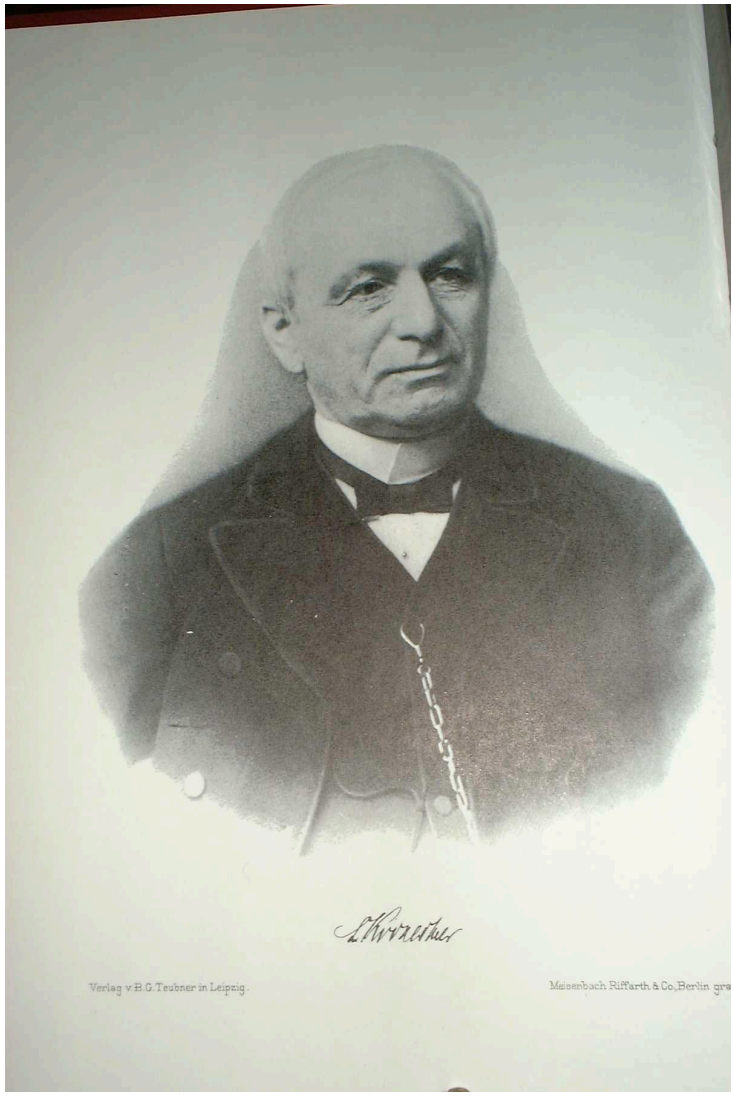


Leopold Kronecker
1823–1891

Revue d'histoire des mathématiques,
7 (2001), p. 207–275.

TEXTES & DOCUMENTS

'SUR LE CONCEPT DE NOMBRE EN MATHÉMATIQUE' COURS INÉDIT DE LEOPOLD KRONECKER À BERLIN (1891)

Retranscrit et commenté par
Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher (*)

Résumé. — Le texte que nous présentons est le dernier cours du mathématicien berlinois Leopold Kronecker (1823–1891). Ce cours, publié ici pour la première fois, nous donne des informations importantes sur la philosophie des mathématiques de Kronecker, en particulier sur sa conception du nombre. Il précise, en outre, la position que Kronecker occupa dans le mouvement d''arithmétisation' des mathématiques et permet de mieux comprendre comment, et pourquoi, il se situe à contre-courant de la tendance dominante (animée notamment par Weierstrass, Cantor et Dedekind). Kronecker définit le concept de nombre de façon purement mathématique et vise à intégrer l'algèbre et l'analyse dans une arithmétique telle qu' il l'entend. Certaines de ses positions apparaissent aujourd'hui comme des anticipations de principes constructivistes ou intuitionnistes du XX^{e} siècle.

Abstract. — 'on the concept of number in mathematics' : Leopold Kronecker's 1891 Berlin lectures. — The text published here is the last lecture course, on the notion of number in mathematics, taught by the Berlin mathematician Leopold Kronecker (1823–1891). These lectures, published here for the first time, give interesting insights into Kronecker's philosophy of mathematics and in particular into his concept of number. They clarify Kronecker's position within the movement of 'arithmetization' and allow, in particular, for a better understanding of why and how Kronecker opposed the dominant viewpoint within this movement (held by Weierstrass, Cantor, Dedekind, and others). Kronecker introduced whole numbers mathematically, and proposed to integrate all of algebra and analysis into arithmetic. Today certain positions held by Kronecker may be seen as anticipating constructivist or intuitionist principles of the twentieth century.

(*) Texte reçu le 25 février 2002.
J. Boniface, Équipe GRIMM, Université de Toulouse 2, Département de Mathématiques-Informatique, 5 Allée Antonio Machado, 31058 Toulouse Cedex (France). Courrier électronique : boniface@univ-tlse2.fr.
N. Schappacher, Fachbereich 4 – Mathematik, AG2 Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt (Allemagne). Courrier électronique : schappacher@mathematik.tu-darmstadt.de.

Mots clés : nombres, arithmétique, arithmétisation, philosophie des mathématiques, Kronecker.
Classification AMS : 00A30, 01A55, 03A05.

© société mathématique de france, 2001

INTRODUCTION

Le document qui suit est la retranscription, augmentée de notes explicatives, du cours que Kronecker prononça à l'Université de Berlin, au second semestre (*Sommersemester*) de l'année universitaire 1890–1891, sous l'intitulé : « Sur le concept de nombre en mathématique ». L'original est un manuscrit établi par plusieurs personnes à partir de notes sténographiques : on ne connaît ni l'auteur des notes, ni ceux du manuscrit qui en a été tiré. Ce cours, qui est le dernier de Kronecker (décédé le 29 décembre 1891), est intéressant à plus d'un titre. D'abord il nous donne une idée vivante de la manière dont Kronecker professait et de son rapport à ses contemporains ainsi qu'à ses maîtres. Ensuite et surtout ce « chant du cygne » constitue une importante source d'information directe sur les conceptions de Kronecker concernant les fondements des mathématiques, notamment la notion de nombre. Kronecker [1887] avait déjà rendu publique sa conception du nombre, ainsi que son programme d'arithmétisation des mathématiques pures. C'est dans la préface programmatique de cet article « Sur le concept de nombre » que selon J. Molk [1909, p. 158, note 78], élève de Kronecker, le verbe 'arithmétiser' (*arithmetisieren*), du moins dans son emploi transitif, apparaît pour la première fois dans la littérature mathématique. Dans le cours présenté ici, Kronecker reprend les thèses de l'article de 1887, tout en y ajoutant des remarques plus générales sur sa philosophie des mathématiques et des précisions concernant les sources de ses conceptions et de ses méthodes. Le ton employé dans le cours est plus libre que dans l'article : le contenu y est émaillé de remarques et d'anecdotes.

Les successeurs immédiats de Kronecker furent très loin de donner unanimement à son programme d'arithmétisation la place qu'il méritait. Par exemple, dans le discours qu'il prononça à l'occasion du 80^{e} anniversaire de Weierstrass, Felix Klein reprenait la notion d'arithmétisation introduite par Kronecker en englobant sous ce terme des tendances aussi opposées que la « rigueur weierstrassienne » (*die Weierstrass'sche Strenge*) dans les fondements de l'analyse et l'axiomatique de Peano [Klein 1895, p. 233]. Pire encore, deux ans après le disours de Klein, David Hilbert, dans la préface de son célèbre *Zahlbericht* [Hilbert 1897], dressait le vaste tableau du développement des mathématiques pures, « placées sous le signe du nombre », sans même citer le programme d'arithmétisation de

Kronecker. À peu près au même moment, Alfred Pringsheim citait, dans l'*Enzyklopädie*, le programme de Kronecker comme une simple variante de l'arithmétisation des nombres irrationnels, à côté des définitions de ces nombres par Weierstrass, Cantor et Dedekind [Pringsheim 1898, p. 58, § 8]. Le compte rendu de Pringsheim critiquait en outre le programme de Kronecker sans prendre en compte sa motivation constructiviste. La version française de ce chapitre de l'*Encyclopédie*, rédigé par Molk, bien qu'elle accordât au point de vue de Kronecker plus d'espace, de détails et de sympathie, concluait tout de même par une note sceptique, assez proche de la critique de Pringsheim [Molk 1909, p. 163][1]. Ainsi à la fin du XIX^e^ siècle, ce programme était soit carrément passé sous silence, soit privé de son fondement philosophique.

À l'opposé des comptes rendus très globalisants sur l''arithmétisation', le cours de Kronecker reproduit ici permet de comprendre pour quelles raisons et de quelle manière Kronecker voulait 'arithmétiser' les mathématiques pures. Les raisons de cette arithmétisation et la manière dont elle est accomplie se manifestent dans les thèses 'philosophiques' de Kronecker et dans l'énoncé d'un principe constructiviste qui place Kronecker en opposition radicale à tous les auteurs de l'arithmétisation au sens précédent. Ce principe affirme que « les définitions des sciences empiriques, c'est-à-dire des mathématiques et des sciences de la nature [...] ne doivent pas seulement être non contradictoires, mais [qu'] elles doivent être puisées dans l'expérience. Et, ce qui est encore plus essentiel, [qu'] elles doivent comporter en elles-mêmes le critère selon lequel on peut décider, dans chaque cas particulier, si la notion donnée est, ou non, à subsumer sous cette définition » (p. 28)[2]. Kronecker souligne une conséquence de ce principe, qui sera ensuite au centre des thèses intuitionnistes : « J'aimerais ajouter que le théorème de contradiction est à employer seulement avec la plus grande prudence et que les déductions par l'absurde ne démontrent quelque chose que si elles peuvent immédiatement être transformées en conséquences positives » (p. 29).

Kronecker expose ses principales idées 'philosophiques' sur les mathématiques dans les quatre premières leçons de ce cours et les résume en

[1] Pour Molk, voir par exemple [Hermite 1884].

[2] La pagination indiquée est celle du manuscrit, reproduite en marge du texte publié plus loin.

quatre thèses, énoncées dans la leçon 4. La première thèse : « la discipline mathématique ne tolère aucun esprit de système » (p. 17), justifie la forme même du cours, suite d'aphorismes plutôt que présentation systématique. La deuxième thèse permet de comprendre la conception kroneckerienne du nombre. Elle affirme que « la mathématique est à traiter comme une science de la nature, car ses objets sont aussi réels que ceux de ses sciences-sœurs » (p. 18). Cette conception des mathématiques, notamment de l'arithmétique, était moins surprenante en 1891 qu'elle ne l'est aujourd'hui. Et Kronecker est absolument conséquent en n'acceptant, comme objets de cette science, que les seuls nombres naturels (ordinaux), qui constituent selon lui *le* donné immédiat. Rappelons cependant que cette conception 'dogmatique' du nombre entier était loin d'être partagée par tous les mathématiciens de l'époque ; Heine ou Hankel, par exemple, adoptaient une position plus formaliste et considéraient les nombres comme simples signes ; *a contrario*, le courant logiciste auquel s'oppose explicitement Kronecker, initié par G. Frege, cherchait à fonder le nombre dans la logique.

Les troisième et quatrième thèses citées par Kronecker sont au cœur même de son programme d'arithmétisation. Elles énoncent la nécessité d'éviter tout empiètement d'une discipline sur une autre (3^{e} thèse) et d'utiliser, dans chaque discipline, une méthode conforme à la matière étudiée (4^{e} thèse). Le respect de cette nécessaire séparation des disciplines est évoqué dans le titre même du cours, qui indique bien qu'il s'agit, pour Kronecker, de rechercher les fondements de la mathématique *dans* la mathématique elle-même et non dans une autre discipline. Ce faisant, Kronecker évite deux écueils. Le premier, qu'il considère comme une maladie infantile dont ont souffert les sciences de la nature et la mathématique, au début du XIX^{e} siècle, par manque de confiance dans leurs méthodes, consiste en un empiètement de la philosophie sur ces sciences. Sont accusés de cet empiètement Hegel et Schelling. Le second écueil est au contraire une maladie de vieillesse : il consiste à penser que la mathématique peut dominer tout le réel, que tout peut être mathématisé. Kronecker vise ici explicitement Peirce et Peano, c'est-à-dire un formalisme qu'il trouve excessif.

La séparation des différentes disciplines doit aussi, selon Kronecker, s'appliquer à l'intérieur de la mathématique. Kronecker y distingue trois