KINETIC THEORY

—

ANALYSIS, COMPUTATION AND APPLICATIONS

Mario Pulvirenti, Shi Jin (eds.)



Panoramas et Synthèses

Numéro 65

2025

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Samuel BOISSIÈRE
Fabienne CASTELL
Indira CHATTERJI
Élise GOUJARD
Anne-Sophie de SUZZONI
Diego IZQUIERDO
Claire LACOUR
Quentin MÉRIGOT
Sergio SIMONELLA
Todor TSANKOV
Anne MOREAU (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`christian.smf@cirm-math.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 66 € ($ 99)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`panoramas@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2025*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-37905-222-4

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 65

KINETIC THEORY
—
ANALYSIS, COMPUTATION AND APPLICATIONS

Mario Pulvirenti, Shi Jin (eds.)

Société mathématique de France

Mario Pulvirenti
Dipartimento di Matematica, Università di Roma La Sapienza Piazzale Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italy
ORCID : 0000-0003-4736-9086

Shi Jin
Institute of Natural Sciences and School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China

***Classification mathématique par sujets.* (2020) —** 35Q20, 35Q83, 35Q70, 82C22, 82C40, 82C70.

***Keywords and phrases.* —** Kinetic theory, interacting particle systems, transport processes, Boltzmann equation, Vlasov equation, scaling limits, multiscale methods, numerical analysis for kinetic equations.

***Mots-clés et phrases.* —** Théorie cinétique, systèmes de particules en interaction, processus de transport, équation de Boltzmann, équation de Vlasov, limites d'échelle, méthodes multi-échelles, analyse numérique pour les équations cinétiques.

KINETIC THEORY
—
ANALYSIS, COMPUTATION AND APPLICATIONS

Mario Pulvirenti, Shi Jin (eds.)

Abstract. **—** This volume covers subjects related to the mini-courses delivered during the winter school held at CIRM, Marseille-Luminy, France, from 18-22 January 2021. It formed part of the extensive program "Kinetic Theory: Analysis, Computation and Applications" organized at CIRM from January to June 2021, with Shi Jin as the Jean-Morlet Chair and Mihai Bostan as the Local Project Leader. Kinetic equations play an indispensable role in bridging the microscopic scales at the molecular level with the macroscopic scales at the continuum level. Macroscopic fluid flow equations can be derived from mesoscopic kinetic equations or even from microscopic interacting particle systems. This is one of the core areas of partial differential equations and mathematical physics, with a wide range of applications in astronautics, astrophysics, plasma physics, biology, and even the social sciences. This book provides a comprehensive overview of current activity in some of the most important topics of investigation in the field, including collective dynamics, fluid-dynamic limits, mean-field limits, and multiscale numerical methods.

Résumé. **(Théorie cinétique : analyse, calcul et applications) —** Ce volume couvre des sujets liés aux mini-cours donnés lors de l'école d'hiver organisée au CIRM, Marseille-Luminy, France, du 18 au 22 janvier 2021. Il s'inscrivait dans le cadre du vaste programme «Kinetic Theory : Analysis, Computation and Applications» organisé au CIRM de janvier à juin 2021, avec Shi Jin comme titulaire de la Chaire Jean-Morlet et Mihai Bostan comme responsable local du projet. Les équations cinétiques jouent un rôle indispensable pour relier les échelles microscopiques, au niveau moléculaire, et les échelles macroscopiques, au niveau du continuum. Les équations macroscopiques d'écoulement des fluides peuvent être dérivées d'équations cinétiques mésoscopiques ou même de systèmes de particules en interaction au niveau microscopique. Il s'agit de l'un des domaines centraux des équations aux dérivées partielles et de la physique mathématique, avec un large éventail d'applications en astronautique, astrophysique, physique des plasmas, biologie et même dans les sciences sociales. Cet ouvrage offre une vue d'ensemble des activités de recherche actuelles sur certains des sujets les plus importants dans le domaine, notamment la dynamique collective, les limites fluides, les limites de champ moyen et les méthodes numériques multi-échelles.

CONTENTS

Résumés des articles ix

Abstracts xi

Preface xiii

Pierre Degond & Antoine Diez & Amic Frouvelle — *Body-attitude coordination in arbitrary dimension* 1

1. Introduction 2
2. Modeling context 4
3. Main result and discussion 9
4. Proof of Theorem 3.1 13
5. Conclusion and perspectives 22

A. Short summary of useful results from representation theory 23
B. Proof of Lemma 4.1 26
C. Proof of Lemma 4.9 (i) 29
D. Proof of Lemma 4.9 (ii) 31
E. Proof of Proposition 3.2 and dimension $n = 3$ case 41

References 43

Giacomo Dimarco & Liu Liu & Lorenzo Pareschi & Xueyu Zhu — *Multi-fidelity methods for uncertainty propagation in kinetic equations* 49

1. Introduction 50
2. Fidelity spectrum of kinetic models 52
3. Multi-fidelity control variate methods 61
4. Bi-fidelity stochastic collocation methods 93
5. Conclusions 116

References 117

François Golse — *Mean-Field Limits in Statistical Dynamics* 125

Introduction: what is a mean-field dynamics? 126
Outline 127

1. Lecture 1: From Newton to Vlasov (mean-field limit in classical mechanics) 127
2. Lecture 2: From Schrödinger to Hartree (mean-field limit in quantum mechanics) 136
3. Lecture 3: Mean-field and classical limits in quantum mechanics 157
References 176

Pierre-Emmanuel Jabin & Hsin-Yi Lin & Eitan Tadmor — *A new commutator method for averaging lemmas* 179

1. Introduction 179
2. Proof of Theorem 1 185
References 193

Shi Jin & Lei Li & Li Wang & Zhennan Zhou — *Multiscale Physical Problems: Asymptotics and Asymptotic-Preserving Schemes* 197

1. Introduction 198
2. Asymptotic and numerical passages from quantum to classical mechanics 201
3. Passage from the particle systems to the kinetic equations 217
4. Asymptotic preserving methods for kinetic equations 229
5. Conclusion 251
A. Nondimensionalization of the Schrödinger equation 252
B. Nondimensionalization of the Boltzmann equation 252
References 253

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Coordination d'orientation en dimension arbitraire
Pierre Degond & Antoine Diez & Amic Frouvelle 1

Nous considérons un système d'agents autopropulsés interagissant par coordination d'orientation en dimension arbitraire $n \geq 3$. Nous dérivons les limites formelles, cinétique et hydrodynamique, associées à ce modèle. Les travaux antérieurs étaient restreints à la dimension $n = 3$ et reposaient sur des paramétrisations du groupe des rotations valides uniquement en dimension 3. Afin d'étendre ces résultats aux dimensions arbitraires $n \geq 3$, nous développons une stratégie différente fondée sur les représentations des groupes de Lie et la formule d'intégration de Weyl. Ces résultats ouvrent la voie à l'étude du modèle hydrodynamique obtenu (« Self-Organized Hydrodynamics for Body orientation (SOHB) ») en dimension quelconque.

Méthodes multi-fidélité pour la propagation de l'incertitude dans les équations cinétiques
Giacomo Dimarco & Liu Liu & Lorenzo Pareschi & Xueyu Zhu 49

La construction de méthodes rapides pour la quantification de l'incertitude dans les équations cinétiques représente un défi en raison de la grande dimensionnalité des modèles qui impliquent souvent des coûts de calcul prohibitifs. D'autre part, précisément à cause de fléau de la dimension, la construction de modèles simplifiés capables de fournir des solutions approchées à un coût de calcul réduit a toujours représenté l'un des principaux axes de recherche dans le domaine des équations cinétiques. Des approximations basées sur des fermetures appropriées des équations des moments ou sur des modèles collisionnels simplifiés ont été étudiées par de nombreux auteurs. Dans le cadre de la quantification de l'incertitude, il est donc naturel utiliser tels modèles dans un cadre multi-fidélité où l'équation cinétique d'origine représente le modèle haute fidélité, et les modèles simplifiés définissent les modèles à basse fidélité. Ce travail passe en revue quelques résultats récents sur les méthodes multi-fidélité pour les équations cinétiques qui accélèrent la résolution du processus de quantification des incertitudes en combinant des évaluations de modèles haute fidélité et basse fidélité avec une attention particulière au cas des limites hydrodynamiques compressibles et incompressibles. Nous nous concentrerons essentiellement sur deux classes de stratégies : les méthodes des variables de contrôle multi-fidélité et les méthodes de collocation stochastique bi-fidélité. Les différentes approches sont analysées à la lumière des différents modèles simplifiés utilisés et des différentes techniques numériques adoptées. Compte tenu de la pertinence du choix

spécifique du modèle de substitution simplifié, une approche orientée aux applications a été choisie dans la présentation.

Limites de champ moyen en mécanique statistique
François Golse 125

Ces notes de cours ont pour but d'introduire le lecteur à quelques outils et résultats mathématiques récents pour la limite du champ moyen en dynamique statistique. Le cours 1 passe en revue l'approche de la limite de champ moyen en mécanique classique suivant les idées de W. Braun, K. Hepp et R.L. Dobrushin, basées sur les notions de mesure empirique dans l'espace des phases, de solution de Klimontovich et de distance de Monge-Kantorovich-Wasserstein entre les mesures de probabilité. Le cours 2 traite d'un analogue de la notion de solution de Klimontovich en dynamique quantique, et explique comment cette notion apparaît dans la méthode de Pickl pour traiter le cas des potentiels d'interaction avec une singularité de type Coulomb à l'origine. Enfin, le cours 3 explique comment les limites classiques et de champ moyen peuvent être prises conjointement sur la dynamique quantique à N particules conduisant à l'équation de Vlasov. Ces cours sont basés sur une série de travaux avec C. Mouhot et T. Paul.

Une nouvelle méthode de commutateur pour les lemmes de moyenne
Pierre-Emmanuel Jabin & Hsin-Yi Lin & Eitan Tadmor 179

Dans ces notes nous étudions les lemmes de moyenne pour les équations cinétiques avec des termes de flux hétérogènes, qui dépendent explicitement de la variable d'espace. Nous considérons un cadre simplifié L^2 dans lequel le flux est une perturbation régulière du flux classique homogène. Nous généralisons la méthode de commutateurs introduite dans [P.-E. Jabin, H.-Y. Lin & E. Tadmor – "Commutator method for averaging lemmas," *Anal. PDE* **15** (2022), p. 1561–1584] pour obtenir pour la première fois des estimations quantitative de régularité dans le cadre hétérogène.

Problèmes physiques multi-échelles : asymptotiques et schémas préservant l'asymptotique
Shi Jin & Lei Li & Li Wang & Zhennan Zhou 197

Nous examinons les transitions asymptotiques allant de la physique microscopique à la physique macroscopique et présentons le développement des méthodes de calcul multi-échelles dans le cadre général des schémas préservant l'asymptotique (AP). En substance, un schéma AP établit un lien cohérent entre deux échelles reliées par une relation asymptotique et constitue aujourd'hui l'une des approches de calcul multi-échelles les plus largement utilisées en théorie cinétique et dans les domaines connexes. Ce concept a, en particulier, été étendu à un cadre beaucoup plus vaste, tel que le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique par le biais des asymptotiques semi-classiques, ainsi que le passage de la dynamique particulaire à la théorie cinétique via la limite de champ moyen. Nous traiterons chacun de ces aspects dans le présent article.

ABSTRACTS

Body-attitude coordination in arbitrary dimension
Pierre Degond & Antoine Diez & Amic Frouvelle 1

We consider a system of self-propelled agents interacting through body attitude coordination in arbitrary dimension $n \geq 3$. We derive the formal kinetic and hydrodynamic limits for this model. Previous literature was restricted to dimension $n = 3$ only and relied on parametrizations of the rotation group that are only valid in dimension 3. To extend the result to arbitrary dimensions $n \geq 3$, we develop a different strategy based on Lie group representations and the Weyl integration formula. These results open the way to the study of the resulting hydrodynamic model (the "Self-Organized Hydrodynamics for Body orientation (SOHB)") in arbitrary dimensions.

Multi-fidelity methods for uncertainty propagation in kinetic equations
Giacomo Dimarco & Liu Liu & Lorenzo Pareschi & Xueyu Zhu 49

The construction of efficient methods for uncertainty quantification in kinetic equations represents a challenge due to the high dimensionality of the models: often the computational costs involved become prohibitive. On the other hand, precisely because of the curse of dimensionality, the construction of simplified models capable of providing approximate solutions at a computationally reduced cost has always represented one of the main research strands in the field of kinetic equations. Approximations based on suitable closures of the moment equations or on simplified collisional models have been studied by many authors. In the context of uncertainty quantification, it is therefore natural to take advantage of such models in a multi-fidelity setting where the original kinetic equation represents the high-fidelity model, and the simplified models define the low-fidelity surrogate models. The scope of this article is to survey some recent results about multi-fidelity methods for kinetic equations that are able to accelerate the solution of the uncertainty quantification process by combining high-fidelity and low-fidelity model evaluations with particular attention to the case of compressible and incompressible hydrodynamic limits. We will focus essentially on two classes of strategies: multi-fidelity control variates methods and bi-fidelity stochastic collocation methods. The various approaches considered are analyzed in light of the different surrogate models used and the different numerical techniques adopted. Given the relevance of the specific choice of the surrogate model, an application-oriented approach has been chosen in the presentation.

Mean-Field Limits in Statistical Dynamics
François Golse 125

These lectures notes are aimed at introducing the reader to some recent mathematical tools and results for the mean-field limit in statistical dynamics. As a warm-up, lecture 1 reviews the approach to the mean-field limit in classical mechanics following the ideas of W. Braun, K. Hepp and R.L. Dobrushin, based on the notions of phase space empirical measures, Klimontovich solutions and Monge-Kantorovich-Wasserstein distances between probability measures. Lecture 2 discusses an analogue of the notion of Klimontovich solution in quantum dynamics, and explains how this notion appears in Pickl's method to handle the case of interaction potentials with a Coulomb type singularity at the origin. Finally, lecture 3 explains how the mean-field and the classical limits can be taken jointly on quantum N-particle dynamics, leading to the Vlasov equation. These lectures are based on a series of joint works with C. Mouhot and T. Paul.

A new commutator method for averaging lemmas
Pierre-Emmanuel Jabin & Hsin-Yi Lin & Eitan Tadmor 179

These notes investigate averaging lemmas for kinetic equation with heterogeneous fluxes that explicitly depend on the spatial variable. We consider a simplified L^2 setting where the flux is a smooth perturbation of the classical homogeneous flux. We extend the commutator method introduced in [P.-E. Jabin, H.-Y. Lin & E. Tadmor – "Commutator method for averaging lemmas," *Anal. PDE* **15** (2022), p. 1561–1584] to obtain for the first time quantitative regularizing estimates in such heterogeneous settings.

Multiscale Physical Problems: Asymptotics and Asymptotic-Preserving Schemes
Shi Jin & Lei Li & Li Wang & Zhennan Zhou 197

We survey the asymptotic transitions from microscopic to macroscopic physics, and describe the development of multiscale computational methods under the general umbrella of asymptotic preserving (AP) schemes. In essence, the AP scheme bridges two scales that are linked by asymptotic relation in a seamless way, and has become one of the mainstream multiscale computational methods in kinetic theory and related fields. In particular, this concept has been extended to a much broader context, such as bridging the quantum to classical mechanics via semi-classical asymptotics, and particle dynamics to kinetic theory via mean field limit. We will touch upon each of these aspects in this article.