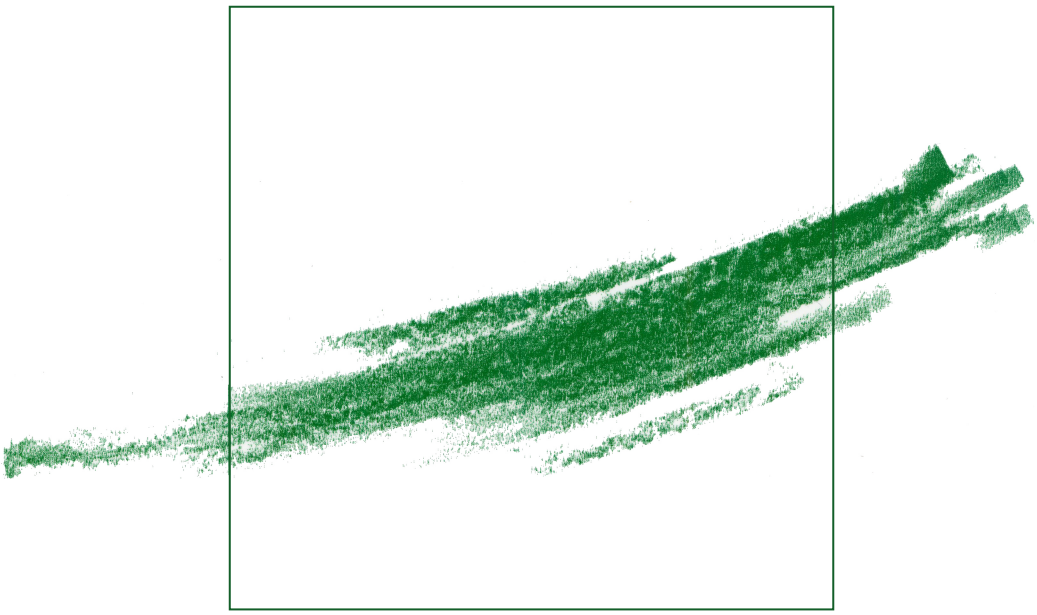
COURS SPÉCIALISÉS

COLLECTION SMF

Introduction à la théorie de jauge

Andrei TELEMAN



18

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE

Andrei Teleman

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR Bertrand MAURY
Julie DÉSERTI
Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
`smf@smf.univ-mrs.fr`	Inde	`www.ams.org`	`www.epdsciences.com`

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2012*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-322-5

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 18

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE

Andrei Teleman

Société Mathématique de France 2012

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction 5

1. Théorie de Hodge sur les variétés compactes 9
1.1. Le théorème de de Rham 9
1.2. Le théorème de Hodge 10
1.3. Théorie de Hodge en dimension 4 14

2. Connexions linéaires et courbure 17
2.1. Connexions linéaires sur les fibrés vectoriels 17
2.2. Classes de Chern et courbure 22
2.3. Réduction du groupe structural d'un fibré vectoriel 23

3. Fibrés principaux et connexions sur les fibrés principaux 29
3.1. Fibrés principaux et fibrés associés 29
3.2. Connexions sur les fibrés principaux et vectoriels 32
3.3. Morphismes et isomorphismes de fibrés principaux Le problème de classification 37
3.4. Le groupe de jauge d'un fibré et son algèbre de Lie 39

4. Connexions de Yang-Mills et connexions anti-autoduales 45
4.1. La fonctionnelle et les équations de Yang-Mills 45
4.2. L'espace des modules des connexions de Yang-Mills sur un fibré hermitien en droites 50

5. Structures Spin et Spin^c, opérateurs de Dirac, la formule de Weitzenböck 55
5.1. Les groupes Spin(n), Spin$^c(n)$ Isomorphismes remarquables en dimension 3 et 4 55
5.2. Structures Spin et structures Spin^c 58
5.3. Opérateurs de Dirac et la formule de Weitzenböck 65

6. Espaces de modules de monopoles de Seiberg-Witten. Le théorème de Donaldson sur la forme d'intersection d'une 4-variété 71
6.1. Les équations de Seiberg-Witten 71
6.2. La borne *a priori* de la composante spinorielle 74

6.3. La compacité de l'espace de modules des monopoles 75
6.4. Le complété de Sobolev de l'espace des configurations et du groupe de jauge 80
6.5. L'espace des modules des solutions de Sobolev 81
6.6. Le complexe elliptique de déformation. La dimension présumée 86
6.7. Modèles locaux de type Kuranishi 89
6.8. Orientabilité 93
6.9. Transversalité et régularité générique 94
6.10. La topologie de $\mathcal{B}^*$ 99
6.11. Le théorème de Donaldson sur la forme d'intersection d'une 4-variété 102

7. Les invariants de Seiberg-Witten 109
7.1. Cobordisme entre espaces des modules 110
7.2. La définition des invariants 111

8. Monopoles sur les surfaces kählériennes 119
8.1. Les équations de Seiberg-Witten sur une surface kählerienne 119
8.2. Fibrés holomorphes, diviseurs effectifs, paires holomorphes, vortex et monopoles 125

9. Exemples et applications 147
9.1. Premiers exemples 147
9.2. Invariance $\mathcal{C}^\infty$ de la rationalité 149
9.3. La perturbation de Witten. Les invariants de Seiberg-Witten des surfaces kählériennes à $p_g > 0$ 152

A. 171
A.1. Sections distributions et sections de Sobolev d'un fibré vectoriel 171
A.2. Opérateurs elliptiques. Régularité. Estimations elliptiques. Complexes elliptiques 173
A.3. Théorèmes de plongement et de multiplication pour les sections de Sobolev sur les variétés compactes 177
A.4. Submersions et sections régulières sur les variétés banachiques. Le théorème de Sard-Smale 178
A.5. Familles d'opérateurs de Fredholm 180
A.6. Équations de type Kazdan-Warner 184

Bibliographie 187

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Ce texte a été rédigé en suivant les deux cours de Master 2 intitulés « Introduction à la théorie de jauge » donnés par l'auteur à l'université de Provence. Il est accessible aux étudiants qui ont suivi un cours de géométrie différentielle et un cours de topologie algébrique, et qui ont des notions de base d'analyse (espaces de Sobolev, distributions, opérateurs différentiels). Nous avons introduit un appendice qui regroupe les résultats d'analyse globale (analyse sur les variétés) utilisés dans le cours.

La théorie de jauge est un domaine nouveau très actif, qui se trouve à l'intersection de la géométrie différentielle, de la topologie, de l'analyse globale et de la géométrie complexe. L'idée fondamentale de la théorie de jauge est d'étudier *les espaces de modules* des solutions de certains systèmes d'équations à dérivées partielles sur une variété différentiable et d'obtenir des informations sur la variété (par exemple des informations sur son type de difféomorphisme) à partir de ces espaces de modules.

À partir de cette idée on a obtenu les premiers résultats spectaculaires dans le domaine de la topologie différentielle 4-dimensionnelle :

- on a montré que la forme d'intersection d'une 4-variété différentiable orientée compacte est triviale sur $\mathbb{Z}$ si cette forme est définie, ce qui, d'après les résultats de Freedman concernant la classification des variétés topologiques, est totalement faux dans le contexte topologique ;

- on a introduit et calculé explicitement les premiers invariants $\mathscr{C}^\infty$ en dimension 4, à savoir *les invariants de Donaldson*, à l'aide desquels on a trouvé les premières *paires exotiques* (paires de 4-variétés différentiables orientées, qui sont homéomorphes mais non difféomorphes).

Il est intéressant de noter que les premières paires exotiques ont été trouvées dans une classe très spéciale et très importante de 4-variétés : les surfaces algébriques complexes.

En 1994 une nouvelle théorie de jauge, *la théorie de Seiberg-Witten*, a été élaborée. Tandis que le point de départ de la théorie de Donaldson est l'équation d'anti-autodualité pour une connexion dans un fibré principal de groupe structural compact (par exemple $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{PU}(2)$), dans la théorie de Seiberg-Witten on étudie les

équations de Seiberg-Witten (les équations de monopole) pour une paire formée par une $U(1)$-connexion et un spineur.

L'équation d'anti-dualité, ainsi que les équations de Seiberg-Witten ont des interprétations physiques. Les invariants de Seiberg-Witten sont plus simples à introduire et à calculer que les invariants de Donaldson. En effet, tandis que les espaces de modules des solutions des équations de Seiberg-Witten sont compacts, les espaces de modules de connexions anti-autoduales ne le sont pas en général, et la construction d'une compactification canonique avec de bonnes propriétés est l'un des chapitres les plus difficiles de la théorie de Donaldson.

Ce cours est essentiellement dédié à la théorie de Seiberg-Witten (*qui est accessible aux étudiants*), mais il contient aussi des éléments de la théorie de Donaldson : le groupe de jauge d'un fibré principal, les équations de Yang-Mills, les équations d'anti-dualité, des exemples d'espaces de modules de connexions de Yang-Mills.

On peut utiliser ce texte pour un cours de niveau Master 2 ou École doctorale. Pour soutenir les étudiants intéressés par le sujet et pour assurer une assimilation solide du matériel, une bonne idée serait de donner en parallèle un cours d'analyse globale dédié à la théorie des opérateurs différentiels sur les variétés différentiables, un cours de topologie algébrique qui introduit les classes caractéristiques et un cours de géométrie complexe.

Le cours est structuré comme suit :

On commence par une brève introduction à la théorie de Hodge, puis on continue avec la théorie des fibrés et des connexions. Nous présentons soigneusement les notions fondamentales de connexion, courbure, réduction du groupe structural aussi bien dans le cadre des fibrés vectoriels que dans le cadre (plus abstrait) des fibrés principaux, en expliquant en détail la relation entre les deux points de vue.

On continue avec un chapitre introductif à la théorie de Yang-Mills. On introduit la fonctionnelle de Yang-Mills sur l'espace des connexions sur un fibré principal de groupe structural compact et on montre que cette fonctionnelle est minorée par un invariant topologique du fibré (la « borne topologique »). Nous étudions les connexions qui correspondent à cette borne topologique (et qui réalisent, donc, le minimum permis par « la contrainte topologique »). Le résultat fondamental de ce chapitre est une description détaillée de l'espace de modules des connexions de Yang-Mills sur un fibré hermitien en droites.

Cette partie du cours est très importante du point de vue pédagogique : elle contient des résultats importants, démontrés avec des méthodes relativement élémentaires, qui se trouvent à l'intersection de la théorie de Donaldson et de la théorie de Seiberg-Witten. De plus, on présente dans un contexte accessible, les premiers exemples d'espaces de modules de solutions d'un système différentiel sur une variété compacte. On montre de plus que la géométrie de ces espaces de modules est reliée à la topologie de la variété de base, ce qui est une idée fondamentale de la théorie de jauge.

Le chapitre 5 est dédié à la théorie des structure spinorielles (Spin et Spin^c) et aux opérateurs de Dirac sur les 4-variétés. Ces notions fondamentales sont introduites