# SPECTRAL THEORY, CONTROL AND INVERSE PROBLEMS

(CIRM SMF School, 21–25/11/2022)

Lucie Baudouin, Franck Boyer, Jérémi Dardé,
Sylvain Ervedoza and Julien Royer (eds.)

Panoramas et Synthèses

Numéro 67 2026

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

***Comité de rédaction***

Samuel BOISSIÈRE
Fabienne CASTELL
Indira CHATTERJI
Élise GOUJARD
Anne-Sophie de SUZZONI
Diego IZQUIERDO
Claire LACOUR
Quentin MÉRIGOT
Sergio SIMONELLA
Todor TSANKOV
Anne MOREAU (dir.)

***Diffusion***

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`christian.smf@cirm-math.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

***Tarifs***

*Vente au numéro :* 59 € ($ 89)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat***

*Panoramas et Synthèses*
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`panoramas@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2026*

*Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.*

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-37905-232-3

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 67

# SPECTRAL THEORY, CONTROL AND INVERSE PROBLEMS (CIRM SMF School, 21–25/11/2022)

Lucie Baudouin, Franck Boyer, Jérémi Dardé, Sylvain Ervedoza and Julien Royer (eds.)

Société mathématique de France

*Lucie Baudouin*
LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France

*Franck Boyer*
Univ. Toulouse, INUC, UT2J, INSA Toulouse, TSE, CNRS, IMT, Toulouse, France

*Jérémi Dardé*
Univ. Toulouse, INUC, UT2J, INSA Toulouse, TSE, CNRS, IMT, Toulouse, France

*Sylvain Ervedoza*
Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, Talence, France

*Julien Royer*
Univ. Toulouse, INUC, UT2J, INSA Toulouse, TSE, CNRS, IMT, Toulouse, France

***Classification mathématique par sujets.* (2020) —** 35A02, 35B60, 35J10, 35L05, 35L20, 35P20, 35R30, 35S05, 47A10, 47A55, 81Q10.

***Keywords and phrases.* —** Partial differential equations, spectral shift functions, spectral analysis, Weyl asymptotics, magnetic Hamiltonian, spectral theory, periodic operators, Floquet Bloch transform, band spectrum, unique continuation, Hörmander theorem under pseudoconvexity conditions, Tataru theorem for wave operators with time-independent coefficients, inverse problems, wave equation, boundary control method, geometric optics.

***Mots-clés et phrases.* —** Équations aux dérivées partielles, fonctions de décalage spectral, analyse spectrale, asymptotiques de Weyl, hamiltonien magnétique, théorie spectrale, opérateurs périodiques, transformée de Floquet Bloch, spectre en bandes, prolongement unique, théorème de Hörmander sous condition de pseudo-convexité, théorème de Tataru pour des coefficients indépendants du temps, problèmes inverses, équations des ondes, méthode du contrôle au bord, optique géométrique.

# TABLE DES MATIÈRES

**Introduction** . . . . . ix

Vincent Bruneau — *The Spectral Shift Function for Quantum Hamiltonians* . . . . . 1

1. Motivations and history . . . . . 1
2. Definition and representation of the SSF . . . . . 12
3. Resonances and SSF . . . . . 27
4. Weyl asymptotics and semi-classical limits . . . . . 32
5. Magnetic hamiltonians . . . . . 38
6. Inverse problems . . . . . 48

Acknowledgements . . . . . 48
References . . . . . 49

Sonia Fliss — *Spectral theory for periodic operators* . . . . . 57

1. Mathematical tools . . . . . 59
2. Band spectrum of periodic operators . . . . . 72
3. Conditions ensuring the existence of a gap . . . . . 87
4. Spectrum of "perturbed" periodic operators . . . . . 91

References . . . . . 97

Camille Laurent & Matthieu Léautaud — *Lectures on unique continuation for waves* . . . . . 103

1. Introduction and generalities . . . . . 104
2. Unique continuation under a convexity condition . . . . . 117
3. Unique continuation for time-independent wave operators . . . . . 140
4. Notes . . . . . 162

References . . . . . 168

Medet Nursultanov & Lauri Oksanen — *Introduction to inverse problems for hyperbolic PDEs* . . . . . 175

1. Introduction . . . . . 175
2. Boundary Control method in $1+1$ dimensions . . . . . 176

3. Boundary Control method on a Riemannian manifold . . . . . 186
4. Geometric optics . . . . . 192
5. Solving an inverse problem using geometric optics . . . . . 195
References . . . . . 196

# RÉSUMÉS DES ARTICLES

*La fonction de décalage spectral pour les hamiltoniens quantiques*

Vincent Bruneau . . . . . 1

La fonction de décalage spectral (SSF), initialement introduite par I.M. Lifshits et M.G. Krein, permet une analyse spectrale des perturbations de classe trace (ou relativement à trace) de certains opérateurs de référence. La SSF coïncide avec la différence des fonctions de comptage des valeurs propres lorsque les spectres sont discrets. Sur un spectre continu, elle fournit une grandeur spectrale qui permet de comparer un opérateur perturbé auto-adjoint à l'opérateur de référence, et peut souvent être mise en relation avec des grandeurs physiques telles que la *phase de diffusion* et le *temps de retard moyen*.

Après l'introduction de la SSF et l'énoncé de propriétés générales, nous l'étudierons pour des perturbations de l'hamiltonien quantique électrique et magnétique. Nous nous intéresserons particulièrement aux propriétés asymptotiques et au lien avec les résonances.

*Théorie spectrale des opérateurs périodiques*

Sonia Fliss . . . . . 57

Ces notes de cours présentent les principaux résultats de la théorie spectrale des opérateurs périodiques, avec ou sans perturbations. Après avoir rappelé la transformation de Floquet-Bloch et les principaux résultats de la théorie spectrale, nous démontrons que les opérateurs périodiques possèdent un spectre en bandes pouvant comporter des bandes interdites. Nous nous intéresserons en particulier à l'opérateur discret dit SSH et aux opérateurs différentiels unidimensionnels pour lesquels des calculs explicites peuvent être effectués. Nous montrerons ensuite quelques techniques permettant de créer des bandes interdites en jouant sur les coefficients. Enfin, nous étudierons l'effet des perturbations des coefficients périodiques sur le spectre de l'opérateur sous-jacent. En particulier, lorsque la perturbation est localisée, un spectre discret peut apparaître. Ce cours a été donnés lors de l'École de recherche « Théorie spectrale, contrôle et problèmes inverses » dans le cadre du programme CIRM-SMF.

*Cours sur le prolongement unique pour les ondes*

Camille Laurent & Matthieu Léautaud . . . . . 103

L'objectif de ces notes est de présenter la question du prolongement unique pour l'opérateur des ondes, ainsi que certaines de ses applications. La question générale est la suivante : une solution d'une équation d'onde dans un domaine est-elle nulle partout si l'on sait qu'elle s'annule dans un sous-domaine ? Nous énonçons et démontrons deux des principaux résultats dans ce domaine.

Nous donnons tout d'abord une preuve du théorème local classique de Hörmander dans ce contexte, qui s'applique sous une condition de pseudo-convexité.

Nous nous spécialisons ensuite au cas des opérateurs d'onde à coefficients indépendants du temps et prouvons le théorème de Tataru : le prolongement unique local s'applique à travers toute hypersurface non caractéristique. Ce résultat local implique un énoncé de prolongement unique global qui peut être interprété comme la réciproque de la vitesse finie de propagation. Nous donnons enfin une application au contrôle approché et présentons, sans démonstration, quelques estimées quantitatives associées.

*Introduction aux problèmes inverses pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques*

Medet Nursultanov & Lauri Oksanen . . . . . 175

Ces notes de cours ont été rédigées pour l'école de recherche SMF-CIRM «Théorie spectrale, contrôle et problèmes inverses», novembre 2022. Il existe deux approches principales pour résoudre les problèmes inverses de détermination de coefficients pour les équations d'ondes : la méthode du contrôle au bord et une approche fondée sur l'optique géométrique. Ces notes se concentrent sur la méthode du contrôle au bord, mais nous allons aussi regarder brièvement l'optique géométrique.

# ABSTRACTS

*The Spectral Shift Function for Quantum Hamiltonians*

VINCENT BRUNEAU ..... 1

The Spectral Shift Function (SSF), initially introduced by I.M. Lifshits and M.G. Krein, allows a spectral analysis of trace class (or relatively trace class) perturbations of some reference operators. The SSF coincides with the difference of counting functions of eigenvalues when the spectrums are discrete. On the continuous spectrum, it provides a spectral quantity which makes it possible to compare a self-adjoint perturbed operator to the reference one, and can often be related to physical quantities like the *Scattering Phase* and the *Average Time Delay*.

After the introduction of the SSF and the statement of general properties, we will study it for perturbations of electrical and magnetic quantum Hamiltonian. We will be particularly interested in asymptotic properties and connection with resonances.

*Spectral theory for periodic operators*

SONIA FLISS ..... 57

These lecture notes present the main results on the spectral theory of periodic operators with or without perturbations. After recalling the Floquet Bloch transform and the main results of spectral theory, we prove that periodic operators have a band spectrum with possibly band gaps. We will focus in particular on the so-called SSH discrete operator and 1D differential operators for which explicit computations can be done. We will then show few techniques to create gaps by playing with the coefficients. Finally, we will study the effect of perturbations of the periodic coefficients on the spectrum of the underlying operator. In particular, when the perturbation is localized, some discrete spectrum can appear. This lecture was given during the Research School "Théorie Spectrale, Contrôle et Problèmes inverses" in the framework of the CIRM-SMF Program.

*Lectures on unique continuation for waves*

Camille Laurent & Matthieu Léautaud . . . . . 103

These notes are intended as an introduction to the question of unique continuation for the wave operator, and some of its applications. The general question is the following: is a solution to a wave equation in a domain identically zero if it is known to vanish in a subdomain? We state and prove two of the main results in the field.

We first give a proof of the classical local Hörmander theorem in this context that holds under a pseudoconvexity condition.

We then specialize to the case of wave operators with time-independent coefficients and prove the Tataru theorem: local unique continuation holds across any non-characteristic hypersurface. This local result implies a global unique continuation statement that can be interpreted as a converse to finite propagation speed.

We finally give an application to approximate controllability, and present without proofs some associated quantitative estimates.

*Introduction to inverse problems for hyperbolic PDEs*

Medet Nursultanov & Lauri Oksanen . . . . . 175

These lecture notes were written for CIRM SMF School "Spectral Theory, Control and Inverse Problems," November 2022. There are two main approaches to solve inverse coefficient determination problems for wave equations: the Boundary Control method and an approach based on geometric optics. These notes focus on the Boundary Control method, but we will have a brief look at the geometric optics as well.

# INTRODUCTION

The aim of this volume is to gather the notes of the four lectures given within the CIRM SMF school entitled "Spectral Theory, Control and Inverse problems," which took place at the CIRM (Marseille) from November 21 to 25, 2022 (see the webpage `https://conferences.cirm-math.fr/2740.html`).

The goal of this school was to address several topics in spectral theory, control and inverse problems for partial differential equations. These interconnected areas have all recently undergone intense developments in various directions. This event aimed at presenting an account of these developments, at a doctorate level, and to foster new directions of research.

Spectral theory, control and inverse problems for partial differential equations, although generally studied separately, are in fact intimately linked. Let us quote for instance the inverse scattering transform, which allows to solve several non-linear PDE (and in particular the Korteweg de Vries equations, among many others) through the relation with an inverse spectral problem [(1)] Similarly, many control results for partial differential equations can be reduced to the study of certain spectral properties: among the most spectacular are the spectral inequality of Lebeau-Robbiano-Jerison [(2)], used as a key to establish the controllability at zero of the heat equation, or the equivalence between the controllability of conservative systems and estimates of appropriate resolvents [(3)]. Similarly, many techniques are common to inverse problems and control, such as Carleman's inequalities, also related to Agmon's estimates used in spectral theory. We may also quote the boundary control method which is using control theory to solve inverse problems [(4)], or the famous question asked by M. Kac on the relation

---

[(1)] See C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura. "Method for solving the Korteweg de Vries equation," *Phys. Rev. Letters*, **19**, 1095–1097, 1967 and M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur, "The inverse scattering transform-Fourier analysis for non-linear problems," *Studies in Applied Mathematics*, **53**, `doi:10.1002/sapm1974534249`.

[(2)] See G. Lebeau and L. Robbiano. "Contrôle exact de l'équation de la chaleur," *Comm. Partial Differential Equations*, **20**, 335–356, 1995 and D. Jerison and G. Lebeau. "Nodal sets of sums of eigenfunctions," in *Harmonic analysis and partial differential equations* (Chicago, IL, 1996), Chicago Lectures in Math., 223-239. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[(3)] See for instance N. Burq and M. Zworski. "Geometric control in the presence of a black box," *J. Amer. Math. Soc.*, **17**, 443–471, 2004.

[(4)] See M. Belishev, M. I., "An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation," *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **297**, 524–527, 1987.

between the spectral properties of the Laplace operator in a bounded domain $\Omega$ and its geometry, which triggers a lot of investigations, *Can one hear the shape of a drum?* [5].

The event was organized around four main lectures, of 5 hours each, covering specific topics in spectral theory, control and/or inverse problems.

Vincent Bruneau (IMB & Université de Bordeaux) delivered a lecture on the spectral shift function, which is used to precisely describe the spectrum of an operator in the presence of continuous spectrum. Sonia Fliss (Poems & ENSTA) also addressed spectral theory issues, but with another perspective linked to applications to propagation in wave guides and homogenization issues in the presence of a perturbation or of a boundary, also in connection with inverse problems. Matthieu Léautaud (LMO & Université Paris Saclay) presented unique continuation results for the waves and their applications to quantum tunneling and approximate controllability. Lauri Oksanen (University of Helsinki, Finland) focused on the inverse problem of determining the speed of waves from the Dirichlet to Neumann map, using the boundary control method, closely related to approximate controllability, or a Geometric Optics based approach.

We believe that these lecture notes can benefit to a wide audience in the mathematical community, and we thank the collection *Panoramas et Synthèses* for agreeing to publish them within the present volume.

Before concluding this short introduction, let us mention that this CIRM SMF school gathered 57 participants, mainly young researchers (PhD students and postdocs), many of whom presented their work in poster sessions.

The atmosphere was very good and stimulating, and we would like to address special thanks to the staff of CIRM for their hospitality.

This event could not have been organized without the strong support of the Société Mathématique de France (SMF), the European Mathematical Society (EMS), the Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB), the Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), the International Center of Mathematics and Computer Science in Toulouse (LabEx CIMI, grant ANR-11-LABX-0040), the GDR CNRS 3274 DynQua Quantum Dynamics, the IUF grant of Franck Boyer, the ANR project TRECOS (grant ANR-20-CE40-0009). We strongly thank them for their support.

Finally, we would like to kindly thank Raphaël Danchin, who first mentioned to us the possibility of organizing this event, after we had to cancel a similar event in Toulouse (the summer school "Summer Walk In Toulouse—Spectral Theory, Control and Inverse problems" and planned in June 2020, see the webpage `https://summer-walk.sciencesconf.org/`) due to the sanitary crisis.

[5] See M. Kac, "Can one hear the shape of a drum?," *The American Mathematical Monthly*, **73**, No. 4, pp. 1-23, 1966.