CONNECTIONS BETWEEN GEOMETRY, TOPOLOGY, AND GROUP THEORY IN LOW-DIMENSIONS

(CIRM Jean-Morlet Chair, Spring 2018)

Luisa Paoluzzi and Genevieve S. Walsh (eds.)



Panoramas et Synthèses

Numéro 66

2026

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Samuel BOISSIÈRE
Fabienne CASTELL
Indira CHATTERJI
Anne-Sophie de SUZZONI
Élise GOUJARD
Diego IZQUIERDO
Claire LACOUR
Quentin MÉRIGOT
Sergio SIMONELLA
Todor TSANKOV
Anne MOREAU (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`christian.smf@cirm-math.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 51 € ($ 77)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`panoramas@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2026*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-37905-231-6

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 66

CONNECTIONS BETWEEN GEOMETRY, TOPOLOGY, AND GROUP THEORY IN LOW-DIMENSIONS (CIRM Jean-Morlet Chair, Spring 2018)

Luisa Paoluzzi and Genevieve S. Walsh (eds.)

Société mathématique de France

Luisa Paoluzzi
Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France
E-mail : luisa.paoluzzi@univ-amu.fr
ORCID : 0000-0002-2599-9047

Genevieve S. Walsh
Tufts University, Medford, Massachusetts USA
E-mail : genevieve.walsh@tufts.edu
ORCID : 0000-0001-8850-9562

***Classification mathématique par sujets.* (2020) —** 20F65, 20F67, 57K32, 57M07, 57M60.

***Keywords and phrases.* —** Boundaries of groups, (relatively-)hyperbolic groups, PD_3 groups.

***Mots-clés et phrases.* —** Bords de groupes, groupes (relativement) hyperboliques, groupes à dualité de Poincaré.

CONNECTIONS BETWEEN GEOMETRY, TOPOLOGY, AND GROUP THEORY IN LOW-DIMENSIONS

Luisa Paoluzzi and Genevieve S. Walsh (eds.)

Abstract. **—** This volume collects seven contributions by mathematicians who took part in the activities of the Chair Morlet during the first semester of 2018 whose program focused mainly on the interplay between geometric group theory and low-dimensional topology.

Résumé. **(Connexions entre la géométrie, la topologie, et la théorie des groupes en basse dimension)** **—** Ce volume regroupe sept travaux de mathématiciens qui ont participé aux activités de la Chaire Morlet au premier semestre 2018. Le programme du semestre était centré sur l'interaction entre la théorie géométrique des groupes et la topologie de petite dimension.

TABLE OF CONTENTS

Michael Ben-Zvi & Jiayi Lou & Genevieve S. Walsh — *Hyperbolic boundaries vs. hyperbolic groups* 1

1. Introduction and Preliminaries 1
2. Relatively hyperbolic groups and their boundaries 3
3. More definitions of relatively hyperbolic groups 8
4. What the boundary tells us and the relation to Kleinian groups 13
References 18

Jaewon Chang & Sang-hyun Kim & Thomas Koberda — *Algebraic Structure of Diffeomorphism Groups of One-Manifolds* 21

Introduction 22
1. Main objectives 22
2. Concave moduli 26
3. Simplicity of commutator groups 34
4. Eventually periodic diffeomorphisms 43
5. The norm reduction operator 56
6. Critical regularity of groups of homeomorphisms 73
Acknowledgements 79
References 80

Indira Chatterji & François Dahmani & Thomas Haettel & Jean Lécureux — *Tangent bundles of hyperbolic spaces and proper affine actions on L^p spaces* . 85

Introduction 85
1. Tangent bundle on a metric space 88
2. Actions on L^p-spaces from negatively curved tangent bundles 89
3. Tangent bundles on hyperbolic spaces 90
4. Applications 95
References 96

J.A. Hillman — *PD_3-complexes and PD_3-groups* 99

1. Poincaré duality complexes 100

2. Poincaré duality groups 101
3. Low dimensions 102
4. Reduction to indecomposables 103
5. The aspherical case 106
6. PD_3-pairs 108
References 110

J.A. Hillman — *PD_3-groups and HNN extensions* 113

1. Terminology 114
2. Comparison of splittings 115
3. End modules and indecomposable factors 116
4. The dual class 118
5. No properly ascending HNN extensions 120
6. Residual finiteness, splitting and largeness 120
References 122

G. Christopher Hruska & Kim Ruane — *An introduction to semistability in geometric group theory* 123

1. Introduction 123
2. The fundamental pro-group at infinity 125
3. Significance of semistability 127
4. Semistability in the (0) setting 132
5. Hierarchies and relative hyperbolicity 135
Shape theory and boundaries of (0) groups 138
References 139

Jason Fox Manning — *The Bowditch boundary of (G, H) when G is hyperbolic* . . . 143

1. Introduction 143
2. Proofs of claims 146
References 151

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Bords hyperboliques vs. groupes hyperboliques
Michael Ben-Zvi & Jiayi Lou & Genevieve S. Walsh 1

L'objectif de ces notes est de relier la théorie des groupes hyperboliques et relativement hyperboliques à la théorie des variétés et des groupes kleiniens. Nous donnons également des définitions et de nombreux exemples de groupes relativement hyperboliques et de leurs frontières. Nous passons en revue certains des travaux approfondis qui ont été réalisés dans ce domaine. Ces notes sont basées sur les conférences données par le troisième auteur au CIRM à l'été 2018.

Structure algébrique des groupes de difféomorphismes de variétés de dimension 1
Jaewon Chang & Sang-hyun Kim & Thomas Koberda 21

Il s'agit d'un résultat classique de Mather que le groupe des difféomorphismes de classe C^k d'une variété de dimension n est simple, pour autant qu'une condition d'isotopie modérée soit satisfaite, à l'exception possible du cas $k = n + 1$. Cet article, essentiellement expositif, propose un compte rendu détaillé de la démonstration dans le cas $n = 1$.

La première partie fournit une présentation complète et autonome de la preuve en dimension un. Les articles originaux de Mather requièrent une familiarité avec divers outils analytiques et topologiques – tels que les modules concaves, la fragmentation ou le théorème d'Epstein-Ling – et nous mettons ici l'accent sur les idées centrales, en fournissant le contexte nécessaire. Le cœur technique de la démonstration réside dans la construction d'un opérateur de réduction de norme. Cette analyse nous permet d'affiner le résultat initial de Mather et d'établir la simplicité des groupes de difféomorphismes $C^{k,\alpha}$ de $\mathbb{R}$, où α est un module concave « dompté ». Nous indiquons également comment ces méthodes s'étendent au cas des variétés de dimension $n > 1$.

La seconde partie offre un aperçu de résultats récents concernant les types d'isomorphisme des sous-groupes finiment engendrés de groupes de difféomorphismes en dimension un. En particulier, nos versions affinées des résultats de Mather impliquent que les homomorphismes entre tels groupes, sous des hypothèses relativement faibles sur les modules de continuité, sont fortement contraints.

Espaces tangents d'espaces hyperboliques et actions proprement affines sur les espaces L^p
Indira Chatterji & François Dahmani & Thomas Haettel & Jean Lécureux 85

On définit la notion d'un espace tangent de courbure négative pour un espace métrique mesuré. Si G agit sur un espace métrique mesuré X, avec un espace tangent à courbure négative, on démontre que G agit sur un espace L^p, et que cette action est propre sous des hypothèses adaptées. On vérifie ensuite que ce résultat s'applique lorsque X est un espace hyperbolique.

Complexes PD_3 et groupes PD_3
J.A. Hillman 99

Tout complexe PD_3 possède une factorisation essentiellement unique en tant que somme connexe de complexes indécomposables. Ceux-ci sont soit asphériques, soit ont un groupe fondamental virtuellement libre. Il existe de nombreux exemples du second type qui ne sont pas homotopiquement équivalents à des 3-variétés, mais les groupes possibles sont connus pour la plupart. Cependant, la question de savoir si chaque complexe PD_3 asphérique est homotopiquement équivalent à une 3-variété reste ouverte. Nous présenterons les travaux qui permettent de réduire le problème au cas asphérique, mentionnerons brièvement les problèmes restants liés aux groupes fondamentaux virtuellement libres, et discuterons comment on pourrait montrer que les groupes PD_3 sont des groupes de 3-variété.

Groupes PD_3 et extensions HNN
J.A. Hillman 113

Nous montrons que si un groupe PD_3 G se décompose en extension HNN de forme $G = A * C_\varphi$, où C est un groupe PD_2, alors le dual de Poincaré dans $H^1(G;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ de la classe d'homologie $[C]$ est l'épimorphisme $f : G \to \mathbb{Z}$ avec noyau la fermeture normale de A. Nous proposons également quelques autres observations sur les groupes PD_3 qui se scindent sur des groupes PD_2.

Une introduction à la semi-stabilité en théorie géométrique des groupes
G. Christopher Hruska & Kim Ruane 123

Un groupe de présentation finie est semi-stable à l'infini si tous les rayons propres du 2-complexe de Cayley sont proprement homotopes. La question de savoir si tous les groupes de présentation finie sont semi-stables à l'infini reste ouverte depuis longtemps. Cet article propose une brève introduction à la notion de semi-stabilité à l'infini en théorie géométrique des groupes. Nous y discutons des techniques permettant de démontrer la semi-stabilité à l'infini, techniques qui font intervenir soit la topologie du bord, soit l'existence de certaines hiérarchies de scindements du groupe.

À titre d'illustration de la seconde technique, nous appliquons un théorème de combinaison de Mihalik-Tschantz pour démontrer la semi-stabilité à l'infini de groupes hyperboliques relativement à des sous-groupes polycycliques. Cette démonstration utilise les travaux de Mihalik-Swenson et Louder-Touikan.

Le bord de Bowditch de (G, H) quand G est hyperbolique
JASON FOX MANNING 143

Dans cette note, nous utilisons la caractérisation dynamique des groupes relativement hyperboliques due à Yaman pour donner une nouvelle preuve d'un théorème de Bowditch sur les paires relativement hyperboliques (G, H), avec G hyperbolique. Notre preuve fournit également une description du bord d'une telle paire. Cette description a été obtenue précédemment par Tran [*Internat. J. Algebra Comput.* **23** (2013), p. 1551-1572].

ABSTRACTS

Hyperbolic boundaries vs. hyperbolic groups

MICHAEL BEN-ZVI & JIAYI LOU & GENEVIEVE S. WALSH 1

The aim of these notes is to connect the theory of hyperbolic and relatively hyperbolic groups to the theory of manifolds and Kleinian groups. We also give definitions and many examples of relatively hyperbolic groups and their boundaries. We survey some of the extensive work that has been done in the field. These notes are based on lectures given by the third author at CIRM in the Summer of 2018.

Algebraic Structure of Diffeomorphism Groups of One-Manifolds

JAEWON CHANG & SANG-HYUN KIM & THOMAS KOBERDA 21

It is a classical result of Mather that the group of C^k diffeomorphisms of an n-dimensional manifold is simple, provided a mild isotopy condition is satisfied, with the possible exception of the case $k = n + 1$. This article, essentially expository in nature, gives a detailed account of the proof when $n = 1$.

The first part provides a complete and self-contained presentation of the argument in dimension one. Mather's original articles require familiarity with several analytic and topological tools—such as concave moduli, fragmentation, and the Epstein-Ling theorem and we emphasize here the central ideas while supplying the necessary background. The technical heart of the proof lies in the construction of a norm-reduction operator. This analysis allows us to refine Mather's original result and establish the simplicity of the $C^{k,\alpha}$ diffeomorphism groups of $\mathbb{R}$, where α is a tame concave modulus. We also indicate how these methods extend to manifolds of dimension $n > 1$.

The second part offers a survey of recent results concerning the isomorphism types of finitely generated subgroups of one-dimensional diffeomorphism groups. In particular, our refined versions of Mather's results imply that homomorphisms between such groups, under relatively weak assumptions on the relevant moduli of continuity, are strongly constrained.

Tangent bundles of hyperbolic spaces and proper affine actions on L^p spaces
Indira Chatterji & François Dahmani & Thomas Haettel & Jean Lécureux 85

We define the notion of a negatively curved tangent bundle of a metric measured space. We prove that, when a group G acts on a metric measured space X with a negatively curved tangent bundle, then G acts on some L^p space, and that this action is proper under suitable assumptions. We then check that this result applies to the case when X is a hyperbolic space.

PD_3-complexes and PD_3-groups
J.A. Hillman 99

Every PD_3-complex has an essentially unique factorization as a connected sum of indecomposables, and these are either aspherical or have virtually free fundamental group. There are many examples of the latter type which are not homotopy equivalent to 3-manifolds, but the possible groups are largely known. However the question of whether every aspherical PD_3-complex is homotopy equivalent to a 3-manifold remains open. We shall outline the work which lead to this reduction to the aspherical case, mention briefly remaining problems in connection with indecomposable virtually free fundamental groups, and consider how we might show that PD_3-groups are 3-manifold groups.

PD_3-groups and HNN extensions
J.A. Hillman 113

We show that if a PD_3-group G splits as an HNN extension $A *_C \varphi$ where C is a PD_2-group then the Poincaré dual in $H^1(G;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ of the homology class $[C]$ is the epimorphism $f : G \to \mathbb{Z}$ with kernel the normal closure of A. We also make several other observations about PD_3-groups which split over PD_2-groups.

An introduction to semistability in geometric group theory
G. Christopher Hruska & Kim Ruane 123

A finitely presented group is semistable at infinity if all proper rays in the Cayley 2-complex are properly homotopic. A long standing open question asks whether all finitely presented groups are semistable at infinity. This article provides a brief introduction to the notion of semistability at infinity in geometric group theory. We discuss techniques for proving semistability at infinity that involve either the topology of the boundary or the existence of certain hierarchies of splittings of the group.

As an illustration of the second technique, we apply a combination theorem of Mihalik-Tschantz to prove semistability at infinity for groups that are hyperbolic relative to polycyclic subgroups using work of Mihalik-Swenson and Louder-Touikan.

The Bowditch boundary of (G, H) when G is hyperbolic
Jason Fox Manning 143

In this note we use Yaman's dynamical characterization of relative hyperbolicity to prove a theorem of Bowditch about relatively hyperbolic pairs (G, H) with G hyperbolic. Our proof additionally gives a description of the Bowditch boundary of such a pair. This description of the boundary was previously obtained by H. C. Tran [Relations between various boundaries of relatively hyperbolic groups, *Internat. J. Algebra Comput.* **23** (2013), p. 15511572].

INTRODUCTION

Interactions between low dimensional topology and geometry on one side and geometric group theory on the other have been very fruitful for both domains. Indeed, the theory of cube complexes and techniques from non-positively curved spaces and right-angled Artin groups have revolutionized the study of 3-manifolds. Likewise, many important concepts in geometric group theory, such as convergence groups, quasi-convex subgroups, and boundaries of groups, originated with the study of discrete groups of isometries of $\mathbb{H}^2$ and $\mathbb{H}^3$. These interactions motivated us to organize a semester in low-dimensional topology and geometric group theory at CIRM (The Centre International de Rencontres Mathématiques) in Luminy, France during the first half of 2018.

This volume collects seven contributions by mathematicians who took part in the activities organized at CIRM during the semester. The program focused mainly on the interplay between geometric group theory and low-dimensional topology. Relationships between these two fields are continuing to expand. Conjectures discussed during the semester, such as the Wall Conjecture, the Farrell-Jones Conjecture, and conjectures about profinite completions, are still open and the subject of very active research. Furthermore, works on properties of infinite-index subgroups, like their geometry or coherence, as well as advances in understanding groups similar to 3-manifold groups, have been the focus of several conferences since this semester happened. We are excited about emerging connections between these fields, such as understanding aspherical word-hyperbolic 4-manifolds and free-by-cyclic groups.

The contributions presented here touch upon a variety of problems in the domain reflecting the scope of the subject. Some of them concern also other closely related fields, like dynamical systems and higher-dimensional manifolds. The contributions cover not only a wide spectrum of topics, but also range from expository and overview content to research papers. An brief description of each work is provided in Section 2.

1. Brief description of the semester

During the semester three main activities were organized: a large conference, a school, and a workshop. Besides these, two one-week "Researches in Pairs" also took place.