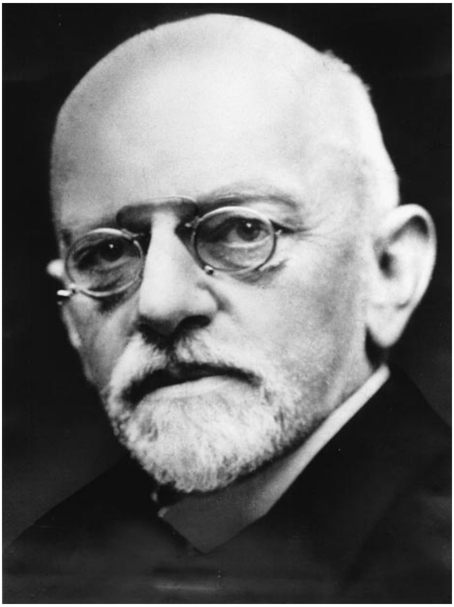
Le philosophe et le mathématicien

Pierre Cassou-Noguès

Tout au long de leur histoire, la philosophie et les mathématiques ont entretenu une relation aussi étroite qu'énigmatique. Il faudrait revenir à Platon dans le monde grec et à Descartes à l'aube de l'époque moderne. Évoquons ici deux grandes figures du XXe siècle, David Hilbert et Edmund Husserl.

Edmund Husserl et David Hilbert se rencontrent à Göttingen en 1901. Le philosophe, Husserl, a suivi des études de mathématiques. Il a été à Berlin l'assistant de Karl Weierstrass, grand mathématicien analyste, avant de rencontrer Franz Brentano, à Vienne, et de se tourner vers la philosophie. Il a publié en 1891 la *Philosophie de l'arithmétique*. Le premier tome de ses *Recherches logiques* paraît en même temps que le philosophe s'installe à Göttingen. Le mathématicien, Hilbert, est à Göttingen depuis 1897. Il a résolu un problème fameux, le « problème de Gordan », en théorie des invariants, qui, depuis une vingtaine d'années, préoccupait les géomètres allemands. Il a développé, en algèbre, la « théorie des corps algébriques ». Husserl et Hilbert ont à peu près le même âge. Ils se croisent à la Faculté de philosophie qui regroupe, en réalité, les philosophes et les mathématiciens. Ils vont, l'un comme l'autre, transformer leur discipline. Husserl découvre la phénoménologie. Hilbert met en place la méthode abstraite qui caractérise les mathématiques modernes.



David Hilbert (1862-1943) était, avec le Français Henri Poincaré, l'un des grands mathématiciens des années 1900. Par la profondeur de ses travaux et de ses points de vue, par le dynamisme qu'il a su insuffler à Göttingen, il a exercé une influence considérable sur les mathématiques du XXe siècle. (Cliché AKG)

Göttingen, lieu d'excellence mathématique, accueille les philosophes

Si Göttingen n'était qu'une petite ville, près de Stuttgart, elle devient, peu après 1900, le centre du monde mathématique. Felix Klein est à la tête de la Faculté. Ce grand géomètre, qui a établi de façon définitive l'existence des espaces non euclidiens, renonce à la recherche et se consacre à ses cours, sur le développement des mathématiques au XIXe siècle, et à l'administration de la Faculté, pour laquelle il réunit de nouveaux moyens financiers. Il fait venir Hilbert puis Hermann Minkowski. Ce dernier introduira, lors d'une leçon célèbre, le « continuum d'espace-temps » — qui porte son nom et qui servira de cadre à Einstein pour formuler la théorie de la relativité. Chaque semaine, la Société mathématique de Göttingen se réunit autour d'un conférencier, de Göttingen ou d'ailleurs. Husserl, le philosophe, parle en avril 1901 du problème des imaginaires en arithmétique. Göttingen est un lieu consacré aux mathématiques. On raconte qu'un jour Minkowski, se promenant dans la rue principale, vit un jeune homme pensif, en proie à quelque tourment ; il lui tapa gentiment sur l'épaule et lui dit : « ne vous inquiétez pas, ça converge », sur quoi le jeune homme s'éloigna, rassuré.

C'est à Göttingen que Hilbert mûrit la méthode abstraite des mathématiques modernes. La méthode abstraite est née dans l'algèbre du XIXe siècle. Richard Dedekind et Leopold Kronecker, notamment, ont introduit ce qu'on appelle des structures. On définit une structure mathématique, comme celle de « groupe », d'« espace vectoriel », de « corps »,

Un des bâtiments de mathématiques (l'Institut de mathématiques appliquées et numériques) de l'université de Göttingen, aujourd'hui. Entre 1900 et 1930, Göttingen a été pour les mathématiques un centre de renommée mondiale, grâce aux efforts de David Hilbert. Les mathématiciens y cotoyaient des philosophes et des scientifiques d'autres disciplines. (Cliché université de Göttingen) en fixant les règles que vérifient les opérations, sans considérer la nature des objets soumis à ces opérations. Ainsi, une même structure peut s'appliquer à des objets de nature différente — à des nombres, à des fonctions, à des transformations géométriques, etc. L'abstraction, en mathématiques, consiste à se détourner, ou à faire abstraction, de la nature des objets pour ne considérer que les relations qu'entretiennent ces objets. Ce point de vue, qui émerge dans l'algèbre de Dedekind et qui est resté anonyme au XIXe siècle, Hilbert le rend explicite.

Hilbert donne une représentation axiomatique de la géométrie

Dès son arrivée à Göttingen, Hilbert annonce un cours sur la géométrie. Ce cours, qui sera publié sous le titre *Les fondements de la géométrie*, s'appuie sur la méthode abstraite pour donner une axiomatisation de la géométrie. Hilbert fait abstraction de la nature des objets géométriques, le point, la droite, le plan, et se contente de poser entre eux des relations dont les propriétés sont explicitées par les axiomes. Autrement dit, les axiomes fixent les propriétés des relations existant entre des objets dont la nature est laissée indéterminée. Ainsi, les axiomes définissent une structure, analogue aux structures algébriques. Mais, de l'algèbre à la géométrie, le primat de la structure est renforcé. En algèbre, on donne une structure à des objets supposés connus, des nombres, des fonctions. On peut déduire un théorème en raisonnant à partir de la structure ou bien en raisonnant sur les objets, avec leur nature propre. En revanche, par axiomatisation, le raisonnement est réduit à une simple déduction à partir des axiomes et les objets sont définis par la seule position des axiomes. Les axiomes, c'est-à-dire la structure, suffisent à définir les objets et à effectuer des démonstrations sur ces objets.

Dans son axiomatisation de la géométrie et dans ses travaux ultérieurs, Hilbert explicite la méthode abstraite de l'algèbre, la radicalise et l'utilise pour produire de nouveaux résultats. En réalité, Hilbert parcourt et transforme, dans une perspective abstraite, toutes les mathématiques de son temps : la géométrie ; l'algèbre et la théorie des nombres, avec une première démonstration de la « conjecture de Waring » en 1909 ; l'analyse, où il introduit les espaces de Hilbert, espaces abstraits dont les « points » sont par exemple des fonctions. La méthode abstraite sera reprise, à Göttingen, par l'école d'Emmy Noether et d'Emil Artin, puis, en France, par le groupe Bourbaki. Elle nourrira dès lors toutes les mathématiques.

Donner un fondement aux mathématiques

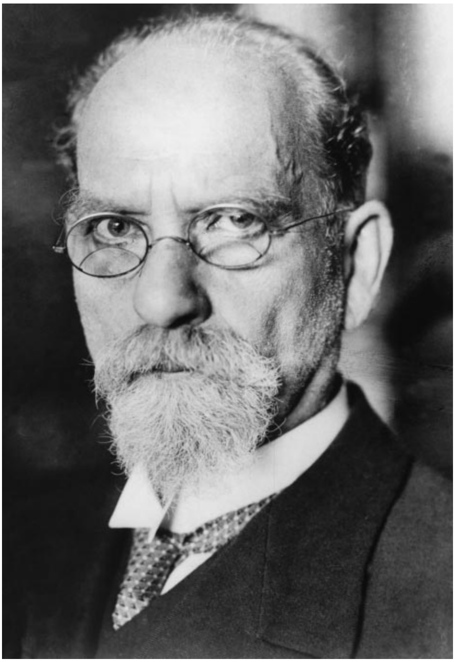
Parallèlement, Hilbert développe la méthode abstraite pour lancer un programme de fondement des mathématiques. Fonder les mathématiques, c'est donner à leurs raisonnements une garantie ultime. Il s'agit en particulier de justifier les raisonnements qui supposent un infini existant en acte, les raisonnements *transfinis*, tout en faisant l'économie de l'hypothèse de l'existence de l'infini. Le programme *formaliste* comporte deux étapes. La première tâche est de formaliser les théories mathématiques. On considère un alphabet de symboles. On fixe des règles, analogues à l'orthographe et à la grammaire, pour construire une formule à partir de ces symboles. On explicite des axiomes, qui serviront

de prémisses dans les démonstrations, et des règles pour déduire une formule d'une autre. Les mathématiques sont remplacées par un stock de formules. Une démonstration consiste en manipulations de symboles selon des règles explicites, abstraction faite du sens des symboles. Une démonstration se présente comme un assemblage de symboles conforme à des règles explicites, un dessin construit selon les règles qu'on s'est fixé. La seconde tâche est de démontrer la non-contradiction de ces systèmes formels au moyen de raisonnements finitistes, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir l'infini actuel.

La première théorie à laquelle Hilbert tente d'appliquer ce programme est l'arithmétique, qui comporte déjà des raisonnements transfinis. Ainsi, Hilbert ouvre une *théorie de la démonstration*, qui consiste en raisonnements finitistes portant sur les dessins qui représentent les démonstrations dans un système formel. Toutefois, en 1931, le logicien autrichien Kurt Gödel établit qu'il est impossible de prouver, au moyen de raisonnements finitistes, la non-contradiction d'un système formel incluant l'arithmétique élémentaire. Il faut donc renoncer au programme initial de Hilbert.

La méthode abstraite et le programme formaliste ont fasciné les philosophes

Il reste que Hilbert a réussi à transformer une question philosophique, celle du fondement, en un problème mathématique, traité au moyen de la méthode abstraite et relevant d'une nouvelle théorie, la théorie de la démonstration, qui reste aujourd'hui encore vivante. En retour, la méthode abstraite et le programme formaliste qu'elle sous-tend ont exercé une sorte de fascination sur les philosophes. D'emblée, dans ses *Recherches logiques* de 1901, puis dans *Logique formelle et logique transcendantale* de 1929, Husserl intègre la représentation abstraite des mathématiques à la phénoménologie naissante. Husserl distingue deux mathématiques, une mathématique appliquée, qui comprend par exemple la géométrie en tant que théorie de notre espace, l'espace dans lequel nous vivons, et une mathématique formelle. Partant d'une théorie appliquée, un mathématicien en dégage l'architecture et isole un système d'axiomes, qu'il peut ensuite faire varier pour obtenir de nouvelles formes pour des théories possibles. Ainsi, la mathématique formelle apparaît comme une théorie des formes de théories ou, dans le vocabulaire de Husserl, une *apophantique formelle*, qui vise à définir



Edmund Husserl (1859-1938), qui s'est en partie inspiré de problématiques mathématiques pour édifier sa philosophie. (Cliché AKG)

et à classer tous les systèmes possibles de jugements. En outre, comme l'avait montré Hilbert, procéder de façon axiomatique revient à faire abstraction de la nature des objets. Par conséquent, à chaque forme de théories, correspond un domaine d'objets, d'objets quelconques déterminés par ceci seul qu'ils sont soumis à tel système d'axiomes. La théorie des formes de théories représente donc une *ontologie formelle*, une théorie du pur « quelque chose », qui vise à définir et classer, par leur seule forme, toutes les multiplicités possibles d'objets. La mathématique formelle comporte une double orientation : elle est apophantique formelle, lorsque le mathématicien se tourne vers les systèmes de jugements ; elle est ontologie formelle, lorsque le mathématicien se tourne vers les domaines d'objets. Si Husserl, qui avait étudié de près la géométrie du XIXe siècle, disposait des concepts de forme de théories et de multiplicité formelle avant 1901, il est certain que la rencontre avec Hilbert et les discussions à la Société mathématique de Göttingen ont joué un rôle décisif dans l'élaboration d'une phénoménologie systématique.

Hilbert a réussi à poser à l'intérieur des mathématiques la question du fondement des mathématiques. C'est l'intériorisation dans les mathématiques d'une question philosophique. Husserl a opéré l'intériorisation inverse, de la méthode abstraite des mathématiques dans la philosophie. Le parcours de deux hommes, le philosophe Husserl et le mathématicien Hilbert, témoigne d'une intériorisation, réciproque et concomitante, des mathématiques dans la philosophie et de la philosophie dans les mathématiques.

Pierre Cassou-Noguès
CNRS, Laboratoire Savoirs et Textes,
Université Lille III

Quelques références :

- P. Cassou-Noguès, *Hilbert* (Les Belles Lettres, 2001).
- P. Cassou-Noguès, *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès* (Vrin, 2001).
- J.-T. Desanti, *La philosophie silencieuse* (Seuil, 1975).
- D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (Springer, Berlin, 1931-35).
- E. Husserl, *Recherches logiques* (tr. fr. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer, P. U. F., 1959).
- C. Reid, *Hilbert* (Springer, 1970).
- H. Sinaceur, *Corps et modèles* (Vrin, 1991).