

Daniel Kastler

et les Systèmes dynamiques non commutatifs

A.Guichardet

1. Introduction.

Reçu premier à l'agrégation de mathématiques en 1949, Daniel Kastler bénéficiait d'une solide formation en cette matière et il l'a rapidement mise à profit ; la revue en ligne Math. Sci. Net recense une centaine de ses publications ; la première (Sur l'espace de la Théorie Quantique des Champs, Ann. Univ. Sarav. , 4, 1955, 206-237) est une présentation rigoureuse des espaces hilbertiens et de leurs algèbres tensorielles symétriques et antisymétriques. Suivent, de 1956 à 1964, une quinzaine de travaux liés, de près ou de loin, à la Théorie Quantique des Champs (TQC) et à la Mécanique Statistique (MS) ; ils seront analysés ci-dessous, après un bref exposé sur l'état, plutôt critique, où se trouvait la TQC dans les années 1950 . Nous avons arrêté notre recension au moment où interviennent la Théorie de Tomita-Takesaki et les Etats K.M.S., toutes choses qui nécessiteraient de beaucoup plus amples prérequis mathématiques ...

Voici comment A.S.Wightman présentait l'état de la Théorie Quantique des Champs (conférence au Colloque de Lille, 1957) avant d'introduire la méthode axiomatique qui porte son nom.

Depuis environ 1936, nous nous trouvons en présence d'une situation assez curieuse et compliquée [...] On s'attendait, pour des raisons physiques, à ce que les équations fondamentales de ces théories soient incohérentes, parce qu'elles se modèlent sur des théories classiques dont les équations sont elles-mêmes incohérentes. En vérité, l'incompatibilité existe et se révèle particulièrement à l'occasion des soi-disant infinis : les équations de la théorie, interprétées de n'importe quelle manière raisonnable, prédisent des résultats mal définis ou infinis pour des quantités physiques qui devraient être finies.

Ajoutons que cette théorie, mal établie mais convenablement manipulée, avait tout de même fourni des résultats spectaculaires dans la théorie de L'Electro Dynamique Quantique !

2. Premières apparitions des algèbres d'opérateurs en Théorie Quantique des Champs.

L'un des premiers problèmes qui se posent dans cette théorie est la définition des *observables locales*. Rappelons que, selon l'axiomatique de la Mécanique Quantique donnée par von Neumann dans son traité de 1932, les *observables* d'un système quantique sont représentés mathématiquement par des opérateurs autoadjoints, bornés ou non, dans un certain espace hilbertien H , et les *états physiques* par des formes linéaires continues φ positives (i.e. $A \geq 0 \Rightarrow \varphi(A) \geq 0$) sur $L(H)$. Notons que ces opérateurs s'additionnent difficilement (problèmes de domaines de définition) et ne se multiplient pas, la seule opération possible d'une façon naturelle étant l'élévation à une puissance entière (plus généralement, le calcul fonctionnel). Cela rend évidemment difficile la recherche de structures mathématiques pour représenter des ensembles d'observables.

I.E.Segal a proposé en 1947 une structure consistant en un espace vectoriel réel normé muni d'une opération $U \mapsto U^n$, structure dont l'exemple fondamental est l'ensemble des éléments autoadjoints d'une C^* -algèbre. Il a proposé au Colloque de Lille, 1957, une construction plus précise pour représenter les *observables de champ*: une C^* -algèbre contenue dans le produit tensoriel de l'espace des tenseurs symétriques sur l'espace hilbertien des bosons, et de l'espace des tenseurs antisymétriques sur l'espace hilbertien des fermions.

Durant le même Colloque, s'appuyant sur les axiomes de Wightman, R.Haag associe à certaines régions de l'espace-temps des anneaux représentant certaines grandeurs localisées dans ces régions ; le groupe de Lorentz inhomogène opère sur l'ensemble de ces algèbres. Un peu plus tard (Nuovo Cimento, 1962), Haag introduit l'algèbre de von Neumann engendrée par certaines fonctions bornées des opérateurs de champs $\psi_r(x)$ et de leurs adjoints $\psi_r^*(x)$; cela lui permet de caractériser certaines propriétés physiques du champ par l'irréductibilité de certaines représentations de cette algèbre de von Neumann. Citons aussi, dans le même ordre d'idées, R.Haag et B.Schroer, 1962.

3. Deux travaux fondateurs.

3.1. Article de Haag, Kastler, 1964 (*Axiomes de Haag, Kastler*).

Ce travail est considéré comme la fondation de la Formulation algébrique de la TQC, laquelle constitue "*une des théories les plus importantes de la physique théorique*". Il place les travaux cités plus haut dans un contexte

mathématiquement plus rigoureux. Le point de départ est le *Principe de Localité*, selon lequel « *il est raisonnable de parler d'observables que l'on peut mesurer dans une région de l'Espace-temps, et que des observables dans des régions causalement disjointes sont toujours compatibles* ».

La théorie de Haag et Kastler consiste en la donnée d'une C^* -algèbre A et d'une application $B \mapsto A(B)$ où B parcourt l'ensemble des parties ouvertes bornées de l'Espace-temps, et où les $A(B)$ sont des sous- C^* -algèbres de A satisfaisant les conditions suivantes :

- . A est la C^* -algèbre engendrée par les diverses $A(B)$
- . cette application est croissante
- . si B_1 et B_2 sont mutuellement de type espace (*space-like*) les sous-algèbres associées commutent
- . A admet une représentation irréductible fidèle
- . le groupe de Lorentz inhomogène opère dans A par automorphismes de façon que l'application $B \mapsto A(B)$ soit covariante.

Voici quelques indications sur l'interprétation physique de cette théorie.

- . Les éléments de A représentent les *observables quasi-locales* du système physique étudié.
- . Les *états physiques* du système sont représentés par les *états* (mathématiques) de A : formes linéaires continues φ sur A , positives (i.e. $a \geq 0 \Rightarrow \varphi(a) \geq 0$) et telles que $\varphi(I) = 1$.
- . Les diverses représentations irréductibles fidèles de A correspondent aux divers *secteurs de supersélection* du système physique.

Quelques rappels mathématiques.

A tout état φ d'une C^* -algèbre A on peut associer canoniquement une représentation π_φ de A dans un espace hilbertien H_φ et un vecteur totalisateur (dit aussi *cyclique*) $\xi_\varphi \in H_\varphi$ de façon que, pour tout $a \in A$, $\varphi(a) = (\pi_\varphi(a).\xi_\varphi | \xi_\varphi)$. Si de plus φ est invariant par l'action d'un groupe G opérant par automorphismes dans A , il existe une représentation unitaire U_φ de G dans H_φ telle que $\pi_\varphi(g.a) = U_\varphi(g).\pi_\varphi(a).U_\varphi(g)^{-1}$ (on dit alors que le couple (U_φ, π_φ) est une *représentation covariante* du couple (G, A)) et que ξ_φ soit invariant par U_φ .

Retour à la théorie de Haag et Kastler.

Les auteurs complètent de la façon suivante l'interprétation physique de leur approche algébrique :

- . dans le cas de la TQC, G étant le groupe de Lorentz, tout vecteur U_φ -invariant de H_φ représente un *état de vide*, et il est important de savoir si un tel vecteur est unique.
- . dans le cas de la MS, G étant le groupe $\mathbb{R}$ de l'évolution temporelle, tout vecteur U_φ -invariant représente un *état stationnaire* ; parmi ces états, il est alors important de caractériser les *états d'équilibre* (cf. Haag, Kastler, Trych-Pohlmayer, Commun. Math. Phys., 38, 1974, 173-193), et de préciser la nature du générateur infinitésimal de U_φ .

3.2. Article de Doplicher, Kastler, Robinson, 1966 (*Covariance algebras*).

On considère une C^* -algèbre A sur laquelle opère par automorphismes un groupe localement compact G supposé ici abélien ; on munit l'espace de Banach $L^1(G, A)$ d'une multiplication et d'une involution définies respectivement par

$$(F_1 F_2)(g) = \int F_1(h) \cdot (h F_2(h^{-1}g)) dh, \quad F^*(g) = g F(g^{-1}).$$

On appelle *covariance algebra* la C^* -algèbre $C^*(G, A)$ complétée de $L^1(G, A)$ pour une seconde norme : borne supérieure des normes obtenues dans toutes les représentations de $L^1(G, A)$ dans des espaces hilbertiens. Cette algèbre est maintenant appelée *produit croisé* de G par A ; elle a été introduite indépendamment par G. Zeller-Meier (J. Math. pures appl., 47, 1968, 101-239).

L'intérêt de cette construction est qu'il existe une bijection canonique entre représentations covariantes (U, π) du couple (G, A) et représentations de l'algèbre $C^*(G, A)$. Prenant $G = \mathbb{R}^4$, on caractérise les représentations de l'algèbre $C^*(G, A)$ pour lesquelles la mesure spectrale de U est incluse dans une partie donnée du cône de lumière : ce sont les représentations nulles sur un certain idéal.

Systemes asymptotiquement abéliens.

On suppose ici $G = \mathbb{R}^3$; on dit que le système (G, A) est *asymptotiquement abélien* si, pour tous a, b de A , $\|gab - b.ga\| \rightarrow 0$ lorsque $|g| \rightarrow \infty$.

Etats *clustering* et *weakly clustering*.

Un état invariant φ de A est dit *clustering* (on dit aussi *mixing* ou *mélangeant*) si, pour tous a, b , $\varphi(gab) \rightarrow \varphi(a)\varphi(b)$ lorsque $|g| \rightarrow \infty$, et *weakly clustering* si une certaine moyenne invariante sur $G = \mathbb{R}^3$, dite *moyenne de Wiener*, de la fonction $g \mapsto \varphi(gab) - \varphi(a)\varphi(b)$ est nulle. On donne diverses caractérisations des états invariants qui sont *weakly clustering*. Nous verrons plus loin que, sous certaines conditions, les états invariants *weakly clustering* sont exactement les états invariants extrémaux.

Interprétation physique.

Systèmes asymptotiquement abéliens : si on considère deux observables dont l'une est translatée loin dans une certaine direction, elles doivent devenir indépendantes, i.e. les opérateurs qui les représentent doivent commuter.

Etats invariants *clustering* : les moyennes d'espace des observables locales sont constantes dans les représentations correspondantes de A .

4. Etude des états invariants.

4.1. Préliminaires.

Les considérations qui précèdent motivent une étude approfondie des états invariants d'un système (G, A) ; ce sera l'objet des articles [8] à [16] (D.Kastler n'a pas cosigné l'article [10], mais il était évidemment très proche de ses auteurs).

Quelques notations.

Nous reprendrons les notations $\varphi, H_\varphi, U_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi$ introduites au n° 3 ; en outre nous noterons S l'ensemble des états invariants – ensemble convexe et compact pour la topologie faible du dual de A – et S_e l'ensemble de ses éléments extrémaux. Pour tout état invariant φ , nous noterons R_φ l'algèbre de von Neumann engendrée par $U_\varphi(G) \cup \pi_\varphi(A)$, et par P_φ le projecteur sur l'ensemble des vecteurs U_φ -invariants de H_φ .

Rappelons que, si S est une partie convexe et faiblement compacte du dual d'un espace de Banach, tout élément de S est barycentre d'au moins une mesure positive normée portée par S_e , et qu'une telle mesure est unique si et seulement si S est un *simplexe* au sens de Choquet.

4.2. Article de Kastler, Robinson, 1966.

On suppose le système (G, A) asymptotiquement abélien, et $G = \mathbb{R}^3$. On a alors les résultats suivants :

- . Tout état invariant peut être décomposé, et d'une façon unique, en une intégrale d'états invariants *weakly clustering*.
- . Pour un état invariant φ , les conditions suivantes sont équivalentes :
 - φ est *weakly clustering*
 - $\dim P_\varphi = 1$ (*représentation à vide unique*)
 - la représentation covariante (U_φ, P_φ) est irréductible
 - $\varphi \in S_e$.

4.3. Article de Lanford, Ruelle, 1967.

On dit qu'un système (G, A) est *G-abélien* (condition plus faible que *asymptotiquement abélien*) si, pour tout état invariant φ , l'algèbre de von Neuman engendrée par $P_\varphi \pi_\varphi(A) P_\varphi$ est abélienne. Alors S est un simplexe au sens de Choquet.

4.4. Article de Doplicher, Kadison, Kastler, Robinson, 1967.

Généralisation du travail de Kastler, Robinson, 1966, au cas d'un groupe G quelconque : on introduit la notion de système *faiblement asymptotiquement abélien* ; on examine le cas des groupes moyennables.

4.5. Article de Doplicher, Kastler, 1968.

On introduit la notion de système (G, A) *M-abélien* (notion plus générale que *asymptotiquement abélien*) ; on peut alors utiliser la *moyenne de Godement M* des fonctions de type positif sur le groupe et généraliser certains résultats des travaux précédents.

4.6. Article de Doplicher, Kastler, Stormer, 1969.

Ce travail unifie et clarifie ceux qui précèdent ; on démontre en particulier que chacune des conditions suivantes portant sur un système

(G,A) est strictement plus restrictive que la suivante : asymptotiquement abélien, M -abélien, G -abélien.

4.7. Article de Haag, Kadison, Kastler, 1970.

On donne une présentation abstraite de la situation décrite par Haag et Kastler, 1964 : une C^* -algèbre A munie d'une famille filtrante croissante (*net*) de sous- C^* -algèbres dont la réunion engendre A .

4.8. Article de Guichardet, Kastler, 1970.

On remplace la notion d'état invariant par celle d'état *quasi-invariant*, ce qui signifie que, pour tout $g \in G$, il existe un automorphisme T_g de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\varphi(A)$ tel que $\pi_\varphi(ga) = T_g(\pi_\varphi(a))$. Cette notion présente l'avantage que, contrairement à ce qui se passe pour les états invariants, il existe toujours, du moins sous certaines conditions très générales de séparabilité, des états quasi-invariants.

On note A^{**} l'espace de Banach bidual de A (*algèbre de von Neumann enveloppante* de A), Z_0 l'ensemble des éléments G -invariants du centre de A^{**} ; on dit qu'un état quasi-invariant φ est *ergodique* si $\pi_\varphi(Z_0)$ est réduit aux scalaires. On montre alors que tout état quasi-invariant est le barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des états quasi-invariants ergodiques.

4.9. Article de Kastler, Mebkhout, Loupias, Michel, 1972.

On reprend les objets A^{**} et Z_0 introduits dans Guichardet, Kastler, 1970 ; on dit qu'un état invariant φ est *primaire* si l'algèbre de von Neumann R_φ est un facteur au sens de von Neumann. On démontre que tout état est barycentre d'une unique mesure portée par l'ensemble des états primaires.

Interprétation physique.

. Pour $G = \mathbb{R}$ (*évolution temporelle*), la primarité d'un état est liée à une propriété de *stabilité* du système physique.

. Prenant pour G le groupe euclidien de $\mathbb{R}^3$, on obtient des explications de certaines *brisures de symétries*.

4.10. Article de Herman, Kastler, 1977.

On prend le groupe $G = \mathbb{R}$ et on étudie le spectre (sous-ensemble de $\mathbb{R}$) de la représentation covariante associée à un état extrémal.

5. Conclusion.

Les nombreux travaux de Daniel Kastler et de ses collaborateurs ont très largement contribué à la création de ce qu'on appelle maintenant Théorie des Systèmes Dynamiques Non Commutatifs ; d'autres auteurs s'en sont inspirés ; citons quelques travaux publiés vers la même époque dans des journaux considérés comme purement mathématiques.

- . R.H.Herman. Invariant states. (Trans.Amer.Math.Soc., 158, 1971, 503-512).
- . R.V.Kadison. States and representations. Trans.Amer.Math.Soc., 103, 1962, 304-319).
- . D.W.Robinson, D.Ruelle. Extremal invariant states. (Ann.Inst.Henri Poincaré, 6, 1967, 299).
- . D.Ruelle. Integral representation of states on a C^* -algebra. (J.Funct.Anal., 6, 1970, 116-151).
- . E.Stormer. Automorphisms and invariant states of operator algebras. (Acta Math., 127, 1971, 1-9).
- . E.Stormer. Invariant states of von Neumann algebras. (Math.Scand., 30, 1972, 253-256).
- . M.Takesaki. Covariant representations of C^* -algebras and their locally compact automorphism groups. (Acta Math., 111, 1967, 273-303).

Daniel Kastler et ses collaborateurs ont introduit, d'une façon qui peut paraître un peu chaotique – mais c'est souvent le cas lorsqu'émerge une théorie nouvelle – diverses notions concernant les groupes d'automorphismes des C^* -algèbres et les états invariants, définitions toujours motivées par des considérations de physique théorique ; certaines de ces notions se sont après coup révélées être identiques, souvent sous des hypothèses supplémentaires très générales.

Une partie de ces travaux ont, par la suite, été exposés dans plusieurs traités :

- . A.Guichardet *et altri*. Systèmes dynamiques non commutatifs. (Astérisque, n° 13-14, Soc. Math. France, 1974).
- . G.Pedersen. C^* -algebras and their automorphism groups (chapter 7). (Acad. Press. 1979).

Bibliographie

- [1] J. von Neumann. Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin, 1932).
- [2] I.E.Segal. Postulates for general quantum mechanics. (Ann.Math., 48, 1947, 930-948).
- [3] Colloque international sur les problèmes mathématiques de la Théorie Quantique des Champs. (C.N.R.S., Lille, 1957).
- [4] R.Haag. Mathematical structure of the B.C.S. model. (Nuovo Cimento, 25, 1962, 287-299).
- [5] R.Haag, B.Schroer. Postulates of Quantum Field Theory. (J.Math.Phys., 3, 1962, 248-256).
- [6] R.Haag, D.Kastler. An algebraic approach to Quantum Field Theory. (J.Math.Phys., 5, 1964, 848-861).
- [7] S.Doplicher, D.Kastler, D.W.Robinson. Covariance algebras in field theory and statistical mechanics. (Commun.Math.Phys., 3, 1966, 1-28).
- [8] D.Kastler, D.W.Robinson. Invariant states in statistical mechanics. (Commun.Math.Phys., 3, 1966, 151-180).
- [9] S.Doplicher, R.V.Kadison, D.Kastler, D.W.Robinson. Asymptotically abelian systems. (Commun.Math.Phys., 6, 1967, 101-120).
- [10] O.Lanford, D.Ruelle. Integral representation of invariant states on B^* -algebras. (J.Math.Phys., 8, 1967, 1460-1464).
- [11] S.Doplicher, D.Kastler. Ergodic states in a noncommutative ergodic theory. (Commun.Math.Phys., 7, 1968, 1-20).
- [12] S.Doplicher, D.Kastler, E.Stormer. Invariant states and asymptotic abelianness. (J.Funct.Anal., 3, 1969, 419-434).
- [13] R.Haag, R.V.Kadison, D.Kastler. Nets of C^* -algebras and classification of states. (Commun.Math.Phys., 16, 1970, 81-104).
- [14] A.Guichardet, D.Kastler. Désintégration des états quasi-invariants des C^* -algèbres. (J.Math. pures et Appl., 49, 1970, 349-380).
- [15] D.Kastler, M.Mebkhout, G.Loupas, L.Michel. Central decomposition of invariant states. (Commun.Math.Phys., 27, 1972, 195-222).
- [16] R.H.Herman, D.Kastler. Energy spectrum of extremal invariant states. (Commun.Math.Phys., 56, 1977, 87-90).