INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH

ANALYSE ET PROBABILITÉS

Daniel Li

Hervé Queffélec

Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST
François LOESER
Joseph OESTERLÉ
Daniel BARLET (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2004

Vente au numéro : 72 € ($ 104)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2004*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090
ISBN 2-85629-155-4

Directeur de la publication : Marie-Françoise ROY

COURS SPÉCIALISÉS 12

INTRODUCTION À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH

ANALYSE ET PROBABILITÉS

Daniel Li
Hervé Queffélec

Société Mathématique de France 2004

Table des matières

Introduction ix

Préliminaire. Topologies faible et préfaible. Filtres, ultrafiltres. Ordinaux 1
I. Topologies faible et préfaible 1
II. Filtres, ultrafiltres. Ordinaux 6
III. Exercice 11

0. Notions fondamentales de Probabilités 13
I. Introduction 13
II. Convergences 15
III. Séries de variables aléatoires indépendantes 20
IV. Inégalités de Khintchine 28
V. Martingales 32
VI. Commentaires 39
VII. Exercices 40

1. Bases dans les espaces de Banach 43
I. Bases de Schauder : généralités 43
II. Bases et structure des espaces de Banach 54
III. Commentaires 67
IV. Exercices 69

2. Convergence inconditionnelle 75
I. Convergence inconditionnelle 75
II. Bases inconditionnelles 81
III. Base canonique de c_0 85
IV. Les théorèmes de James 87

V. Le Théorème de dichotomie de Gowers 91
VI. Commentaires 100
VII. Exercices 101

3. Variables aléatoires banachiques 107
I. Définitions ; convergences 107
II. Principe de symétrie de P. Lévy et applications 117
III. Principe de contraction 121
IV. Inégalités de Kahane 126
V. Commentaires 136
VI. Exercices 137

4. Type et cotype des espaces de Banach. Factorisation par un espace de Hilbert 143
I. Compléments de Probabilités 143
II. Compléments sur les espaces de Banach 155
III. Type et cotype des espaces de Banach 160
IV. Factorisation par un espace de Hilbert et Théorème de Kwapień 173
V. Quelques applications des notions de type et de cotype 179
VI. Commentaires 182
VII. Exercices 184

5. Opérateurs p-sommants. Applications 187
Introduction 187
I. Opérateurs p-sommants 188
II. Théorème de Grothendieck 193
III. Quelques applications de l'utilisation des opérateurs p-sommants 202
IV. Ensembles de Sidon 206
V. Commentaires 230
VI. Exercices. 232

6. Quelques propriétés des espaces L^p 237
I. Espace L^1 238
II. Le système trigonométrique 247
III. La base de Haar dans L^p 254
IV. Une autre preuve du Théorème de Grothendieck 264
V. Commentaires 272
VI. Exercices 281

7. L'espace ℓ_1 291
I. Le Théorème ℓ_1 de Rosenthal 291
II. Quelques autres résultats sur les espaces contenant ℓ_1 304
III. Commentaires 312
IV. Exercices 315

8. Sections euclidiennes 319
I. Inégalité de concentration de la mesure 319

II. Comparaison des vecteurs gaussiens 325
III. Le Théorème de Dvoretzky 334
IV. Théorème de Lindenstrauss-Tzafriri 353
V. Commentaires 357
VI. Exercices 358

9. Espaces de Banach séparables sans la Propriété d'Approximation 363
I. Introduction et définitions 363
II. Les réductions de Grothendieck 364
III. Les contre-exemples d'Enflo et Davie 370
IV. Commentaires 378
V. Exercices 379

10. Processus gaussiens 381
I. Processus gaussiens 381
II. Mouvement brownien 385
III. Théorème de majoration de Dudley 387
IV. Théorème de minoration de Fernique pour les processus stationnaires ... 392
V. Théorème d'Elton-Pajor 400
VI. Commentaires 423
VII. Exercices 424

11. Sous-espaces réflexifs de L^1 427
I. Structure des sous-espaces réflexifs de L^1 428
II. Exemples de sous-espaces réflexifs de L^1 439
III. Théorème de factorisation de Maurey et Théorème de Rosenthal 446
IV. Sous-espaces de dimension finie de L^1 452
V. Commentaires 467
VI. Exercices 470

12. Quelques exemples d'utilisation de la méthode des sélecteurs 481
I. Extraction d'ensembles quasi-indépendants 481
II. Sommes de sinus et transformation de Hilbert vectorielle 501
III. Minoration de la constante de K-convexité 505
IV. Commentaires 510
V. Exercices 511

13. Espace de Pisier des fonctions presque sûrement continues. Applications ... 515
I. Introduction 515
II. Compléments sur les variables banachiques 516
III. Espace $\mathscr{C}^{ps}$ 523
IV. Applications de l'espace $\mathscr{C}^{ps}$ 537
V. Théorème de Bourgain-Milman 544
VI. Commentaires 556
VII. Exercices 560

Annexe. Algèbres de Banach. Groupes abéliens compacts 563
I. Algèbres de Banach 563
II. Groupes abéliens compacts 569

Bibliographie 585
Livres 585
Articles 589

Index des notations 615

Index des noms cités 617

Index terminologique 621