Astérisque

EMMANUEL GIROUX

Topologie de contact en dimension 3 [autour des travaux de Yakov Eliashberg]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 760, p. 7-33
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__7_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire Bourbaki
45ème année, 1992-93, n° 760

novembre 1992

TOPOLOGIE DE CONTACT EN DIMENSION 3

[autour des travaux de Yakov Eliashberg]

par **Emmanuel GIROUX**

0. Introduction.

A. Structures de contact, définition et exemples.

Une *structure de contact* sur une variété lisse de dimension 3 [(1)] est un champ C^∞ de plans tangents qui est complètement non-intégrable. Précisément, tout champ de plans tangents est (localement [(2)]) le noyau d'une 1-forme α, "conformément unique", appelée équation (de Pfaff) du champ ; la condition infinitésimale qu'on impose, dictée par le critère d'intégrabilité de Frobenius [Ar1] et indépendante du choix de α, est que la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule en aucun point : une 1-forme vérifiant cette condition est appelée *forme de contact.* Les structures de contact forment ainsi un ouvert de l'espace des champs de plans pour la topologie C^1 fine.

La multiplication de α par une fonction f partout non nulle change $\alpha \wedge d\alpha$ en $f^2\,\alpha \wedge d\alpha$, de sorte qu'une structure de contact oriente la variété sous-jacente. Quand celle-ci est orientée a priori, les structures de contact qu'elle porte ont donc un *signe.*

On dit souvent qu'une structure de contact est un "champ de plans tordu". De fait, soit ξ un champ de plans (local) et X un champ de vecteurs non singulier contenu dans ξ. Dans des coordonnées adaptées (x, y, t) voisines de $(0, 0, 0)$, X s'écrit $\partial/\partial t$ et ξ a une équation du type $dy = p(x, y, t)\,dx$ (avec, si on veut, $p(0, 0, 0) = 0$). Alors ξ est une structure de contact si et seulement si $\partial p/\partial t$ ne s'annule pas, ce qui signifie géométriquement que, lorsqu'on suit le flot de $\partial/\partial t$, on voit les plans de ξ tourner dans les coordonnées (x, y) (le sens de rotation donne le signe de la structure). De là le théorème de Darboux : *une structure de contact n'a pas d'invariants locaux* puisqu'elle est toujours localement définie par $dy = p\,dx$ dans des coordonnées (x, y, p) convenables.

Exemples 0.1.

a) Sur $\mathbf{R}^3$ muni de coordonnées cylindriques (r, θ, z), une 1-forme d'expression $f(r)\,dz - g(r)\,d\theta$ (où g s'annule au second ordre en 0) est une forme de contact si $f\,(dg/dr) - g\,(df/dr)$ ne s'annule pas, ce qui signifie que la courbe plane

$r \mapsto (f(r), g(r))$ tourne "sans arrêt" autour de l'origine. On notera ζ_0 et ζ_1 les structures de ce type définies par :

$$\zeta_0 \ : \ dz - r^2\, d\theta = 0, \qquad\qquad \zeta_1 \ : \ \cos r\, dz - r \sin r\, d\theta = 0\,.$$

Toutes ces structures sont invariantes par translation verticale et donnent donc des structures de contact sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Elles sont de plus tangentes aux rayons $(\theta, z) =$ cste. Le long de ces rayons, ζ_0 pivote d'un quart de tour entre $r = 0$ et $r = \infty$ tandis que ζ_1 fait une infinité de tours.

b) Soit F une surface et $\pi \ : \ ST^\star F \to F$ le fibré des droites coorientées tangentes à F. La variété $ST^\star F$ porte une structure de contact naturelle ξ définie comme suit : un vecteur v tangent à $ST^\star F$ en (x, δ) (où x est un point de F et δ une droite tangente à F en x) appartient à ξ si le vecteur projeté $T_{(x,\delta)}\pi(v) \in TF$ est sur δ (la coorientation de δ donne celle de ξ). Si $F = \mathbf{R}^2$, x est donné par deux coordonnées (x_1, x_2) et δ est repérée par l'angle $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de sa normale directe avec l'axe des x_1 ; une équation de ξ est alors $\cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_2 = 0$.

c) Toute hypersurface réelle V d'une variété complexe de dimension 2 porte un champ de plans ξ naturel formé par les droites complexes tangentes à V. Quand V est orientée, on dit qu'elle est strictement pseudo-convexe si ξ est une structure de contact positive. C'est par exemple le cas pour la sphère unité de $\mathbf{C}^2$ orientée comme bord de la boule : ξ est la structure de contact usuelle sur $\mathbf{S}^3$ et sera notée ζ_0. Elle est définie, en coordonnées multipolaires $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ $(r_1^2 + r_2^2 = 1)$, par $r_1^2\, d\theta_1 + r_2^2\, d\theta_2 = 0$.

Notes.

(1) La géométrie de contact existe en toute dimension impaire, sur certains espaces, et est naturellement liée avec la physique et les géométries symplectique, riemannienne et analytique complexe [Ar3, Ar4, BFG, Bl]. Mais si ses aspects locaux ou, plus généralement, flexibles sont assez bien compris [Ar2, Au, Gra, Gro3, McD1, Ru], les contours de sa rigidité globale, qu'on souhaite "dessiner" ici en dimension 3, restent mal connus en grande dimension : on ne dispose par exemple que de résultats très partiels d'existence sur les variétés fermées (voir [El7, El8, Gei, Gro2, Lu3, Me, Mul, We]).

(2) Par commodité, dans ce texte, les champs de plans sont tous coorientés, donc définis par des équations globales déterminées à multiplication près par des fonctions positives. De même, les variétés sont toutes orientées et leur bord éventuel est coorienté par la normale sortante. Les variétés complexes, symplectiques ou de contact, sont munies de leur orientation canonique. Enfin, tout hyperplan coorienté d'un espace orienté est orienté suivant la règle : "la normale directe d'abord". Ainsi, une structure de contact ξ coorientée par une équation α est orientée par $d\alpha|_\xi$.

B. Courbes legendriennes, courbes transversales, feuilletage caractéristique des surfaces.

Si une structure de contact n'admet pas de surfaces intégrales, elle possède en revanche beaucoup de *courbes legendriennes*, c'est-à-dire de courbes tangentes en chaque point au plan de contact. En fait, on peut rendre legendrienne toute courbe en la bougeant (à extrémités fixes) par une isotopie C^0-petite.

Exemple 0.2. Soit ζ_0' la structure de contact sur $\mathbf{R}^3$ définie en coordonnées cartésiennes (x, y, p) par $dy = p\,dx$. Une courbe $t \mapsto (x(t), y(t), p(t))$ est legendrienne si, à tout instant t, $p(t)$ est la pente dy/dx de la courbe projetée $t \mapsto (x(t), y(t))$. Cette courbe projetée, qui détermine entièrement la courbe legendrienne, n'a alors aucune tangente verticale mais présente des rebroussements : on l'appelle *front d'onde* [Ar2]. Maintenant, étant donné une courbe quelconque dans $\mathbf{R}^3$, on peut approcher C^0-uniformément sa projection horizontale par un front d'onde dont la pente approche simultanément la coordonnée verticale (cf. figure 1).

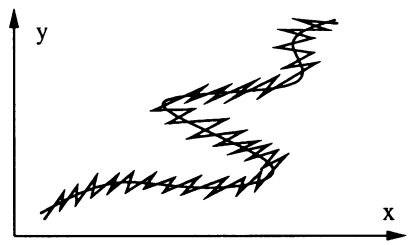

Figure 1

L'argument utilisé en **0.A** pour le théorème de Darboux permet de modéliser n'importe quelle structure de contact ξ près d'une courbe legendrienne C : elle a pour équation $dy = p\,dx$ où $C = \{(x, 0, 0)\}$. On voit alors qu'en poussant légèrement C suivant le champ de vecteurs $\partial/\partial p$ (normal à C dans ξ), on obtient des courbes $C_\varepsilon = \{(x, 0, \varepsilon)\}$ qui sont *transversales* à ξ (positivement ou négativement suivant le signe de ε). Il existe donc également beaucoup de courbes transversales et, en particulier, on peut joindre deux points quelconques par une transversale. Enfin, près d'une courbe transversale, on peut (encore avec le même argument) modéliser la structure ξ par l'équation $dz = r^2\,d\theta$, où z paramètre la courbe et (r, θ) sont des coordonnées polaires normales.

L'outil géométrique essentiel pour étudier une variété de contact (V, ξ) est fourni par les courbes legendriennes obtenues comme suit : sur toute surface F contenue dans V, la structure ξ trace un champ de droites singulier, noyau de la 1-forme qu'induit sur F n'importe quelle équation de ξ. Ses singularités sont les points, génériquement isolés, où F est tangente à ξ et ses courbes intégrales régulières sont legendriennes. Ce feuilletage, noté F_ξ, est appelé *feuilletage caractéristique* de F. De

fait, il détermine entièrement, au signe près, le germe de ξ le long de F. Ainsi, si F sépare V, deux structures de contact données de part et d'autre, dont les orientations coïncident le long de F et qui tracent sur F le même feuilletage, se recollent (après lissage) pour former une structure de contact sur V.

La non-intégrabilité de ξ ne confère aux feuilletages caractéristiques qu'une seule propriété spécifique, qui porte sur les singularités : ce sont des singularités de champs de vecteurs à divergence non nulle (voir par exemple [Gi1]). Par convention, si F est orientée par une 2-forme ω et si α_0 est la 1-forme induite par une équation α de ξ, on oriente le feuilletage F_ξ par le champ de vecteurs Y dont le produit intérieur avec ω est égal à α_0. Ce choix (contraire aux conventions de **0.A**) a le mérite suivant : en une singularité, $d\alpha|_\xi = d\alpha_0 = \mathrm{div}_\omega Y \,.\, \omega$; ainsi, la divergence de Y est positive ou négative suivant que les orientations de F et ξ coïncident ou non. Génériquement (pour un nombre quelconque de paramètres), il n'existe que trois types topologiques de singularités à divergence non nulle [Ar5] : les foyers ou nœuds (sources ou puits selon leur signe), les selles ou cols et les nœuds-selles. En référence au contexte analytique complexe (cf. exemple **0.1 c**), ces singularités sont souvent aussi appelées points (complexes) respectivement elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Exemples 0.3.

a) Dans $\mathbf{R}^3$, une sphère strictement convexe S de révolution autour de l'axe des z n'est tangente aux structures ζ_0 et ζ_1 (cf. exemple **0.1 a**) qu'en ses pôles. Pour ζ_0, le feuilletage caractéristique de S est toujours formé de courbes qui vont d'un pôle à l'autre. Mais pour ζ_1, le feuilletage caractéristique de S présente des orbites fermées dès que S coupe le cylindre de rayon π autour de l'axe des z : ces orbites sont précisément les cercles horizontaux de rayons $k\pi$ contenus dans S, $k = 1, 2, \ldots$ (la figure 2 représente le feuilletage d'une sphère contenue dans un cylindre de rayon inférieur à $3\pi/2$).

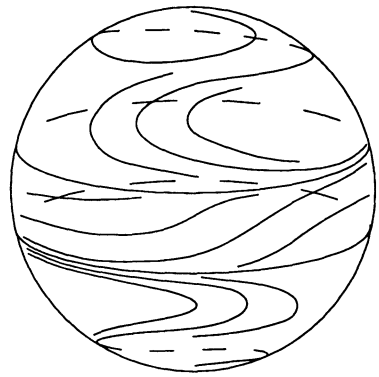

Figure 2

b) Soit F une surface de $\mathbf{R}^3$ définie par une équation régulière $f(x,y,p)=0$. Les courbes du feuilletage caractéristique de F pour ζ_0' : $dy = p\,dx$ sont les courbes intégrales de l'équation différentielle implicite $f(x,y,dy/dx)=0$ (voir [Ar5, Dav]).

C. Le problème de classification des structures de contact.

Deux structures de contact sur une variété V sont dites *isomorphes* (resp. *isotopes*) s'il existe un difféomorphisme de V (resp. un difféomorphisme de V isotope à l'identité) qui envoie l'une sur l'autre. Par exemple, sur $\mathbf{R}^3$, les structures ζ_0 : $dz = r^2\,d\theta$ et ζ_0' : $dy = p\,dx$ sont isomorphes via le changement de variables $p = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = 2y - px$.

Le problème de la classification des structures de contact à isomorphisme près sur une variété donnée, posé par S.S. Chern dans les années 60 [Ch], est encore largement ouvert. L'espoir d'une solution tient pour beaucoup à la propriété de C^1-stabilité démontrée par J.W. Gray en 1959 :

Théorème 0.4 [Gra]. *Sur une variété fermée (compacte sans bord), deux structures de contact sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes dans l'espace des structures de contact.*

Remarque. Sur une variété compacte à bord, on a le même énoncé avec des isotopies et des homotopies relatives au bord.

L'idée est donc d'étudier d'abord le type d'homotopie de l'espace des structures de contact, ou plutôt le type d'homotopie relatif de cet espace dans celui, "bien connu", de tous les champs de plans. Sur une variété *ouverte* (i.e. dont aucune composante connexe n'est fermée), M. Gromov a montré en 1969 l'équivalence homotopique de ces deux espaces [Gro1, Gro3], d'où l'existence de structures de contact dans chaque classe d'homotopie de champs de plans. Malheureusement, le théorème de Gray ne s'applique pas : deux structures de contact homotopes n'ont a priori qu'un lien géométrique de concordance [McD1]. Sur les variétés fermées, le premier résultat a été obtenu par R. Lutz et J. Martinet en 1971 :

Théorème 0.5 [Lu1, Lu2, Ma] (voir aussi [ThWi]). *Sur une variété fermée (orientée) de dimension 3, tout champ de plans est homotope à une structure de contact.*

Le problème suivant est de savoir si deux structures de contact qui sont homotopes comme champs de plans le sont comme structures de contact.

Exemple 0.6 : *Modification de Lutz* [Lu2]. Cette modification consiste à changer une structure ξ_0 donnée sur une variété V en la "vrillant" au voisinage d'une courbe transversale fermée. Près d'une telle courbe, dans un tube $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ muni de coordonnées cylindriques (r,θ,z), $r \le \varepsilon$, ξ_0 est modélisée par l'équation $dz = r^2\,d\theta$. On remplace ξ_0 dans ce tube par une structure d'équation $f(r)\,dz = g(r)\,d\theta$ (cf.

exemple **0.1 a**) où $r \mapsto (f(r), g(r))$ est une courbe dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ qui va de $(1,0)$ à $(1,\varepsilon^2)$ en faisant une fois le tour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La structure ξ_1 ainsi obtenue est homotope à ξ_0 via les champs de plans ξ_s, $s \in [0,1]$, définis sur le tube par :

$$(1-s)(dz - r^2\,d\theta) + s\,(f(r)\,dz - g(r)\,d\theta) + s(1-s)r(\varepsilon - r)\,dr = 0$$

et égaux à ξ_0 en dehors.

Enfin, il est important d'observer que, comme dans l'exemple **0.3 a**, la variété (V, ξ_1) contient des disques (par exemple d'équation $z = \varepsilon' r^2$ dans le tube) dont le feuilletage caractéristique présente des orbites fermées.

À ce point, il est commode de donner une définition introduite par Ya. Eliashberg en 1988 et 1991. Au-delà des mots, elle établit une dichotomie qui est l'une des idées les plus fécondes de la théorie.

Définition 0.7 [El1, El2]. Soit (V, ξ) une variété de contact. On dit que ξ est *vrillée (overtwisted)* s'il existe un disque Δ de dimension 2 plongé dans V dont le feuilletage caractéristique Δ_ξ présente une orbite régulière fermée avec une seule singularité à l'intérieur, au "centre". Quand on veut spécifier ce disque, on dit que ξ est *vrillée le long de* Δ. On dit que ξ est *tendue (tight)* lorsqu'elle n'est pas vrillée.

En utilisant cette terminologie, un des résultats fondamentaux démontrés par D. Bennequin en 1982 s'énonce comme suit :

Théorème 0.8 [Ben1, Dou]. *Sur* $\mathbf{R}^3$ *et* $\mathbf{S}^3$, *la structure de contact usuelle* ζ_0 *(cf. exemples* **0.1***) est tendue.*

Ainsi, toute modification de Lutz sur ζ_0 donne une structure non isomorphe à ζ_0. Si donc le travail de D. Bennequin constitue un pas décisif dans la compréhension des structures de contact, il semble paradoxalement briser l'espoir d'une classification en faisant craindre que la multiplication des modifications de Lutz le long d'entrelacs compliqués ne conduise à des structures de plus en plus exotiques. Dans ce contexte, le théorème démontré par Ya. Eliashberg en 1988 est une heureuse et providentielle surprise :

Théorème 0.9 [El1] (cf. **1.A**). *Sur une variété fermée, deux structures de contact vrillées sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes comme champs de plans.*

Il ne reste donc "plus qu'à" classifier les structures tendues...

D. Le monde des structures tendues.

Le premier fait établi par Ya. Eliashberg sur les structures tendues est qu'elles jouissent de propriétés communes remarquables, précisément celles découvertes par D. Bennequin dans la structure usuelle de $\mathbf{S}^3$. Il s'agit d'inégalités portant sur certains invariants des courbes legendriennes et transversales (cf. **2.D**), et qui imposent de fortes contraintes à la classe d'Euler des structures tendues vues comme fibrés vectoriels réels orientés de rang 2.

Théorème 0.10 [El2] (cf. **2.B**). *Pour une variété V fermée, les éléments du groupe $H^2(V, \mathbf{Z})$ qu'on peut réaliser comme classes d'Euler de structures tendues sur V sont en nombre fini.*

Outre cette rigidité homologique, Ya. Eliashberg montre que :

Théorème 0.11 [El2] (cf. **2.C**). *Sur $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{S}^3$, la structure usuelle ζ_0 est la seule structure tendue.*

En fait, Ya. Eliashberg montre qu'un champ de plans donné le long de $\partial\mathbf{D}^3$ s'étend en au plus une structure tendue sur $\mathbf{D}^3$ (cf. théorème **2.8**). Comme la classe d'Euler d'un champ ξ détermine la classe d'homotopie de ξ sur le 2-squelette de V, on obtient :

Théorème 0.12 [El2]. *Sur une variété fermée, les classes d'homotopie de champs de plans qui contiennent des structures tendues sont en nombre fini.*

Le problème est alors de trouver des exemples. L'outil le plus efficace pour ce faire vient de la théorie des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov [Gro2, El4]. Moyennant le critère qu'elle donne (cf. **3.B**) et un travail de D. Gabai, un résultat annoncé récemment par W. Thurston montre que :

Théorème 0.13 [Th3, Ga] (cf. **3.C**). *Toute variété fermée irréductible dont le second groupe d'homologie est non nul porte des structures de contact tendues.*

Quant au problème de classification, il reste largement ouvert. Ya. Eliashberg conjecture dans [El2] qu'une variété fermée ne porte qu'un nombre fini de structures tendues différentes. Ceci ne peut résulter immédiatement du théorème de finitude **0.12** car :

Théorème 0.14 [Gi2] (cf. **3.D**). *Il existe sur $\mathbf{T}^3$ des structures de contact tendues homotopes comme champs de plans mais non isomorphes.*

Pour ce qui est des variétés ouvertes, la situation semble encore plus sauvage puisque :

Théorème 0.15 [El3] (cf. **3.D**). *Il existe sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ une famille continue de structures tendues deux à deux non isomorphes.*

1. Flexibilité des structures de contact vrillées.

A. Le théorème de classification.

Soit V une variété de dimension 3, connexe, fermée et orientée, et soit Δ un disque de dimension 2 plongé dans V. On désigne par $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$ l'espace des structures de contact (coorientées et positives) qui sont *vrillées le long de* Δ (cf. définition **0.7**). Par ailleurs, on note $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ l'espace des champs de plans (coorientés) qui sont tangents à Δ en son centre. Ces espaces sont munis de la topologie C^∞.

Théorème 1.1 [El1]. *L'inclusion* $i : \mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta) \longrightarrow \mathrm{Distr}(V,\Delta)$ *est une équivalence d'homotopie (faible).*

Remarques 1.2.

a) Comme l'espace des plongements du disque dans V est connexe, toute structure vrillée est isotope à une structure de $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$. De plus, $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ est, dans l'espace de tous les champs de plans (coorientés) sur V, la fibre au-dessus de la sphère $\mathbf{S}^2$ des plans orientés tangents à V au centre de Δ. Ainsi, et compte tenu du théorème de Gray (cf. **0.4**), il découle du théorème **1.1** que deux structures vrillées qui sont homotopes comme champs de plans sont isotopes (théorème **0.9**).

b) Dans [Lu1, Lu2], R. Lutz montre que $i_\star$ est surjective sur π_0. La prolifération des paramètres n'étant pas la difficulté principale, on se contente d'indiquer ici pourquoi $i_\star$ est injective sur π_0, ce qui, d'après **a**, suffit à établir le théorème **0.9**.

Il s'agit de voir que deux structures ξ_0 et ξ_1 de $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$ qui sont reliées par un chemin ξ_s, $s \in [0,1]$, dans $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ peuvent aussi être jointes dans $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$. On observe d'abord que, comme tous les champs ξ_s coïncident au centre de Δ, on peut les déformer pour qu'ils soient tous égaux à ξ_0 près de Δ. On peut alors sans peine trouver une boule B_0 contenant Δ et un plongement ψ de B_0 dans $\mathbf{R}^3$ qui envoie $\xi_s|_{B_0} = \xi_0|_{B_0}$ sur la structure ζ_1 d'équation $\cos r\, dz - r \sin r\, d\theta = 0$ et dont l'image $\psi(B_0)$ est une boule convexe du type $\{(r,\theta,z) \mid (z/\varepsilon)^2 + r^2 \leq (\pi+\varepsilon)^2\}$ (où ε est un nombre positif petit). Le feuilletage caractéristique de $S_0 = \partial B_0$ (cf. exemple **0.3 a**) est le double du feuilletage de Δ (avec deux orbites fermées et deux singularités, une source et un puits : voir figure **2**). Voici maintenant les étapes suivantes.

B. Où l'on laisse des trous.

Définition 1.3.

a) Dans une variété de contact, un *domaine de Darboux* est une boule qui se plonge dans la structure usuelle ζ_0 de $\mathbf{R}^3$ (d'équation $dz - r^2\, d\theta = 0$).

b) Soit ξ un champ de plans coorienté défini près d'une 2-sphère orientée S et soit S_ξ le feuilletage tracé par ξ sur S. On dit que ξ est *simple* s'il n'est tangent à

S qu'en deux "pôles", l'un, dit pôle nord, où les orientations de S et ξ coïncident et l'autre, dit pôle sud, où elles sont opposées. On dit que ξ est *presque horizontal* si, de plus, près des orbites fermées éventuelles de S_ξ, le champ ξ est toujours coorienté "du pôle sud vers le pôle nord".

Exemples 1.4. Le champ ξ_0 est simple le long de ∂B_0 mais n'est pas presque horizontal car les orbites fermées n'ont pas la bonne coorientation. Par contre, un champ de plans "constant" sur $\mathbf{R}^3$ est presque horizontal le long de toute sphère strictement convexe. Plus généralement, un champ de plans ξ sur un compact A de $\mathbf{R}^3$ est donné par son application de Gauss $G_\xi : A \to \mathbf{S}^2$. On pose : $|\xi| = \sup_{x\in A}\{\|T_x G_\xi\|\}$. Alors, *si* $|\xi| \leq k$ *et si* S *est une sphère dont toutes les courbures principales sont supérieures à* k, ξ *est presque horizontal le long de* S.

Lemme 1.5. *Par une homotopie à extrémités fixes, on peut imposer au chemin* ξ_s *les conditions suivantes :*

(i) en dehors d'un nombre fini de boules B_i *disjointes de* B_0, $1 \leq i \leq p$, *tous les champs* ξ_s *sont des structures de contact;*

(ii) le long du bord de chaque B_i, $1 \leq i \leq p$, *chaque* ξ_s *est presque horizontal;*

(iii) pour $s = 0, 1$, *toutes les boules* B_i *sont des domaines de Darboux.*

Démonstration. On construit l'homotopie carte après carte. Cela permet de travailler dans un domaine compact A de $\mathbf{R}^3$, mais relativement à un sous-domaine B près duquel les champs ξ_s sont déjà de contact (grâce aux modifications antérieures). On pave un voisinage P de A (sur lequel les ξ_s sont encore définis) par des cubes isométriques assez petits pour que les champs ξ_s soient encore de contact sur la réunion Q des cubes qui rencontrent B.

Par ailleurs, étant donné un nombre positif δ petit, on se fixe un plongement φ de $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$ dans le δ-voisinage du bord du cube unité C de $\mathbf{R}^3$ ayant les propriétés suivantes :

- les sphères $\Sigma_t = \varphi(\mathbf{S}^2 \times \{t\})$ sont strictement convexes;
- Σ_{-1} est à l'extérieur de C et Σ_1 est à l'intérieur;
- les sphères Σ_t, $t \in]-1/2, 1/2[$, recouvrent le $\delta/2$-voisinage du bord de C.

Par homothétie et translation, on construit des sphères Σ_{tj} près du bord de chaque cube C_j de P. Si ces cubes sont petits, chaque champ ξ_s est presque horizontal le long des sphères Σ_{tj} car celles-ci sont très courbées. On applique alors, sur chaque couronne $\bigcup_{t\in[-1,1]} \Sigma_{tj}$ et pour tout $s \in [0, 1]$, la construction suivante.

Sur $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$, soit ξ un champ de plans d'équation $\alpha_t + u_t\, dt = 0$, où les α_t sont des 1-formes et les u_t des fonctions sur $\mathbf{S}^2$. On suppose que ξ est presque