336

ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.
Numéro 336, 2011

Comité de rédaction

Guy David
Olivier Debarre
Damien Gaboriau
Patrice Le Calvez
Robert Alain Oliver
Fabrice Planchon
Raphaël Rouquier
Wolfgang Soergel
Wendelin Werner

Yves André (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 30 € ($ 45)
Abonnement Europe : 463 €, hors Europe : 512 € ($ 768)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2011*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-306-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

336

ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Pavel Gyrya
Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
pavel.gyrya@cornell.edu

Laurent Saloff-Coste
Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
lsc@math.cornell.edu

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 31C256, 35K20, 58J35, 60J60; 31C12 58J65, 60J45.

Mots-clefs. — Noyau de chaleur, condition aux limites de Dirichlet, domaines intérieurs uniformes, espaces de Dirichlet, inégalités de Harnack.

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya, Laurent Saloff-Coste

Abstract. — This monograph focuses on the heat equation with either the Neumann or the Dirichlet boundary condition in unbounded domains in Euclidean space, Riemannian manifolds, and in the more general context of certain regular local Dirichlet spaces. In works by A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste and K-T. Sturm, the equivalence between

— the parabolic Harnack inequality,
— the two-sided Gaussian heat kernel estimate,
— the Poincaré inequality and the volume doubling property,

is established in a very general context. We use this result to provide precise two-sided heat kernel estimates in a large class of domains described in terms of their inner intrinsic metric and called inner (or intrinsically) uniform domains. Perhaps surprisingly, we treat both the Neumann boundary condition and the Dirichlet boundary condition using essentially the same approach albeit with the additional help of a Doob's h-transform in the case of Dirichlet boundary condition.

The main results are new even when applied to Euclidean domains with smooth boundary where they capture the global effect of the condition of inner uniformity as, for instance, in the case of domains that are the complement of a convex set in Euclidean space.

***Résumé* (Le noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou de Dirichlet dans les domaines intérieurement uniformes).** — Ce texte traite de l'étude du noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou condition de Dirichlet au bord dans les domaines euclidiens non-bornés, mais aussi les domaines non-bornés dans les variétés riemanniennes et, plus généralement, les domaines non-bornés de certain espaces de Dirichlet réguliers locaux.

Les travaux de A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste et K-T. Sturm, ont montré l'équivalence, dans un large contexte, des propriétés suivantes:

— l'inégalité de Harnack parabolique,
— les estimations gaussiennes du noyau de la chaleur,

© Astérisque 336, SMF 2011

— l'inégalité de Poincaré et la propriété de doublement du volume.

Nous utilisons ce résultat pour obtenir des estimations précises du noyau de la chaleur pour une large classe de domaines définis en termes de leur distance intrinséque et appelés domaines intérieurement (ou intrinséquement) uniformes. De façon peut être surprenante, nous traitons le problème avec la condition de Neumann au bord et celui avec la condition de Dirichlet au bord par la même approche, mais avec l'aide supplémentaire d'une transformation de Doob dans le cas de la condition de Dirichlet.

Les résultats principaux que nous obtenons sont nouveaux même dans le cas des domaines euclidiens a bord régulier où ils capturent l'effet de la condition d'uniformité intérieure comme, par exemple, dans le cas des domaines qui sont le complement d'un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

CONTENTS

1. Introduction 1
1.1. Goals: informal description 1
1.2. Smooth unbounded Euclidean domains 3
Neumann boundary condition 3
Dirichlet boundary condition 4
1.3. Inner uniform domains 6
1.4. Remarks on the Doob h-transform technique 11
1.5. Harnack-type Dirichlet spaces 11
1.6. Inner uniform domains in Harnack-type Dirichlet spaces 13
1.7. Mixed boundary conditions 14

2. Harnack-type Dirichlet spaces 17
2.1. Model spaces 17
2.1.1. The n-dimensional Euclidean space 17
2.1.2. Uniformly elliptic divergence form operators 19
2.1.3. Riemannian manifolds 20
2.1.4. Sub-Riemannian geometry 20
2.1.5. Polytopal complexes 22
2.2. Local regular Dirichlet spaces 23
2.2.1. Regular Dirichlet forms 23
2.2.2. Energy and carré du champ 24
2.2.3. The intrinsic distance associated with a Dirichlet form 26
2.2.4. The doubling property 28
2.2.5. The Poincaré inequality 29
2.2.6. Lipschitz functions 30
2.2.7. The heat semigroup 31
2.2.8. Local weak solutions of the Laplace and heat equation 31
2.2.9. Local weak solutions of the Laplace equation 32
2.2.10. Local weak solutions of the heat equation 32
2.3. Harnack-type Dirichlet spaces 34
2.3.1. Parabolic Harnack inequality 34
2.3.2. Doubling, Poincaré, and Harnack inequality 36
2.3.3. The associated Hunt process and harmonic sheaf 38
2.4. Boundary conditions 39

2.4.1. The Dirichlet-type heat semigroup in U 39
2.4.2. Weak solutions with Dirichlet boundary condition along ∂U ... 42
2.4.3. The Neumann-type heat semigroup in U 45
2.4.4. Weak solutions with Neumann boundary condition along ∂U ... 46

3. The Neumann heat kernel in inner uniform domains 49
3.1. Inner uniform domains 49
3.1.1. Uniform domains 49
3.1.2. Inner uniform domains 53
3.1.3. Basic examples and related notions 55
3.2. The Neumann-type Dirichlet form in inner uniform domains 55
3.3. The Poincaré inequality in inner uniform domains 56
3.3.1. Statements of the main inequalities 57
3.3.2. Whitney covering 58
3.3.3. The trace of $\mathfrak{R}$ on a fixed ball B in $\widetilde{U}$ 60
3.3.4. Decomposition using Whitney balls 61
3.3.5. Poincaré inequality with a different measure 66
3.4. Applications to Neumann-type Dirichlet forms 67
3.4.1. Regularity of Neumann-type Dirichlet forms 67
3.4.2. Proof of the heat kernel estimates for the Neumann-type semigroups 71

4. The harmonic profile of an unbounded inner uniform domain .. 73
4.1. The harmonic profile 73
4.2. The elliptic boundary Harnack principle in uniform domains 74
4.2.1. Boundary Harnack principle 74
4.2.2. The boundary Harnack principle for the Green functions $G^U_{\xi,R}$. 76
4.2.3. Basic Green functions estimates 77
4.2.4. The work of Aikawa 80
4.2.5. Green functions and capacity width 80
4.3. Existence of a harmonic profile 89
4.3.1. A profile candidate 89
4.3.2. For uniform domains, the candidate h is indeed a profile 90
4.3.3. The doubling property of the profile 91
4.4. From uniform domains to inner uniform domains 93

5. The Dirichlet heat kernel in inner uniform domains 95
5.1. The h-transform technique 95
5.1.1. Dirichlet-type Dirichlet forms 95
5.1.2. The h-transform technique 96
5.2. The h^2-weighted Dirichlet form 99
5.2.1. Regularity on $\widetilde{U}$ 99
5.2.2. The h-transform on inner uniform domains 100
5.3. The Dirichlet-type Dirichlet form on an inner uniform domain 101

5.3.1. The Dirichlet heat kernel 101
5.3.2. The parabolic boundary Harnack principle 104

6. Examples 107
6.1. Limits in $\mathscr{T}^0(U)$ 107
6.2. From classical solutions to weak solutions in Euclidean domains 108
6.3. The domain above the graph of a function 112
6.4. The complement of a convex set 117
6.4.1. The complement of a convex set is inner uniform 118
6.4.2. Exterior of a star-shaped domain. 120
6.5. Miscellaneous examples 126
6.5.1. The Von Koch snowflake 126
6.5.2. Cones 129
6.5.3. The Fibonacci spiral 130
6.6. Examples in sub-Riemannian geometry 131
6.6.1. The canonical sub-Riemannian geometry of the Heisenberg group 131
6.7. Examples in the context of Euclidean complexes 134

Bibliography 137