THÉORIE DE HODGE
ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

Claire Voisin

Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST
François LOESER
Joseph OESTERLÉ
Daniel BARLET (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2002

Vente au numéro : 69 € ($ 78)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2002*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090
ISBN 2-85629-129-5

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

COURS SPÉCIALISÉS 10

THÉORIE DE HODGE ET GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

Claire Voisin

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours de l'Institut Universitaire de France

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

Partie I. Préliminaires

1. Fonctions holomorphes de plusieurs variables 29
1.1. Fonctions holomorphes d'une variable 30
1.2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables 35
1.3. L'équation $\partial g/\partial \overline{z} = f$ 41
Exercices 43

2. Variétés complexes 45
2.1. Variétés et fibrés vectoriels 46
2.2. Intégrabilité des structures presque complexes 50
2.3. Opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ 58
2.4. Exemples de variétés complexes 64
Exercices 65

3. Métriques kählériennes 67
3.1. Définition et premières propriétés 68
3.2. Caractérisations des métriques kählériennes 72
3.3. Exemples de variétés kählériennes 77
Exercices 83

4. Faisceaux et cohomologie 85
4.1. Faisceaux 86
4.2. Foncteurs et foncteurs dérivés 95
4.3. Cohomologie des faisceaux 102
Exercices 111

Partie II. La décomposition de Hodge

5. Formes harmoniques et cohomologie 115
5.1. Laplaciens 116
5.2. Opérateurs différentiels elliptiques 122
5.3. Applications 125
Exercices 131

6. Cas des variétés kählériennes 133
6.1. La décomposition de Hodge 134
6.2. Décomposition de Lefschetz 139
6.3. Théorème de l'indice de Hodge 144
Exercices 147

7. Structures de Hodge et polarisations 149
7.1. Définitions, premières propriétés 150
7.2. Exemples 158
7.3. Fonctorialité 165
Exercices 172

8. Complexes de de Rham holomorphes et suites spectrales 175
8.1. Hypercohomologie 176
8.2. Complexes de de Rham holomorphes 185
8.3. Filtrations et suites spectrales 188
8.4. Théorie de Hodge des variétés ouvertes 195
Exercices 201

Partie III. Variations de structure de Hodge

9. Familles et déformations 207
9.1. Familles de variétés 208
9.2. Connexion de Gauss-Manin 215
9.3. Le cas kählérien 219

10. Variation de structure de Hodge 225
10.1. Domaine et application des périodes 226
10.2. Variations de structure de Hodge 234
10.3. Applications 238
Exercices 243

Partie IV. Cycles et classes de cycles

11. Classes de Hodge 247
11.1. Classe de cycle 248
11.2. Classes de Chern 258
11.3. Classes de Hodge 261
Exercices 268

12. Cohomologie de Deligne-Beilinson et application d'Abel-Jacobi 271
12.1. Application d'Abel-Jacobi 272
12.2. Propriétés 280
12.3. Cohomologie de Deligne 284
Exercices 291

Partie V. Topologie des variétés algébriques

13. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes 295
13.1. Théorie de Morse 296
13.2. Application aux variétés affines 302
13.3. Théorème d'annulation et théorème de Lefschetz 309
Exercices 311

14. Étude des pinceaux de Lefschetz 313
14.1. Pinceaux de Lefschetz 314
14.2. Dégénérescence de Lefschetz 318
14.3. Application aux pinceaux de Lefschetz 323
Exercices 331

15. Monodromie 335
15.1. Action de monodromie 336
15.2. Cas des pinceaux de Lefschetz 344
15.3. Application : le théorème de Noether-Lefschetz 355
Exercices 359

16. Suite spectrale de Leray 363
16.1. Définition de la suite spectrale 364
16.2. Le théorème de Deligne 376
16.3. Théorème des cycles invariants 380
Exercices 386

Partie VI. Variation de structure de Hodge

17. Transversalité et applications 391
17.1. Complexes associés aux VISH 392
17.2. Suite spectrale de Leray holomorphe 399
17.3. Étude locale des lieux de Hodge 403
Exercices 412

18. Filtration de Hodge des hypersurfaces 415
18.1. Filtration par l'ordre du pôle 416
18.2. VISH des hypersurfaces 424
18.3. Premières applications 433
Exercices 438

19. Fonctions normales et invariants infinitésimaux 443
19.1. Fibration jacobienne 444
19.2. Application d'Abel-Jacobi 447
19.3. Cas des hypersurfaces de haut degré de $\mathbb{P}^n$ 458
Exercices 463

20. Travaux de Nori 467
20.1. Le théorème de connexité 469
20.2. Équivalence algébrique 478
20.3. Application du théorème de connexité 485
Exercices 489

Partie VII. Cycles algébriques

21. Groupes de Chow 493
21.1. Construction 495
21.2. Intersection et classes de cycles 503
21.3. Exemples 513
Exercices 519

22. Le théorème de Mumford et ses généralisations 521
22.1. Variétés à CH_0 représentable 523
22.2. La construction de Bloch-Srinivas 532
22.3. Généralisation 541
Exercices 543

23. La conjecture de Bloch et ses généralisations 545
23.1. Surfaces avec $p_g = 0$ 546
23.2. Filtration sur les groupes de Chow 558
23.3. Cas des variétés abéliennes 562
Exercices 573

Bibliographie 577

Index 589

INTRODUCTION

Variétés kählériennes et variétés projectives. — Ce livre est constitué de sept parties. Le but des quatre premières parties est d'expliquer l'existence de structures particulières sur la cohomologie des variétés kählériennes (la décomposition de Hodge et la décomposition de Lefschetz) et d'en montrer les premières propriétés et conséquences. Elles constituent une introduction à la géométrie kählérienne et à la théorie de Hodge. Les trois dernières parties ont pour but de présenter des résultats plus avancés en théorie de Hodge. Elles sont consacrées aux liens entre la théorie de Hodge, la topologie et l'étude des cycles algébriques sur les variétés projectives complexes lisses.

Les variétés projectives complexes lisses sont en effet des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type $(1,1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Cette 2-forme est appelée la forme de Kähler de la métrique kählérienne. Comme l'espace projectif complexe est une variété kählérienne (on dispose par exemple de la métrique de Fubini-Study), les sous-variétés complexes de l'espace projectif sont aussi kählériennes grâce à la métrique induite. On peut même dire précisément quelle est la place occupée par les variétés projectives complexes parmi les variétés kählériennes grâce au théorème de Kodaira :

Théorème 1. *— Une variété complexe compacte admet un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière.*

Dans les quatre premières parties de ce texte, nous nous intéresserons essentiellement à la classe des variétés kählériennes, sans privilégier les variétés projectives. La raison est que notre but ici est d'établir l'existence de la décomposition de Hodge et de la décomposition de Lefschetz sur la cohomologie d'une telle variété, et qu'il n'est

pas besoin pour cela de supposer que la classe de Kähler est entière. Néanmoins la décomposition de Lefschetz ne sera définie sur la cohomologie rationnelle que dans le cas projectif, et c'est déjà une raison importante pour se limiter ultérieurement au cas des variétés projectives. En effet, nous dégagerons dans ce texte la notion de structure de Hodge polarisée, et de domaine des périodes polarisées paramétrant les structures de Hodge polarisées. Ces domaines de périodes polarisées possèdent des propriétés de courbure que n'ont pas les domaines de périodes non polarisées. Or la décomposition de Lefschetz, lorsqu'elle est définie sur la cohomologie rationnelle ou entière permet justement de scinder la cohomologie d'une variété kählérienne en une somme directe de structures de Hodge polarisées.

Une autre raison de se limiter dans les applications de la théorie de Hodge aux variétés projectives réside dans le fait qu'une variété kählérienne ne possède pas en général de sous-variétés complexes, alors que les variétés projectives en contiennent beaucoup, à tel point qu'il est conjecturé actuellement, comme une vaste généralisation de la conjecture de Hodge, que les structures de Hodge sur une variété projective X sont gouvernées par, et déterminent en un sens à préciser, la géométrie des sous-variétés algébriques de X, et plus précisément les groupes de Chow de X.

La décomposition de Hodge. — Si X est une variété complexe, l'espace tangent de X en chaque point x est en particulier muni d'une structure complexe J_x. La donnée de cette structure complexe en chaque point est ce qu'on appelle la structure presque complexe sous-jacente. La donnée de J_x fournit une décomposition

$$T_{X,x} \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}_{X,x} \oplus T^{0,1}_{X,x}, \tag{0.1}$$

où $T^{0,1}_{X,x}$ est l'espace vectoriel des vecteurs tangents complexifiés $u \in T_{X,x}$ tels que $J_x u = -iu$. Du point de vue de la structure complexe, c'est-à-dire de la donnée locale de coordonnées holomorphes, les champs de vecteurs de type $(0,1)$ sont ceux qui annulent les fonctions holomorphes.

La décomposition (0.1) induit une décomposition semblable sur les fibrés de formes différentielles complexes

$$\Omega^k_{X,\mathbb{C}} := \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}_X, \tag{0.2}$$

où

$$\Omega^{p,q}_X \cong \overset{p}{\wedge} \Omega^{1,0}_X \otimes \overset{q}{\wedge} \Omega^{0,1}_X$$

et

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X$$

est la décomposition duale de (0.1). La décomposition (0.2) a la propriété de symétrie de Hodge

$$\overline{\Omega^{p,q}_X} = \Omega^{q,p}_X,$$

où la conjugaison complexe agit de façon naturelle sur $\Omega^k_{X,\mathbb{C}} = \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.