Astérisque

ALAIN GENESTIER

Espaces symétriques de Drinfeld

Astérisque, tome 234 (1996)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__234__1_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

234 ASTÉRISQUE

1996

ESPACES SYMÉTRIQUES DE DRINFELD

Alain GENESTIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification A.M.S. :
14G20, 14K10, 14L05

TABLE DE MATIÈRES

I.	**Rappels et compléments**		**7**
	0	Introduction	7
	1	$\mathcal{O}$-modules formels et $\mathcal{O}_D$-modules formels	7
	2	Le module de coordonnées des $\mathcal{O}$-modules formels	9
	3	Théorie des déformations	21
	4	Le foncteur G de Drinfeld	25
II.	**Représentabilité du foncteur G : approche explicite**		**35**
	0	Introduction	35
	1	Les sous-foncteurs attachés aux sommets de l'immeuble	36
	2	Les sous foncteurs attachés aux simplexes maximaux de l'immeuble	41
	3	Utilisation de la théorie des déformations	57
	4	Le recollement : les sous-foncteurs ouverts attachés aux simplexes de dimension arbitraire.	63
III.	**Le morphisme de périodes**		**69**
	0	Introduction	69
	1	Rappels sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$	71
	2	Le morphisme $\xi' : G_{\mathcal{O}} \to \widehat{\Omega}^d$	76
	3	Le morphisme ξ' est un isomorphisme	94
IV.	**Revêtement de Drinfeld et morphisme déterminant**		**105**
	0	Introduction	105
	1	Le revêtement de Drinfeld	107
	2	Morphisme déterminant	114
	Bibliographie		**123**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'un corps local non-Archimédien K, de caractéristique résiduelle $p > 0$.

0.1. — Pour tout entier $d \geq 1$, Drinfeld a construit dans [D3] une variété rigide-analytique Ω^d sur K dont l'ensemble des points à valeur dans une extension finie L de K est

$$\mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_H H(L)$$

(où H parcourt l'ensemble des hyperplans rationnels sur K de $\mathbb{P}^{d-1}$), et qui est ainsi un analogue non-Archimédien des espaces Hermitiens symétriques, pour le cas du groupe linéaire GL_d.

Dans le cas particulier où $d = 2$, cette variété avait déjà été considérée par Mumford [Mu1], qui l'obtenait comme fibre générique au sens de Raynaud [Ra] d'un certain $\mathcal{O}$-schéma formel construit par éclatements successifs à partir de $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ (de sorte que la fibre spéciale de ce schéma formel est un arbre de droites projectives).

Deligne a alors construit un schéma formel $\widehat{\Omega}^d$, localement de type fini sur $\mathcal{O}$, dont la fibre générique au sens de Raynaud est Ω^d (ce travail, qui n' a pas pas été publié, est résumé dans [R] ; voir aussi notre troisième chapitre). Pour l'instant, disons seulement que ce schéma formel est muni d'une action de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et que le complexe simplicial dual de sa fibre spéciale est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$.

0.2. — Soient D une algèbre à division centrale simple d'invariant $1/d$ sur K, $\mathcal{O}_D$ un ordre maximal de D et K_d une sous-extension maximale non ramifiée de D, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_d$. Drinfeld définit un problème de modules G pour des groupes formels munis d'une action de $\mathcal{O}_D$ et d'une rigidification convenable, et construit un isomorphisme

$$\xi\colon G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$$

(voir [D1], et aussi [B-C] pour le cas où $d = 2$ et où le corps local K est d'inégale caractéristique).

0.3. — Dans le cas où le corps local K est d'(égale) caractéristique positive, on donne dans cet ouvrage une autre approche de la construction de l'isomorphisme ξ inspirée de travaux d'Anderson, de Drinfeld et de Stuhler. On va en exposer les grandes lignes en les comparant à celles de l'approche de Drinfeld.

0.4. — Notre approche diffère déjà de celle de Drinfeld par les outils utilisés. La construction de Drinfeld utilise la théorie de Cartier (et plus généralement la « $\mathcal{O}$-théorie de Cartier »). La nôtre, qui est spécifique au cas où l'anneau $\mathcal{O}$ est d'égale caractéristique, utilise une théorie des « modules de coordonnées » introduite par Drinfeld [D2]. Cette théorie est un analogue dans le cadre des $\mathcal{O}$-modules formels de la théorie des modules de Dieudonné contravariants.

0.5. — Les stratégies mises en œuvre sont elles aussi différentes.

Drinfeld construit d'abord un morphisme de foncteurs

$$\xi\colon G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

Il prouve ensuite que ce morphisme est un isomorphisme. Il en résulte alors que le foncteur G est représentable par le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$; il est cependant difficile d'expliciter l'isomorphisme ξ^{-1} afin d'obtenir une description utilisable de l'objet universel sur $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$.

Nous montrons directement que le foncteur G est représentable. Nous construisons ensuite en nous inspirant d'idées d'Anderson [A] un morphisme $\mathrm{PGL}_d(K)$-équivariant

$$\xi'\colon G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

Nous démontrons enfin que ξ' est un isomorphisme (il s'avère que cet isomorphisme est celui de Drinfeld, cf. remarque (III. 3.4)).

0.6. — La preuve de la représentabilité du foncteur G fournit en fait des coordonnées locales pour la topologie de Zariski sur le schéma formel G et une description explicite de l'objet universel dans ces coordonnées locales. Le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$ est lui aussi muni de coordonnées locales naturelles, et on peut donc considérer que le morphisme ξ' fournit un changement de coordonnées. Celles provenant de $\widehat{\Omega}^d$ sont en fait plus commodes pour exprimer l'action de $\mathrm{PGL}_d(K)$. On peut en calculer des approximations modulo les puissances de l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ (cf. la remarque (III. 2.4.3)).

0.7. — En revanche, en utilisant la description explicite de l'objet universel dans les coordonnées locales provenant de G, il est facile de donner des équations locales du revêtement de Drinfeld Σ^d.

Dans la dernière partie de ce travail, on écrit de telles équations. On construit aussi un morphisme déterminant

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1.$$

Rappelons que Σ^1 est le spectre maximal de l'extension maximale abélienne totalement ramifiée de K. Le K-espace rigide Σ^d n'est donc pas géométriquement irréductible. Toutefois, on s'attend à ce que les fibres géométriques de ce morphisme déterminant (ou plutôt, du morphisme

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1 \otimes_K K_d$$

qu'il induit) soient géométriquement irréductibles. En utilisant les équations locales du revêtement, nous l'avons montré pour $d = 2$ (cf. [Ge1], [Ge2]). Dans le cas où le corps local est cette fois supposé d'inégale caractéristique, Faltings [F] a obtenu un

résultat allant dans le même sens (pour plus de détails, voir l'introduction de notre chapitre IV).

0.8. — Donnons rapidement le contenu des chapitres de ce travail (on donnera plus de détails dans les introductions de ces chapitres).

Dans le chapitre I, on effectue des rappels sur les $\mathcal{O}$-modules formels, sur leurs « modules de coordonnées » (l'analogue (0.4) de la théorie des modules de Dieudonné contravariants), sur la théorie des déformations des $\mathcal{O}$-modules formels et sur le foncteur G.

Dans le chapitre II, on montre que le foncteur G est représentable. Pour cela, on montre d'abord que sa fibre spéciale est représentable, puis on utilise la théorie des déformations du chapitre I.

Dans le chapitre III, on commence par quelques rappels concernant le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$ puis on construit le morphisme ξ'. On démontre ensuite que ξ' est un isomorphisme.

Dans le chapitre IV, on rappelle la définition du revêtement de Drinfeld et on en donne des équations locales. On construit ensuite le morphisme déterminant et on le calcule explicitement dans les coordonnées locales du revêtement.

0.9. — Dans tout le texte, on utilisera les notations suivantes.

On désignera par $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrête complet d'égale caractéristique $p > 0$ et de corps résiduel fini $\mathbb{F}_q$. On notera K son corps des fractions et v la valuation de K. On fixera une uniformisante, π, de K. On désignera par $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers de l'extension non-ramifiée de degré d, K_d, de K et par σ l'automorphisme de $\mathcal{O}$-algèbre de $\mathcal{O}_d$ qui induit l'automorphisme de Frobenius ($x \mapsto x^q$) sur son corps résiduel $\mathbb{F}_{q^d}$. La $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_d[[\Pi]]$ des séries formelles non-commutatives en une indéterminée Π vérifiant les relations

$$\Pi a = \sigma(a)\Pi \qquad (\forall a \in \mathcal{O}_d)$$
$$\Pi^d = \pi$$

est alors l'ordre maximal de l'algèbre à division centrale simple D d'invariant $1/d$ sur K.

Tous les modules considérés seront (au moins) des $\mathbb{F}_q$-modules. On notera donc simplement $\otimes$ (resp. $\widehat{\otimes}$) le produit tensoriel sur $\mathbb{F}_q$ (resp. le complété de ce produit tensoriel, lorsque les $\mathbb{F}_q$-modules envisagés sont des modules topologiques).

Cet ouvrage doit beaucoup à G. Laumon, qui m'a aidé par ses conseils et m'a encouragé à le rédiger. Je suis heureux de l'en remercier maintenant.

Je remercie aussi H. Carayol, M. Rapoport, M. Raynaud et T. Zink pour des conversations qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce travail ainsi que P. Deligne qui a attiré mon attention sur quelques points obscurs dans une première version de ce texte. J'assure de plus T. Zink de ma reconnaissance pour le mois que j'ai passé grâce à lui à Bielefeld, pour l'accueil chaleureux qu'il m'y a réservé, et pour le temps qu'il m'y a consacré.

Je remercie enfin Mesdames Bonnardel et Le Bronnec qui ont réalisé, avec beaucoup de soin, la frappe d'une grande partie du manuscrit.

I. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

0 Introduction

Les notions figurant dans ce chapitre sont pour la plupart dues à Drinfeld ([D2]).

Le premier paragraphe est consacré à quelques rappels concernant les $\mathcal{O}$-modules formels.

Dans le second paragraphe, qui est le plus important du chapitre, on montre que la construction d'un « module de coordonnées » ([D2]) ramène la théorie des $\mathcal{O}$-modules formels à de l'algèbre semi-linéaire. Signalons qu'il existe aussi une $\mathcal{O}$-théorie de Cartier ([H]) pour les $\mathcal{O}$-modules formels. La théorie du module de coordonnées nous semblant plus maniable, nous n'utiliserons pas la $\mathcal{O}$-théorie de Cartier dans la suite de l'ouvrage.

Dans le troisième paragraphe, on définit pour les $\mathcal{O}$-modules formels une cohomologie de de Rham, munie d'une filtration de Hodge. Ceci étend simplement les définitions proposées par Anderson, Deligne et Gekeler pour les modules de Drinfeld. On montre ensuite qu'il revient au même de se donner une déformation d'un $\mathcal{O}$-module formel ou simplement une déformation de sa filtration de Hodge.

Dans le quatrième paragraphe, on rappelle la définition du fonction G de Drinfeld ([D1]). Celui-ci est un problème de modules pour des $\mathcal{O}_D$-modules formels munis d'une certaine rigidification. On donne ensuite une traduction de la définition du foncteur G en termes de modules de coordonnées. Ceci permet de définir un autre foncteur $G_{\mathcal{O}}$ muni d'un morphisme $G_{\mathcal{O}} \to \operatorname{Spf} \mathcal{O}$ tel que $G = G_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ (cette définition est implicitement contenue dans [D2] ; ce foncteur a aussi été considéré par Stuhler ([S] § 3) à propos de l'uniformisation des variétés de Drinfeld).

C'est avec le foncteur $G_{\mathcal{O}}$ que nous travaillerons dans la suite de l'ouvrage.

1 $\mathcal{O}$-modules formels et $\mathcal{O}_D$-modules formels

Dans la suite de ce paragraphe, B désignera une $\mathcal{O}$-algèbre dans laquelle l'image de π est nilpotente.

Définition 1.1. — *Un $\mathcal{O}$-module formel est un groupe formel lisse X sur B muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action induite sur l'espace tangent* $\operatorname{Lie} X$ *coïncide avec celle provenant de la structure de B-module de* $\operatorname{Lie} X$.