Astérisque

FRANCOIS LAUDENBACH

Topologie de la dimension trois homotopie et isotopie

Astérisque, tome 12 (1974)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__12__1_0>

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TABLE DES MATIÈRES

Introduction : DEUX PROBLÈMES SUR LES DIFFÉOMORPHISMES..... 3

Chapitre I : PRÉLIMINAIRES.

§ 1 Le lissage. 7
§ 2 Les théorèmes de Papakyriakopoulos. 9
§ 3 Décomposition des variétés de dimension 3. 13

Chapitre II : VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 $\mathbb{P}^2$-IRRÉDUCTIBLES ET SUFFISAMMENT GRANDES.

§ 1 Définitions et remarques. 15
§ 2 Existence de difféomorphismes. 18
§ 3-4 Démonstration du théorème de scindement. 20
§ 5 Théorème des surfaces isotopes. 31
§ 6 Isotopie de difféomorphismes. 46
§ 7 Famille à un paramètre de difféomorphismes. 48

Chapitre III : ISOTOPIE DE SPHÈRES.

§ 1 Introduction et énoncé des résultats. 63
§ 2 Disjonction homotopique. 66
§ 3 Démonstration du théorème de disjonction isotopique. 73
§ 4 Classification des difféomorphismes de $\#_p\, S^1 \times S^2$. 78
§ 5 Une caractérisation de la vraie sphère de dimension 4. 84

Chapitre IV : SUR LES DÉCOMPOSITIONS DU GROUPE FONDAMENTAL EN PRODUIT LIBRE.

§ 1 Position du problème. 87
§ 2 Définitions. Classe d'homotopie d'une décomposition libre. 88
§ 3 Homotopie des sphères de Kneser et homotopie des décompositions libres.
§ 4 Homotopie et isotopie pour les décompositions d'un groupe quelconque.

Chapitre V : SCINDEMENT D'UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE LE LONG D'UNE 2-SPHÈRE.

§ 1 Position du problème et énoncé des résultats..... 102
§ 2 Caractérisation de scindement. 105

§ 3 Démonstration du théorème de scindement. 109
§ 4 Difféomorphismes entre sommes connexes. 123

Appendice I : LES VARIÉTÉS SATISFAISANT A LA CONJECTURE DE POINCARÉ ET LES VARIÉTÉS $\mathbb{P}^2$-INSÉCABLES. 128

Appendice II : ROTATIONS PARALLÈLEMENT A UN SYSTÈME DE SPHÈRES. ... 133

Appendice III : COHOMOLOGIE DU REVÊTEMENT UNIVERSEL D'UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3 ET COHOMOLOGIE DE SON GROUPE FONDAMENTAL. 138

RÉFÉRENCES. 146

ABSTRACT. 151

CONTENTS

Introduction : TWO PROBLEMS ON DIFFEOMORPHISMS.

Ch. I : PRELIMINARIES.

Ch. II : 3-MANIFOLDS WHICH ARE $\mathbb{P}^2$-IRREDUCIBLE AND SUFFICIENTLY LARGE.

Ch. III : ISOTOPY OF 2-SPHERES.

Ch. IV : ON THE DECOMPOSITIONS OF THE FUNDAMENTAL GROUP IN A FREE PRODUCT.

Ch. V : SPLITTING OF A HOMOTOPY EQUIVALENCE ALONG A 2-SPHERE.

App. I : MANIFOLDS SATISFYING THE POINCARE CONJECTURE AND "$\mathbb{P}^2$-INSECABLES" MANIFOLDS.

App. II : ROTATIONS PARALLEL TO A SYSTEM OF SPHERES.

App. III: COHOMOLOGY OF THE UNIVERSAL COVERING OF A 3-MANIFOLD AND COHOMOLOGY OF ITS FUNDAMENTAL GROUP.

Introduction

DEUX PROBLÈMES SUR LES DIFFÉOMORPHISMES

Ce texte correspond à une série d'exposés faits au Collège de France dans le cadre du cours Peccot 1973. Dans la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3, en général compactes et sans bord, on se propose d'étudier les deux problèmes suivants :

Problème I (Existence) : Une équivalence d'homotopie est-elle homotope à un difféomorphisme ?

Problème II (Unicité) : Deux difféomorphismes homotopes sont-ils isotopes ?

Même si l'on admet la conjecture de Poincaré, on sait que le problème I n'a pas toujours de solution : il existe des espaces lenticulaires qui ont le même type d'homotopie sans avoir le même type d'homotopie simple (a fortiori elles ne sont pas difféomorphes), leur torsion de Franz-Reidemeister étant distinctes ; en même temps le premier groupe de Whitehead $Wh_1(\pi)$ de leur groupe fondamental π n'est pas trivial ([M7],[R1]). En outre, d'après les récents travaux de Hendriks [H7], il existe une autre obstruction au problème I, indépendante de la précédente : l'obstruction au scindement le long d'une sphère non homotope à zéro (voir chap. V).

En ce qui concerne le problème II, à ma connaissance personne n'a encore dégagé d'obstruction ni même trouvé un contre-exemple. Mais les travaux de Hatcher et Wagoner [H5] (théorie d'obstruction au problème de la pseudo-isotopie en grande dimension) laissent à penser que, dans certaines conditions sur le second groupe de Whitehead de π, on aurait des chances de trouver des difféomorphismes homotopes (même pseudo-isotopes) à l'identité et non isotopes à l'identité.

Je me propose de rassembler tous les cas jusqu'ici connus où les problèmes I et II admettent des réponses positives. Dans [N1], F. Waldhausen a résolu ces deux problèmes pour la classe des variétés orientables irréductibles et suffisamment grandes ; elle a été étendue par W. Heil [H1] au cas non-orientable (variétés $\mathbb{P}^2$-irréductibles suffisamment grandes). Au chapitre II, je reprends l'exposé de cette question en y ajoutant une étude des lacets de difféomorphismes sur de telles variétés ; par cette étude je réponds à l'une des questions posées par Waldhausen lors d'une rencontre organisée en Juillet 1973 par l'Université du Sussex (G.B.).

Dans [L3], j'ai résolu le problème II pour les sommes connexes d'exemplaires de $S^2 \times S^1$; l'outil de base y est un théorème d'isotopie de sphères plongées dans une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré. Au chapitre III, je propose une démonstration sensiblement plus simple pour ce théorème, et je donne le théorème d'isotopie de plongements de sphères. Ce dernier a un correspondant algébrique sous la forme d'un théorème qui compare entre elles les décompositions d'un groupe en produit libre (chapitre IV) ; dans ce chapitre, je prouve aussi par la topologie algébrique (cohomologie du groupe fondamental) l'unicité à homotopie près de la sphère, dite de Kneser, qui réalise géométriquement une décomposition libre du groupe fondamental.

Ce dernier résultat est l'outil de base pour attaquer au chapitre V le problème du scindement d'une équivalence d'homotopie le long d'une sphère. J'y développe la démonstration d'un théorème obtenu avec H. Hendriks sous la forme où elle a été annoncée dans [H8] ; nous avons par ailleurs donné une démonstration plus algébrique pour ce théorème [H8']. En mettant ensemble tous les résultats exposés dans ce cours et en utilisant un travail fait par