Revue d'histoire des mathématiques,
6 (2000), p. 219–269.

LA POLÉMIQUE ENTRE POINCARÉ ET RUSSELL AU SUJET DU STATUT DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Philippe NABONNAND (*)

RÉSUMÉ. — Avant leur célèbre polémique sur la logistique, Poincaré et Russell s'étaient déjà publiquement opposés sur la question du statut des axiomes de la géométrie. Les débats philosophiques de la fin du XIX^e siècle autour de la géométrie et de la théorie de l'espace influent de manière significative sur la conception et le développement de la géométrie. Le but de cet article est de montrer comment les mathématiques sont mises au service des thèses soutenues par Poincaré et Russell et d'analyser quelle influence ces thèses peuvent avoir sur leurs conceptions géométriques.

ABSTRACT. — THE POLEMIC BETWEEN POINCARÉ AND RUSSELL ABOUT THE STATUS OF THE AXIOMS OF GEOMETRY. — Before their well-known dispute over logistics, Poincaré and Russell polemized over the status of the axioms of geometry. At the close of the 19th century, philosophical discussions about geometry and space theory strongly influenced both the idea and the development of geometry. This paper stresses how Poincaré and Russell used mathematics to support their philosophical arguments, and shows, conversely, how their respective philosophical stances influenced their thoughts about geometry.

INTRODUCTION

Durant le XIX^e siècle, l'émergence des géométries non-euclidiennes et de la physique mathématique d'une part, la prise de conscience au sein de la communauté des mathématiciens de la nécessité d'un travail réflexif centré sur des exigences de rigueur d'autre part, rendent particulièrement cruciales les questions de fondements de la géométrie. On ne peut pas appréhender cette histoire sans prendre en compte l'étroite imbrication de ses aspects mathématiques et philosophiques : au début du XIX^e siècle,

(*) Texte reçu le 27 septembre 1999, révisé le 2 mars 2001.
P. NABONNAND, Université de Nancy 2, Archives Henri Poincaré, 23 bd. Albert 1^er, BP 3397, 54015 Nancy Cedex (France).
Courrier électronique : Philippe.Nabonnand@plg.univ-nancy2.fr.

Mots clés : histoire de la géométrie, conventionnalisme, Poincaré, Russell.

Classification AMS : 01A55, 01A60, 51–03.

© SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 2000

avant l'apparition des géométries non-euclidiennes, les notions d'espace physique, intuitif ou abstrait n'étaient pas dégagées. On pouvait donc se contenter d'admettre comme données préalables la notion d'espace et quelques constructions géométriques. À la fin du XIX^e siècle, la reconnaissance des géométries non-euclidiennes « conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle » [Enriques 1912, p. 3] ; en même temps que leurs efforts tendaient à déterminer un système aussi complet que possible d'axiomes ou encore à produire divers modèles des géométries non-euclidiennes, les mathématiciens intervinrent aussi directement dans le champ de la philosophie en posant les questions du statut des axiomes de la géométrie et de l'origine de nos conceptions géométriques.

Le débat philosophique sur le statut des axiomes de la géométrie opposait les tenants de la philosophie critique de Kant et les empiristes. La conception kantienne de l'espace s'articule essentiellement (au moins pour notre propos) autour de deux thèses :

(T1) l'espace est une intuition pure ;

(T2) les axiomes de la géométrie sont des jugements synthétiques *a priori*.

Pour un kantien, les conceptions spatiales sont donc des conditions nécessaires à toute expérience. Les empiristes s'appuient quant à eux sur l'existence des géométries non-euclidiennes pour considérer la géométrie comme une science expérimentale. Pour un empiriste, les conceptions spatiales proviennent de l'expérience.

Helmholtz occupe une position intermédiaire en défendant un empirisme modéré : il considère l'existence de corps solides comme une condition nécessaire à toute possibilité de mesure et donc à celle de la géométrie. Par contre, l'existence de tels corps n'est jamais affirmée comme une vérité expérimentale. Poincaré s'oppose à la fois aux thèses kantiennes et empiristes en défendant une position conventionnaliste : les axiomes de la géométrie ne sont pas des jugements synthétiques *a priori*, parce qu'alors, « il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation » [Poincaré 1887, p. 90] ; ils ne sont pas non plus des faits expérimentaux car, dans ce cas, la géométrie perdrait son caractère de science exacte. Pour Poincaré, les axiomes de la géométrie sont des conventions et la question de leur vérité n'a donc aucun sens. Mais 'conventionnel' ne

signifie pas pour autant arbitraire. En effet, l'expérience nous guide dans le choix des conventions les plus commodes.

Ces débats ne sont pas sans conséquences sur le développement de la géométrie. Enriques soulignait dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* [1912] avec justesse qu'à travers ces discussions, tant mathématiques que philosophiques, se faisait jour une conception nouvelle purement abstraite de la géométrie, dégagée des considérations sur l'espace physique ou intuitif.

Le but principal de cet article est de montrer, à partir de l'étude de la polémique entre Poincaré et Russell sur le statut des axiomes de la géométrie[1], l'importance de ces débats philosophiques sur l'évolution de la conception de la géométrie et même sur son développement. En affirmant qu'« une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre » [Poincaré 1902a, p. 76], le conventionnalisme géométrique reconnaissait à la géométrie son autonomie et y contribuait. De plus, en considérant que l'expérience sur les corps solides réels nous guide dans le choix d'une convention, Poincaré est amené à privilégier la présentation de la géométrie comme étude d'un groupe de transformations. D'un autre côté, les positions purement épistémologiques[2] de Russell et son refus des considérations psychologiques l'amenaient à adopter au contraire une présentation axiomatique de la géométrie. Cette controverse est caractéristique de la fin des débats philosophiques initiés par l'émergence des géométries non-euclidiennes : au delà de leurs divergences philosophiques, les deux protagonistes admettent des thèses qui, directement ou indirectement, plaident pour l'émancipation de la géométrie des questions liées à la théorie de l'espace. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons moins à

[1] Russell et Poincaré s'opposent entre 1899 et 1900 sur cette question dans trois articles publiés dans la *Revue de métaphysique et de morale* : « Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell » [Poincaré 1899], « Sur les axiomes de la géométrie » [Russell 1899a] et « Sur les principes de la géométrie, réponse à M. Russell » [Poincaré 1900]. Une autre importante source concernant cette polémique est la correspondance échangée par Russell et Louis Couturat. Cette correspondance est conservée aux Archives de la bibliothèque municipale de La-Chaux-de-Fond (Suisse). Elle sera prochainement (2001) éditée et commentée par Anne-Françoise Schmidt. Toretti [1978] étudie les thèses de Russell dans son livre *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, sans insister cependant sur la polémique entre Poincaré et Russell.

[2] Le terme « épistémologique » est utilisé tout au long de cet article au sens anglo-saxon de « relevant de la théorie des fondements de la connaissance ».

l'exposé des thèses philosophiques en présence qu'à étudier comment les mathématiques sont mises au service de ces thèses et analyser comment celles-ci influent sur la présentation des résultats de géométrie ainsi que sur la conception de la géométrie des protagonistes.

Dans la partie 1, la chronologie et le contexte éditorial sont présentés. La partie 2 est consacrée à un rapide rappel du conventionnalisme géométrique de Poincaré (§§ 2.1 et 2.2) et à une présentation d'une première polémique entre Poincaré et Couturat (§ 2.3). Les thèses soutenues par Russell dans son traité *An Essay on the Foundations of Geometry* [1897] et la polémique qu'elles suscitent avec Poincaré sont exposées dans les parties 3, 4 et 5. Les enjeux de cette polémique sont évidemment philosophiques, mais celle-ci porte également sur des points techniques mathématiques. Ainsi, un des points essentiels de cette controverse concerne les fondements de la géométrie projective. Les critiques de Poincaré amèneront Russell[3] à abandonner une première version trop vague et imprécise des axiomes de la géométrie projective et à adopter une axiomatique inspirée de celle de Pieri (§ 3.5). La question des conditions nécessaires à la possibilité de la mesure et celle du statut de la définition de la distance sont l'occasion pour Poincaré de nier la possibilité de définir une distance indépendamment du choix d'une géométrie et par-là de réaffirmer son conventionnalisme géométrique (§ 4.2). La discussion se poursuit sur la notion de définition (§ 4.3). Russell distingue la définition mathématique qui pose simplement une relation entre différents termes et la définition philosophique qui intègre selon lui une exigence de compréhension. Nous terminerons l'analyse de cette polémique par la discussion sur la possibilité d'expériences spatiales cruciales (partie 5).

1. PRÉSENTATION ET RÉSUMÉ DE LA POLÉMIQUE ENTRE RUSSELL ET POINCARÉ

Cette polémique ne peut être comprise sans évoquer le contexte d'intense activité en France autour de la question des fondements de la géométrie, dans le cadre, en particulier, de la nouvelle *Revue de*

[3] On peut penser que Poincaré n'est pas le seul responsable du changement de point de vue de Russell. En effet, à cette époque (1899–1900), Russell commençait à lire les travaux de l'école italienne, entre autres ceux de Pieri et Peano, sur les questions de logique et de fondements des mathématiques.

métaphysique et de morale[4]. En effet, dès sa création autour de Xavier Léon et Élie Halévy, la *Revue* s'est voulue lieu d'échanges entre philosophes et savants. Ainsi, Poincaré publie dans ses deux premiers volumes les articles « Sur le continu mathématique » [Poincaré 1893] et « Sur la nature du raisonnement mathématique » [Poincaré 1894] ; Couturat, philosophe ayant reçu une solide formation en mathématiques, rejoint son comité de direction et établit des contacts avec de nombreux scientifiques, logiciens et philosophes des sciences.

La *Revue de métaphysique et de morale* publie avec la *Revue philosophique* une grande partie des nombreux travaux philosophiques sur les fondements de la géométrie qui sont menés en France à cette époque. Outre Poincaré et Couturat, on peut citer parmi les plus importants auteurs le néo-kantien Charles Renouvier, Auguste Calinon et Georges Lechalas qui défendent tous deux des conceptions intermédiaires entre rationalisme et conventionnalisme, Jules Andrade qui prône plutôt une conception empiriste de la géométrie. Ces travaux font l'objet de nombreuses controverses ; ainsi, une première polémique au sujet de la géométrie oppose Couturat et Poincaré dans les colonnes de la *Revue* ([Couturat 1896], [Poincaré 1897]). Couturat y défend la théorie kantienne de l'espace et attaque le conventionnalisme de Poincaré.

La controverse entre Poincaré et Russell est provoquée par un article de Couturat [1898] publié dans la *Revue* rendant compte du livre de Bertrand Russell *An Essay on the Foundations of Geometry* [1897]. Cet ouvrage est la rédaction de son travail de thèse (Trinity College, Cambridge 1895) et de ses leçons sur les fondements de la géométrie aux États-Unis (Bryn Mawr College, 2–20 novembre 1896 et Johns Hopkins University, 2–11 décembre 1896). Il s'inscrit dans les diverses tentatives de concilier les développements de la géométrie au cours du XIX^e^ siècle avec la thèse kantienne selon laquelle « si la géométrie a une certitude apodictique, son objet, l'espace, est *a priori* ; et réciproquement » [Couturat 1898, p. 355]. Ces thèses sont donc fort éloignées du programme logiciste que Russell commencera à développer en 1903 avec *The Principles of Mathematics*[5].

[4] Pour plus de précisions sur la création et les débuts de la *Revue de métaphysique et de morale*, on peut consulter le mémoire de maîtrise de P. Touvet, « L'histoire des sciences et la logique », dans la *Revue de métaphysique et de morale*, Nancy 2, 1995.

[5] Russell reniera son premier ouvrage de philosophie qui ne sera réédité qu'en 1956