un texte
une aventure mathématique

L'incomplétude de Gödel : les limites de la méthode axiomatique

par

Sylvy ANSCOMBE

Exposé à la BnF le 13 janvier 2027



Sylvy Anscombe



Kurt Gödel

Société Mathématique de France

Animath

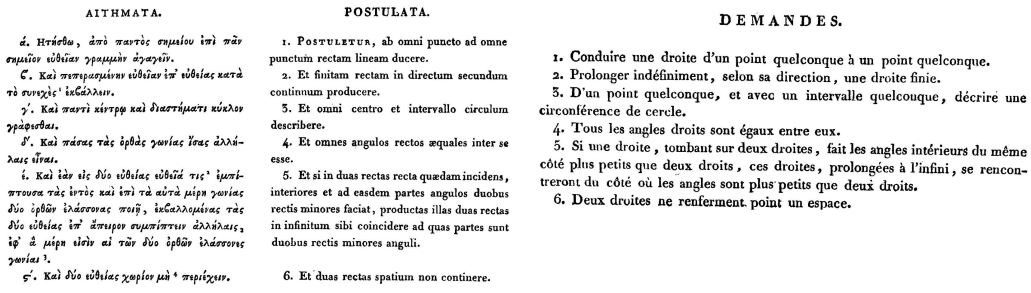
BnF Bibliothèque nationale de France

L'incomplétude de Gödel : les limites de la méthode axiomatique

« Cette phrase est fausse. » Si elle dit vrai, elle est fausse ; si elle est fausse, elle dit vrai. Ce vieux paradoxe du menteur ressemble à un simple jeu de mots. Kurt Gödel en a pourtant tiré, en 1931, l'un des résultats les plus profonds des mathématiques.

Les règles du jeu. — Aux échecs comme au go, le hasard n'intervient pas : les règles, fixées une fois pour toutes, décident de toutes les parties possibles. Personne ne demande de démontrer que le cavalier se déplace en L : c'est la règle. Les mathématiques fonctionnent de la même façon. On part de quelques énoncés que l'on accepte sans démonstration, les axiomes, et l'on en déduit tout le reste, pas à pas. Un théorème, c'est une position que l'on peut atteindre en jouant selon les règles.

Euclide, le premier jeu de règles. — Vers 300 avant notre ère, Euclide bâtit toute la géométrie plane à partir d'une poignée de postulats, comme « par deux points passe une droite ». Pendant deux mille ans, on a tenté de déduire le cinquième, celui des parallèles, des quatre autres. Vers 1830, Lobatchevski et Bolyai (et, sans le publier, Gauss) construisent une autre géométrie, qui respecte les quatre premiers postulats mais pas le cinquième ; Beltrami montrera en 1868 qu'elle n'est pas plus contradictoire que celle d'Euclide. Le cinquième postulat ne se déduit donc pas des autres : un ensemble de règles peut laisser une question ouverte. En géométrie, rien de choquant : plusieurs géométries sont légitimes, et l'on choisit l'axiome qui convient.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

ά. Ηγήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι [3].

ϛ. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ [4] περιέχειν.

POSTULATA.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

FIGURE 1. Les « demandes » (postulats) d'Euclide, en grec, en latin et en français ; la cinquième est le postulat des parallèles.

Le rêve de Hilbert. — Dans les années 1920, le grand mathématicien David Hilbert rêve d'aller plus loin : un seul système d'axiomes, sans contradiction, capable de trancher toute question sur les nombres. « Nous devons savoir, nous saurons », proclame-t-il le 8 septembre 1930 à Königsberg.

Le texte de Gödel. — La veille, dans la même ville, un jeune homme de 24 ans avait annoncé le résultat qui allait briser ce rêve. Dans son article de 1931, « Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés »(le grand traité de Whitehead et Russell), Gödel montre

que tout système de règles qui ne se contredit pas et qui est assez riche pour parler des nombres entiers laisse forcément échapper des énoncés vrais : il ne peut pas les démontrer. Ajouter un axiome n'y change rien, une nouvelle lacune apparaît aussitôt. Pire encore : un tel système ne peut même pas démontrer qu'il ne se contredit pas, ce que Hilbert espérait précisément établir.

Comment les mathématiques parlent d'elles-mêmes. — L'idée géniale de Gödel est de coder chaque énoncé, et chaque démonstration, par un nombre entier. Dire « cet énoncé est démontrable » devient alors une propriété des nombres, dont les mathématiques peuvent parler. Gödel fabrique ainsi un énoncé qui affirme, en substance : « je ne suis pas démontrable dans ce système. » Contrairement à la phrase du menteur, ce n'est pas un paradoxe : si le système ne se contredit pas, cet énoncé est vrai, et pourtant indémontrable.

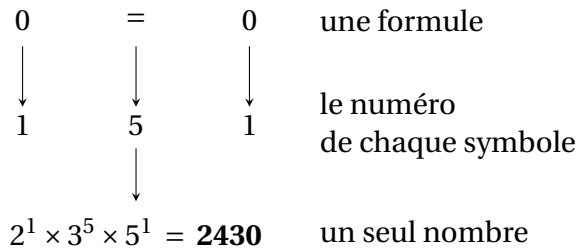


FIGURE 2. Coder une formule par un nombre (code simplifié) : chaque symbole reçoit un numéro, puis on les range dans les exposants des nombres premiers successifs.

Vrai et démontrable. — Un énoncé est vrai s'il dit juste sur les nombres eux-mêmes ; il est démontrable si l'on peut l'atteindre en jouant selon les règles. Ce n'est pas la même chose. Ce n'est pas une faiblesse des mathématicien·nes, mais une limite de la méthode axiomatique elle-même. Elle vaut aussi pour les machines : en 1936, avant les premiers ordinateurs, Alan Turing en tire qu'aucune machine ne peut prévoir, pour tout programme, s'il finira par s'arrêter. S'il ne fallait retenir qu'une chose : aucun ensemble de règles ne peut capturer toute la vérité sur les nombres entiers. Il manquera toujours quelque chose.

Autour du texte. — Kurt Gödel. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 :173–198, 1931.

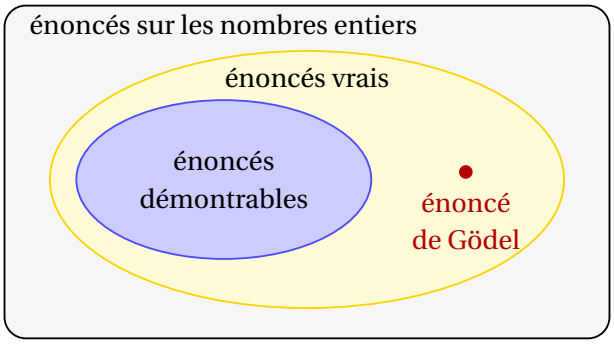


FIGURE 3. Vrai ne veut pas dire démontrable : l'énoncé de Gödel est vrai, mais le système ne le démontre pas.

Biographie

Sylvy Anscombe est mathématicienne, spécialiste de logique et de théorie des modèles, ainsi que de leurs interactions avec l'algèbre et la théorie des nombres. Héritière des questions mêmes que Gödel soulevait dans les années 1930, la théorie des modèles s'intéresse à ce que des axiomes disent — et taisent — des objets qu'ils décrivent : nombres, corps, groupes. Après une enfance dans la campagne anglaise, elle a posé ses valises à Oxford, où elle a étudié de la licence jusqu'à la thèse. Passée par les universités de Leeds et de Preston, elle est depuis 2020 maîtresse de conférences à l'IMJ-PRG, Université Paris Cité, où elle enseigne et poursuit ses recherches. Elle y codirige le master 2 Logique mathématique et fondements de l'informatique (LMFI). Loin du tableau noir, elle voue un amour profond à la musique, et on peut la surprendre en train de fredonner dans des styles très variés.

Crédits photos :

Sylvy Anscombe : *Tianyiwa Xie*

Demandes : *Les Œuvres d'Euclide, trad. F. Peyrard, tome I, Paris, C. F. Patris, 1814, p. 5 (extraits recomposés). Domaine public. Bibliothèque nationale de France, via Wikimedia Commons.*

Kurt Gödel : *Photographe anonyme. Kurt Gödel Papers, IAS, Princeton. Domaine public.*

SYLVY ANSCOMBE, Université Paris Cité et Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France