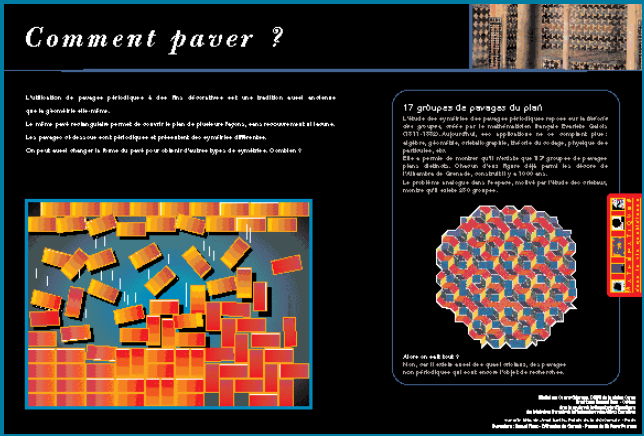


Comment paver ?

L'utilisation de pavages périodiques à des fins décoratives est une tradition aussi ancienne que la géométrie elle-même.
Le même pavé rectangulaire permet de couvrir le plan de plusieurs façons, sans recouvrement ni lacune.
Les pavages ci-dessus sont périodiques et présentent des symétries différentes ...
On peut aussi changer la forme du pavé pour obtenir d'autres types de symétries.
Combien ?

LES 17 GROUPES DE PAVAGES
L'étude des symétries des pavages périodiques repose sur la théorie des groupes, créée par le mathématicien français Evariste Galois (1811-1832). Aujourd'hui, ses applications ne se comptent plus : algèbre, géométrie, cristallographie, théorie du codage, physique des particules, etc.
Elle a permis de montrer qu'il n'existe que 17 groupes de pavages plans distincts. Chacun d'eux figure déjà parmi les décors de l'Alhambra de Grenade, construit il y a 1000 ans. Le problème analogue dans l'espace, motivé par l'étude des cristaux, montre qu'il existe 230 groupes.

Alors, on sait tout ?
Non, car il existe aussi des quasi-cristaux, des pavages non périodiques qui sont encore l'objet de recherches.

Texte de Maurice Mashaal, Journaliste scientifique
Sur une idée de Jean Brette (Palais de la découverte - Paris)
Graphisme : Samuel Roux - Orléans

Pour aller plus loin :

M. Duneau et C. Janot, *La magie des matériaux*, Odile Jacob, 1996.
H. Weyl, *Symétrie et mathématique moderne*,
Flammarion (coll. Champs), 1996 (réimp. de l'édition française de 1964).
Article “ Cristaux ” dans *Encyclopædia Universalis.*
B. Grünbaum et G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Company, 1987.

l'on effectue sur le pavage une translation de vecteur $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, avec m et n entiers, on retombe sur exactement le même pavage (voir illustration 1). Or il est facile de vérifier que l'ensemble des translations de vecteur $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, avec m et n entiers, constitue un groupe. Ce groupe de translations fait partie des symétries du pavage, à savoir les transformations géométriques du plan qui laissent parfaitement inchangé l'ensemble de la figure (l'ensemble de ces symétries est un groupe).

Aux translations s'ajoutent les éventuelles symétries du motif de base lui-même. Par exemple, dans un carrelage constitué de carrés simples (sans dessin), chaque carré est invariant par rapport à une rotation d'angle multiple de 90° autour de son centre (toutes ces rotations forment un groupe).

Pour déterminer tous les pavages périodiques possibles, il faut vérifier que les symétries propres du motif de base soient compatibles avec la symétrie de translation associée à la périodicité. C'est ainsi que l'on a démontré que l'on peut paver périodiquement le plan uniquement avec des carrés des triangles, des parallélogrammes, des hexagones, mais pas avec des pentagones réguliers. Plus généralement, ces analyses ont permis de classer les pavages périodiques, en fonction de leur groupe de symétrie. Dans le cas du plan, on a ainsi démontré qu'il existe exactement 17 groupes de symétrie possibles, soit essentiellement 17 façons de paver périodiquement le plan (même si l'on peut varier à l'infini le dessin porté par chaque motif de base). Chose remarquable, ces 17 possibilités seraient toutes présentes dans les ornements du palais de l'Alhambra, à Grenade.

La structure de groupe

Un groupe G est un ensemble d'éléments muni d'une opération * (dont le résultat appartient aussi à G), avec les propriétés suivantes :

1) Associativité :
quels que soient les éléments **x** , **y** , **z** de G, on a

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

2) Existence d'un élément neutre : il existe dans G un élément **e** tel que, pour tout **x** de G, on ait

$$x * e = e * x = x.$$

3) Existence des éléments inverses : pour tout **x** dans G, il existe un élément **x'** tel que

$$x * x' = x' * x = e.$$

L'ensemble des entiers (positifs et négatifs), avec l'addition usuelle, constitue un groupe (élément neutre : l'entier 0).
Un autre exemple est l'ensemble des translations dans le plan, l'opération * étant ici la composition des applications (élément neutre de ce groupe : la translation de vecteur nul).
Un groupe n'est pas forcément commutatif (c'est-à-dire **x * y** n'est pas toujours égal à **y * x**) ; ainsi, dans le groupe constitué par les rotations autour d'un point dans l'espace, le résultat de l'application de deux rotations d'axes différents dépend de l'ordre dans lequel ces deux rotations sont effectuées.

Hommage aux pavages

Recouvrir le plan ou remplir l'espace avec des éléments de formes bien déterminées: ce problème, mathématiciens, artistes ou cristallographes se le sont posé. Il est loin d'être épuisé.

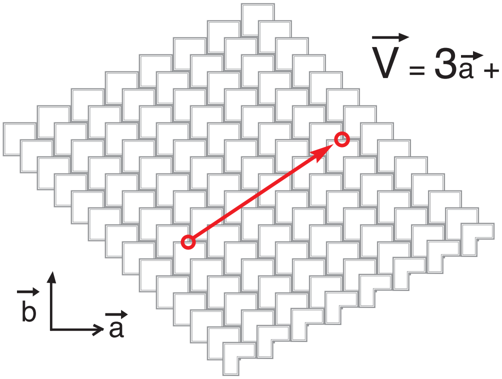
Vous voulez tester le professionnalisme de votre carreleur ? Demandez-lui de remplacer le carrelage de votre salle de bain, composé de banals rectangles verts tous identiques, par des carreaux bleus ayant la forme d'un pentagone régulier (cinq côtés égaux, cinq angles égaux). Si le carreleur vous dit “ oui ” sans sourciller, vous avez du souci à vous faire ! En effet, il est impossible de paver le plan avec de tels carreaux sans laisser des trous. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer d'accoler plus de trois pentagones autour d'un même point.

Maintenant, voulez-vous vous fâcher définitivement avec le carreleur ? Dites-lui que vous avez lu quelque part qu'on peut réaliser un pavage ayant globalement l'allure d'un assemblage de pentagones, à condition d'utiliser deux types de carreaux en forme de losanges (ayant même côté mais dont l'angle aigu vaut 36° pour les uns, 72° pour les autres), et insistez pour qu'il vous en fasse un. À moins qu'il n'ait un goût prononcé pour les mathématiques, pour l'originalité ou pour la difficulté, vous ne le reverrez pas de sitôt.

À la décharge du malheureux carreleur, la question des différentes manières de recouvrir un plan sans laisser de trous n'est pas simple. Le cas des pavages périodiques, où un même motif se répète indéfiniment et régulièrement, a été rigoureusement résolu seulement à la fin du XIX^{e} siècle. Et pour cause : l'outil nécessaire, la théorie des groupes, n'a fait son apparition qu'avec les recherches d'Évariste Galois (1811-1832) sur la résolubilité des équations algébriques (les équations de degré 2, 3, 4, etc., à une inconnue).

Un groupe, c'est un ensemble quelconque dans lequel est définie une opération permettant de combiner deux éléments pour en donner un troisième, et vérifiant trois propriétés simples (voir l'encadré). Malgré leur apparente simplicité, ces objets mathématiques sont extrêmement répandus et divers, et leur étude approfondie se révèle très riche. Mais quel est le rapport entre les pavages périodiques et la théorie des groupes ? Réponse : les symétries.

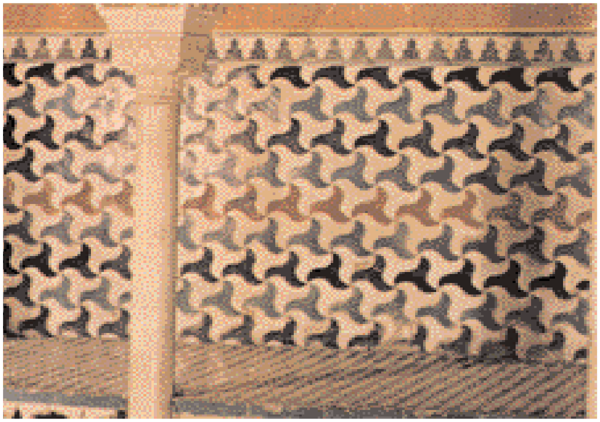
A un pavage périodique est associée une symétrie évidente, celle de translation. Dans le plan par exemple, le motif de base se répète régulièrement selon deux directions différentes ; il existe donc deux vecteurs fixes **a** et **b** tels que, si



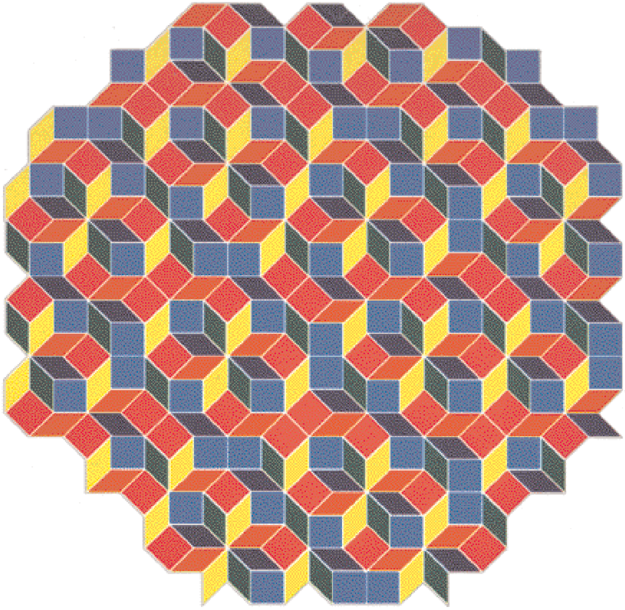
1. Un pavage périodique dans le plan
Ce dessin (étendu en principe à tout le plan) se superpose exactement à lui-même lorsqu'on le translate du vecteur **V** = 3**a** + 2**b** par exemple. Les translations de vecteur *m***a** + *n***b**, avec *m* et *n* entiers, forment un groupe ; celui-ci constitue une partie du groupe des symétries du pavage.

Le même problème, mais dans l'espace cette fois, était celui des cristallographes, puisque les cristaux sont caractérisés par une structure atomique ou moléculaire périodique. Là, on a dénombré 230 groupes de symétrie possibles, c'est-à-dire 230 types de réseaux cristallins possibles (que les cristallographes classent en quatorze “réseaux de Bravais”). Les cristaux que l'on a trouvés jusqu'ici dans la nature réalisent 227 d'entre eux...

Et si l'on s'affranchit de la contrainte de stricte périodicité ? C'est encore plus riche et compliqué, et les recherches sur le sujet se poursuivent. Un exemple célèbre est constitué par les pavages plans apériodiques créés vers 1974 par le mathématicien britannique Roger Penrose (voir l'illustration 2). Constitués de deux types de losanges, ces pavages ont la particularité d'être *presque* périodiques et de présenter globalement une symétrie pentagonale, qui serait interdite dans un pavage rigoureusement périodique. À la surprise générale, des matériaux présentant des structures analogues ont été obtenus pour la première fois en 1984 : il s'agit des quasi-cristaux, dont la structure et les propriétés physiques font l'objet de nombreuses études.



Pavages de l'Alhambra



2. Un pavage de Penrose

Il existe une infinité non dénombrable de pavages de Penrose distincts, tous réalisables avec ces deux seules pièces en losange. Aucun d'eux n'est périodique, mais un tel pavage possède certaines propriétés proches de la périodicité. Par exemple, si on le fait glisser selon le côté d'un des losanges, presque tous les sommets du pavage décalé se superposent à un sommet du pavage de départ. Ou encore, n'importe quel domaine choisi dans le pavage se retrouve à une infinité d'autres endroits. Mieux : il figure une infinité de fois dans n'importe quel autre pavage de ce type ! On peut par ailleurs remarquer la présence de motifs possédant une symétrie d'ordre 5, c'est-à-dire invariants par des rotations d'angle 360°/5 = 72°, ce qui serait impossible dans un pavage périodique.