

Valérie Girardin

Maître de Conférences,

LMNO,

BP5186

Université de Caen,

14032 Caen Cedex, France

valerie.girardin at
math.unicaen.fr



Habilitée à diriger les recherches, docteur en sciences (mathématiques), agrégée de mathématiques, licenciée en lettres (anglais).

Thèmes de recherche : Mes travaux portent principalement sur l'utilisation de l'entropie en théorie statistique des processus stochastiques et sur la représentation spectrale des processus, notamment markoviens, semi-markoviens et ARMA.

Le concept d'entropie, sous ses différentes formes (entropie, entropie relative, entropie conditionnelle, taux d'entropie, etc.) et ses différents noms (entropie, information, distance, divergence, mesure de distorsion, etc.), s'applique à des lois de probabilités, à des variables ou à des processus stochastiques, de toute dimension, à temps discret ou continu. Il est utilisé dans un cadre extrêmement vaste, théorie de la communication, théorie du signal, image, recherche opérationnelle, mécanique statistique, mais aussi biologie, psychologie, linguistique, etc. Choisir la maximisation d'entropie pour trouver une fonction sous contraintes privilégie la solution qui peut se réaliser du plus grand nombre de manières possibles. Elle prend tout son sens en considérant la minimisation d'entropie relative pour laquelle la solution privilégiée est la plus proche d'une fonction connue qui ne vérifie pas les contraintes, par exemple une estimation préalable.

Processus markoviens et semi-markoviens : Les processus semi-markoviens constituent une généralisation naturelle des processus de sauts markoviens : l'évolution future d'un processus de sauts markovien connaissant le passé dépend seulement de l'état occupé à l'instant présent ; celle d'un processus semi-markovien dépend aussi du temps passé depuis la dernière transition. Le théorème ergodique de la théorie de l'information dit que l'entropie à temps fini d'un processus divisée par le temps converge vers une limite appelée taux d'entropie du processus. J'ai présenté une synthèse de ses différentes généralisations, depuis la version originale de Shannon-McMillan-Breiman, jusqu'à ses développements les plus récents. Je l'ai étendu aux processus semi-markoviens ergodiques, à espace d'état dénombrable pour le temps continu et pour le temps discret, et à espace d'état général, induisant une expression explicite du taux d'entropie de ces processus. J'ai également établi un théorème de la limite centrale fonctionnel (soit des principes d'invariance fort et faible) pour l'entropie. J'ai construit un critère de choix du processus randomisé d'un processus de sauts markovien par maximum d'entropie. Le calcul numérique et l'application à des processus de naissance et de mort à fait l'objet de l'un des TER que j'ai encadrés. J'ai étudié différents problèmes de maximisation d'entropie sous contraintes de type moments pour des processus de sauts markoviens et pour des processus semi-markoviens pour le temps continu, avec des applications en fiabilité, et pour le temps discret, donnant ainsi un aperçu des directions possibles d'utilisation de l'entropie dans l'étude de ces processus. J'ai aussi considéré l'utilisation de méthodes de maximum de taux d'entropie pour des files d'attente markoviennes. J'ai construit différents estimateurs du taux d'entropie de chaînes de Markov sont construits pour un espace d'état fini et pour un espace d'état dénombrable, à partir de l'observation d'une trajectoire de longue durée ou de plusieurs trajectoires de durée fixe. Les cas paramétriques et non paramétriques sont envisagés, avec établissement des propriétés asymptotiques. J'ai étudié particulièrement le cas d'une chaîne à deux états, pour lequel des résultats asymptotiques explicites complets peuvent être obtenus par des méthodes particulières. Le cas des processus de Markov est abordé dans le mémoire de M2 de Paris-Sud de Philippe Régnault, et fait l'objet de sa thèse en cours sous ma direction.

Représentation spectrale : Il est bien connu que tout processus stochastique faiblement stationnaire, c'est-à-dire dont la fonction de covariance est invariante pour la structure de groupe additif de l'ensemble des indices, admet une représentation spectrale par rapport au système trigonométrique. Sa fonction de covariance, réduite à une fonction d'une seule variable, est la transformée de Fourier de sa mesure spectrale. La représentation spectrale liée à cette réduction de dimension offre de nombreux avantages et est souvent indispensable dans l'étude statistique des processus. Elle simplifie l'étude de leurs propriétés de second ordre et permet d'utiliser les nombreux outils qui lui sont liés, comme l'ergodicité, la détermination d'un processus à partir de contraintes sur sa fonction de covariance, par exemple à travers l'estimation spectrale, etc.. Une extension consiste à considérer la stationnarité par rapport à une structure plus générale que celle de groupe additif de l'ensemble des indices. J'ai défini la notion de semi-stationnarité liée aux structures de semi-groupes avec involution et semi-groupes réguliers en utilisant des résultats d'analyse harmonique. Ceci permet d'unifier des résultats connus sur les processus à accroissements orthogonaux, M-stationnaires, symétriques, le mouvement brownien, les signaux sinusoïdaux, etc., et ouvre un nouveau champ d'investigation en théorie des processus pour la représentation spectrale. Une autre extension consiste à utiliser la représentation spectrale d'un processus stationnaire par dualité. C'est le cas de la classe des processus réductibles à la stationnarité par une transformation de l'ensemble des indices du processus ou de celle des processus périodiquement corrélés duaux de processus multivariés stationnaires. J'ai établi les propriétés statistiques des premiers liées à la représentation spectrale, et celles des seconds liées à la maximisation d'entropie.

Processus ARMA : Un processus auto-régressif à un temps donné dépend linéairement de son passé à temps fini, à un bruit blanc près. Un processus ARMA possède la même propriété, à une combinaison linéaire finie de bruits blancs près. Ce sont des cas particuliers de processus de Markov, mais les techniques mises en jeu pour leur étude leur sont propres.

J'ai étudié et utilisé les processus ARMA sous de nombreuses formes : faiblement stationnaires ou périodiquement corrélés, à valeurs scalaires ou multivariées, indexés par un ensemble unidimensionnel ou multidimensionnel, à temps discret ou continu.

Diverses techniques utilisant une modélisation ARMA sont apparues dans les dernières années, notamment dans des applications en théorie du signal et en économie. Cette modélisation comporte plusieurs étapes, dont la détermination de l'ordre, nombre minimal de paramètres nécessaires à la représentation du processus. J'ai développé une procédure récursive de détermination de l'ordre d'un processus ARMA en utilisant les coefficients de réflexion généralisés de la matrice de covariance. Ils sont conservés lorsque la taille des matrices augmente, ce qui permet de ne calculer qu'un seul coefficient à chaque étape de la procédure.

Une autre étape essentielle est le calcul des paramètres du modèle. J'ai développé différentes méthodes dans ce but, à partir de diverses contraintes sur la densité spectrale, par exemple covariances, réponses impulsionnelles ou coefficients cepstraux (coefficients de Fourier de la densité spectrale, de sa racine carrée ou de son logarithme). La représentation du modèle est ainsi déterminée, et pas seulement sa densité spectrale, moins informative.

L'absence de mémoire d'un processus markovien se traduit pour les propriétés de second-ordre par la notion de processus faiblement markovien. J'ai obtenu une caractérisation décisive de ces processus d'ordre un à temps discret vectoriels ou périodiquement corrélés en termes de modèles auto-régressifs d'ordre un.

Les modèles ARMA jouent un rôle essentiel dans la maximisation d'entropie sous contraintes de moments généralisés sur la densité spectrale.

Problèmes de moments : A l'origine, le problème des moments tronqués consiste en la détermination de mesures positives dont un nombre fini de moments algébriques est donné. Il a été ensuite généralisé à d'autres moments, par exemple trigonométriques. Il est appliqué en probabilités notamment aux moments de variables aléatoires ou aux covariances d'un processus faiblement stationnaire.

Le problème de l'existence de solutions est préliminaire. Dans le cas unidimensionnel, la définie-positivité de la suite est nécessaire et suffisante, un résultat classique dans le cas scalaire dont j'ai donné une preuve constructive dans le cas multivarié.

L'étude de l'ensemble des solutions pour une suite donnée en découle. J'ai déterminé la forme de la fonction donnant le maximum d'une fonctionnelle d'entropie générale sous contraintes de moments généralisés par une méthode hilbertienne.. Elle s'applique aux cas classiques des moments trigonométriques ou algébriques, mais aussi aux systèmes de fonctions les plus généraux, comme par exemple ceux impliqués dans la représentation spectrale des processus semi-stationnaires ou réductibles, et également aux problèmes de réalisation de produit scalaire, et peut être étendue à des contraintes additionnelles, au cas multidimensionnel multivarié, à l'entropie relative pour des contraintes de covariances ou pour des contraintes plus générales.

J'ai construit des solutions de type fraction rationnelle ou exponentielle de polynômes généralisés par résolution de systèmes linéaires ou par recherche de point fixe d'une fonctionnelle. Sous contraintes de covariances pour des processus stationnaires, cela amène la construction d'un processus auto-régressif. J'ai développé une méthode de construction de ce processus dans le cas scalaire périodiquement corrélé et par dualité dans le cas stationnaire multivarié.

Pour des contraintes additionnelles, ou pour l'entropie relative à certains processus, l'extremum d'entropie est obtenu pour un processus ARMA. Ces contraintes sont par exemple des réponses impulsionnelles ou des coefficients cepstraux. La représentation paramétrique du modèle ARMA est déterminée par différentes méthodes algébriques ou itératives. J'ai montré le parallèle entre le rôle joué par les covariances dans la construction de modèles auto-régressifs et celui joué par les

réponses impulsionnelles dans la construction de modèles ARMA.

J'ai mis en évidence une dualité entre un problème de moments multidimensionnel et un problème de marginales (détermination de mesures discrètes définies sur un ensemble produit et dont les marginales sont fixées). J'ai déterminé les points extrémaux du convexe des solutions dans les deux cas. Pour le problème de moments, les mesures extrémales à support fini engendrent toutes les solutions pour une topologie convenable. Ces résultats ont été les premiers dans un contexte général (support dénombrable pour les mesures à marginales fixées et support multidimensionnel pour les moments).

Ouvrage :

Probabilités en vue des applications, Vuibert, Paris, avec N. Limnios ;
première édition en un volume (2001) ; deuxième édition en deux volumes (2008)

" Probabilités en vue des applications" est un livre de probabilités destiné aux étudiants en L3 ou Master de mathématiques ou en école d'ingénieurs, intéressés par les probabilités et leurs applications. Outre les notions classiques de probabilités basées sur des rappels de théorie de la mesure et de l'intégration, il contient une introduction à la statistique et aux processus stochastiques utilisés en modélisation (processus stationnaires, ergodiques, de renouvellement, ARMA, markoviens et semi-markoviens), avec des ouvertures vers la théorie de l'information, la théorie du signal, la fiabilité... La deuxième édition paraîtra à l'automne 2008 sous forme de deux volumes, le premier étant destiné aux étudiants de Licence et le second aux étudiants de Master de mathématiques appliquées ou d'autres spécialités.

Publications depuis 2000 :

Comparative Construction of Plug-in Estimators of the Entropy Rate of Two-State Markov Chains

Methodology and Computing in Applied Probability avec A. Sesboué, à paraître (2009)

Maximizing the entropy rate of state-dependent M/M/1 queues
in *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*,
AIPCP, avec A. Sesboué, V1073, pp181-188 (2008)

Characterization of Periodically Correlated and Multivariate Stationary Discrete Time Wide Markov Processes

Statistics and Probability Letters, V78, pp. 158--164 avec G. Castro (2008)

Estimation of the Entropy Rate of a Countable Markov Chain

Communication in Statistics : Theory and Methods, V36, pp2543--2557, avec G. Ciuperca (2007)

Relative Entropy and Spectral Constraints: Some Invariance Properties of the ARMA Class

Journal of Time Series Analysis, V28, pp844--866 (2007)

Asymptotic study of an estimator of the entropy rate of a two-state Markov chain for one long trajectory

in *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*

Ed. A. Mohammad-Djafari, AIPCP, pp403--410, avec A. Sesboué (2006)

Entropy for Semi-Markov Processes with Borel State Spaces: Asymptotic Equipartition Properties and Invariance Principles

Bernoulli, V12, pp1--19, avec N. Limnios (2006)

On the Different Extensions of the Ergodic Theorem of Information Theory

in *Recent Advances in Applied Probability*

R. Baeza-Yates, J. Glaz, H. Gzyl, J. Hüsler and J. L. Palacios (Eds), Springer-Verlag, San Francisco, pp163--179 (2005)

Entropy Maximization for Markov and Semi-Markov Processes
Methodology and Computing in Applied Probability, V6, pp109--127 (2004)

Entropy Rate and Maximum Entropy Methods for Countable Semi-Markov Chains,
Communication in Statistics : Theory and Methods, V33, pp609--622, avec N. Limnios (2004)

On the Entropy for Semi-Markov Processes
Journal of Applied Probability, V40, pp1060--1068, avec N. Limnios (2003)

Spectral Representation for Processes on a Regular Semigroup via Extension to a Group
Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, V48, pp55-60 avec M. Rachdi et R. Senoussi (2003)

Semigroup Stationary Processes and Spectral Representation
Bernoulli, V9, pp857--876, avec R. Senoussi (2003)

Spectral Density Estimation from Random Sampling for Multiplicative Stationary Processes
Computers and Mathematics with Applications, V46, pp1009--1021, avec M. Rachdi (2003)

Maximum of Entropy and Extension of Covariance Matrices for Periodically Correlated and Multivariate Stationary Processes
Statistics and Probability Letters, V59, pp37--52, avec G. Castro (2002)

ARMA Models Realization and Impulse Responses
Stochastic Models, V17, pp293--312, avec G. Castro (2001)

Relative Entropy and Covariance Type Constraints Yielding ARMA Models
in *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*,
Ed. Mohammad-Djafari, AIPCP, V568, pp318--327 (2001)

J'ai collaboré pour ces différents travaux avec : Glaysar Castro, de l'université de Caracas, Venezuela ; Gabriela Ciuperca, de l'université Lyon 1 ; Nikolaos Limnios, de l'université technologique de Compiègne ; Mustapha Rachdi, de l'université de Grenoble ; Abdelatif Seghier, de l'université de Paris-Sud ; Rachid Senoussi, de l'INRA d'Avignon ; André Sesboué, de l'université de Caen.