrivant était de comprendre et de faire comprendre certains mécanismes et enchaînements d'idées. Pour ce faire j'ai dû lire beaucoup d'ouvrages, tous écrits par des personnes beaucoup plus savantes que moi. Je n'ai pas hésité à parfois reprendre presque mot pour mot certains développements de ces ouvrages et ce dans un souci de clarté : puisque c'est si clairement expliqué, pourquoi en effet changer ? Un travail de synthèse est de toute façon une sorte de pillage. Parmi toutes les références que j'ai consultées, je voudrais citer celles que j'ai le plus pillées. Il s'agit de :

- Douady, Hubbard [DH] : *Étude dynamique des polynômes complexes*;
- Jancovici [Ja] : *Thermodynamique et physique statistique*;
- Khinchin [Kh1] : *Mathematical Fundations of statistical physics*;
- Landau et Lifschitz [LL] : *Statistical Mechanics.*
- Milnor [Mi1] : *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*;
- Parry et Pollicot [PP] : *Zeta functions and the periodic structure of hyperbolic dynamics*;
- Ruelle [Ru3] : *Thermodynamic formalism*;
- Walters [W] : *Introduction to ergodic theory*;

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans l'aide et la bienveillance d'un très grand nombre de personnes. Je tiens tout d'abord à remercier l'équipe de *Panoramas et synthèses* pour leur encouragement permanent : Michèle Audin et Jean-Pierre Kahane dont les conseils ont été déterminants, sans oublier Nathalie Christiæn.

Je remercie également mes collègues de l'université d'Orléans et de Paris-Sud pour leur conseils : J.-P. Schreiber qui a lu attentivement une première version du manuscrit, F. James qui m'a initié à la transformation de Legendre, J.-M. Caillol qui a apporté sa caution de physicien et P. Sentenac qui a relevé de nombreuses erreurs. Vassili Nestoridis et Stephen Heinemann ont également lu le manuscrit et corrigé de nombreuses erreurs : je les en remercie vivement. Enfin, je remercie également K. Astala, A. Volberg et M. Denker pour des conversations mathématiques fructueuses concernant le texte.

Chapitre 1

L'HYPOTHÈSE ERGODIQUE

1. Mécanique statistique des systèmes continus

Le credo de la mécanique statistique est que, en dernière instance, ce sont les lois de la mécanique au niveau corpusculaire qui expliquent tout phénomène naturel, aussi compliqué soit-il. Si nous voulons décrire le comportement à l'équilibre d'un litre d'air enfermé dans une bouteille on considère donc les N molécules qui composent ce gaz (N est de l'ordre de 10^{27}) et pour la j-ième molécule, on désigne par $q_j(t)$, $p_j(t) \in \mathbb{R}^3$ respectivement sa position et sa quantité de mouvement à l'instant t. On pose $p = (p_1, .., p_n),\ q = (q_1, .., q_n)$ et on définit la phase comme $(p, q) \in \mathbb{R}^{6N}$, l'espace des phases. Ce qui règle l'évolution du processus, c'est un Hamiltonien qui n'est autre que l'énergie du système

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^{N} \frac{|p_j|^2}{2m_j} + U(q).$$

La première partie de la somme est l'énergie cinétique et U représente l'énergie potentielle qui se décompose elle-même suivant l'énergie des forces extérieures qui s'appliquent au système et l'énergie interne provenant de l'interaction entre les particules. les équations du mouvement sont alors simplement

$$\frac{\mathrm{d}p_{ij}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_{ij}}, \quad \frac{\mathrm{d}q_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, N,\ \ j = 1, 2, 3).$$

Une valeur initiale de la phase étant donnée on peut en théorie complètement décrire le mouvement dans l'espace des phases. Mais ceci est irréaliste pour deux raisons : la première est le nombre énorme d'équations à résoudre — même si l'on pouvait les résoudre explicitement, le temps qu'il faudrait pour les écrire dépasserait largement la durée d'existence du système solaire — et la deuxième raison est qu'il est impossible de connaître une valeur initiale ; il est hors de question de suivre à la trace chaque molécule !

L'idée pour résoudre cette difficulté apparemment insurmontable est de précisément mettre à profit l'extrême complexité du phénomène : les interactions sont tellement nombreuses et complexes au point de pouvoir être considérées comme aléatoires que... de l'ordre finit par apparaître au même titre que de l'ordre apparaît dans une suite de nombres aléatoires (loi des grands nombres).

Mais soyons plus précis : en général l'étude d'un phénomène se ramène à un certain nombre de mesures de quantités thermodynamiques. Ces quantités sont en fait des fonctions sur l'espace des phases. D'après la discussion précédente on peut considérer ces fonctions comme des variables aléatoires.

On dit qu'un système est en *équilibre* si ces variables aléatoires correspondant aux quantités thermodynamiques sont extrêmement centrées autour de leur espérance, au point que des fluctuations dans les mesures sont inobservables dans la pratique.

Tout ceci reste bien vague si on ne précise pas :

1) quelle est la loi de probabilité sur l'espace des phases et

2) comment dans la pratique sont effectuées les mesures.

La réponse à la question 1) découle d'un théorème de Liouville : la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q$ dans l'espace des phases est invariante par le flot Hamiltonien. Autrement dit, un ensemble mesurable de phases sera transformé au bout d'un temps quelconque t en un ensemble de même volume. Il est en effet naturel de faire l'hypothèse que la loi cherchée ne dépend pas du temps. Si donc V est un ensemble de l'espace des phases qui est invariant par le flot, la loi de probabilité

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \,/ \textstyle\int_V \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q$$

est un bon candidat. Les ensembles naturels qui sont invariants par le flot sont les hypersurfaces de niveau de l'énergie H. Comme elles sont de volume nul, la loi précédente n'est pas définie et un calcul simple de limite montre qu'il faut prendre dans ce cas pour loi

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}\sigma/\|\nabla H\|}{\displaystyle\int_{\{H=H_0\}} \mathrm{d}\sigma/\|\nabla H\|},$$

$\mathrm{d}\sigma$ désignant la mesure de surface sur $\{H = H_0\}$.

Cette loi s'appelle l'*ensemble microcanonique de Gibbs*.

La réponse à la deuxième question nous amène au point essentiel de ce chapitre. Supposons que l'on veuille mesurer une fonction thermodynamique f. Quelle que soit la manière dont on s'y prenne, cette mesure prendra un certain temps qui sera forcément long par rapport à la vitesse des changements dans le fluide (les molécules d'un gaz se déplacent à des vitesses de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde). Ce que nous calculons, c'est donc une moyenne sur un (grand) intervalle de temps de la quantité $f(M_t)$, M_t désignant l'état du système à l'instant t.

L'*hypothèse ergodique* est que ces moyennes temporelles tendent presque sûrement (par rapport à la loi invariante) vers l'espérance de f, c'est-à-dire vers sa moyenne

spatiale : c'est une hypothèse très vraisemblable car la complexité du phénomène implique que le flot va visiter tous les états possibles sans privilégier aucun d'entre eux. Elle n'est cependant pas démontrée à l'heure actuelle.

L'objet de ce chapitre est de décrire la contribution du mathématicien Birkhoff au sujet : il a montré que l'hypothèse ergodique est vérifiée si l'on peut montrer que la mesure invariante est ergodique c'est-à-dire si les seuls ensembles invariants sont de probabilité 0 ou 1. Naturellement cela ne fait que déplacer le problème pour le physicien, mais ce théorème s'est avéré très fructueux en mathématiques. Nous nous en servirons à plusieurs reprises dans la suite.

Nous présentons tout d'abord le cadre axiomatique du théorème dont nous ne donnerons que la version discrète : un espace X compact muni d'une mesure de probabilité qui soit invariante par rapport à une transformation continue T. Dans le cas physique que nous venons de décrire, on peut penser à T comme à l'application qui à tout état du système associe l'état après une seconde.

Au bout du compte, la théorie ergodique apparaît comme l'étude des actions de groupe (ou de semi-groupes) sur un espace compact. Dans l'exemple présenté, le groupe est $\mathbb{R}$, représentant le temps. Dans la suite, nous verrons d'autres exemples où ce n'est pas le temps qui agira mais $\mathbb{Z}^n$ qui représentera un groupe de translations dans le cas d'un modèle de gaz en réseau.

2. Transformations préservant la mesure

Nous oublions provisoirement l'arrière plan physique pour nous consacrer à un exposé axiomatique de théorie ergodique. Le changement risque de paraître brutal mais c'est la loi du genre et la rigueur l'exige !

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilités ; on dit d'une application T de X dans lui-même qu'elle préserve la mesure si T est mesurable et si, pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\mu\big(T^{-1}(A)\big) = \mu(A).$$

L'objet de la théorie ergodique est l'étude des espaces de probabilité munis d'une transformation préservant la mesure.

Avant de donner des exemples, voyons un critère pratique pour vérifier qu'une transformation préserve la mesure :

Théorème 1. — *Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace probabilisé et $\mathcal{C}$ une algèbre de Boole qui engendre $\mathcal{B}$; une transformation T de X préserve la mesure si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{C}$, on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Preuve. — La condition est évidemment nécessaire ; pour voir qu'elle est suffisante, on appelle $\mathcal{T}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. On a $\mathcal{T} \supset \mathcal{C}$ et le fait que c'est une classe monotone. C'est donc tout entier par le théorème sur les classes monotones. □

Exemples

1) Soit G un groupe compact ; on sait qu'il existe sur G une unique mesure de probabilité (mesure borélienne) qui soit invariante par translations à gauche (*i.e.* telle