De la formule d'Atiyah-Singer aux complexes parfaits, souvenirs du séminaire Cartan-Schwartz

Luc Illusie

« *Illusie, il faut vous acheter une machine à écrire !* » C'est le premier conseil que Cartan m'ait donné. Un conseil précieux, dont je lui suis toujours reconnaissant. Nous sommes en novembre 1963. Le séminaire Cartan-Schwartz [CS] sur la formule d'Atiyah-Singer a commencé. Mes notes manuscrites de l'exposé de Cartan sur les groupes K viennent d'être distribuées aux auditeurs. On est consterné par mon écriture en pattes de mouche. La prochaine fois, c'est promis, je taperai à la machine. La prochaine fois, c'est pour un exposé sur le caractère de Chern et la classe de Todd. Mon premier exposé de séminaire ! Quand Cartan me le propose, j'ignore tout de la question. Mais, miracle, après un entretien avec lui, tout s'éclaire, le plan est tracé, l'exposé prêt à composer. N'empêche que, le moment venu, je tremblais, même si tout s'est bien passé. Je me rappelle, à la fin, une discussion animée avec un jeune que je rencontrais pour la première fois, et dont l'énergie et l'imagination débordantes m'avaient ébloui : Jean-Louis Verdier. Il nous manque...

On mesure mal, de nos jours, l'importance qu'avait un séminaire comme le séminaire Cartan pour la formation des jeunes mathématiciens. D'abord, il s'agissait d'un séminaire « à thème », d'une durée d'un an, genre aujourd'hui disparu. Cartan choisissait, parmi les résultats récents, un théorème ou une théorie suffisamment riche pour justifier d'y consacrer un séminaire. En début d'année, il répartissait les exposés entre les volontaires. L'exposé, une fois fait, devait être rédigé dans le mois suivant. Une discipline rigoureuse, qui était observée. Au lieu des « séminaires tournants » actuels, où, chaque semaine, on va, souvent sans conviction, écouter un orateur sur un sujet chaque fois différent, le séminaire Cartan demandait des participants un investissement sérieux et durable. C'est au séminaire Cartan, puis, dans les séminaires Grothendieck, qui en conservaient le principe, que j'ai appris le métier. Rien n'était laissé dans l'ombre. Il n'y avait pas de « boîte noire ». Les préliminaires et rappels nécessaires étaient faits en détail. Les démonstrations n'étaient pas seulement « esquissées », mais présentées complètement. Cartan tenait à ce que l'on comprenne, souci légitime, qui n'est plus si répandu, me semble-t-il. Combien de fois l'ai-je vu interrompre un orateur pour lui demander « d'éclairer notre lanterne ». Bien entendu, le séminaire était une occasion privilégiée de rencontres et de discussions, qu'un fort centre d'intérêt commun rendait plus fécondes.

Mais revenons au séminaire Cartan-Schwartz. J'y ai appris à exposer et à rédiger, sous la houlette de Cartan (et de Douady, qui m'a beaucoup aidé à cette époque). J'y ai aussi, tout simplement, découvert le plaisir de la recherche. Dès que j'avais une idée ou une question, même naïve, je n'hésitais pas (j'en ai un peu honte aujourd'hui) à téléphoner à Cartan. Il me répondait toujours avec bienveillance. Parfois, s'il avait un doute, il me disait : « Je vais demander à Serre », et il me rappelait peu après (avec la réponse). Classes de Chern et complexes de de Rham devaient rester pour moi un thème favori, sur lequel je suis souvent revenu. À la fin du séminaire, Cartan m'a proposé, comme sujet de thèse, de généraliser la formule d'Atiyah-Singer aux familles. La formule d'Atiyah-Singer classique [A1] s'écrit

$$i_a(d) = i_t(d).$$

Le membre de gauche, $i_a(d)$, dit *indice analytique*, est l'indice d'un opérateur elliptique $d : E^0 \to E^1$ entre fibrés vectoriels complexes sur une variété C^∞ compacte X, *i.e.* la différence $\dim \operatorname{Ker} H^0(X, d) - \dim \operatorname{Coker} H^0(X, d)$ entre les dimensions de deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Le membre de droite, $i_t(d)$, dit *indice topologique*, est, *a priori*, seulement un nombre rationnel, défini comme $(-1)^n f_*(\mathrm{ch}(d)\,\mathrm{Todd}(TX \otimes \mathbb{C}))$, où n est la dimension de X, $f_* : H^*_X(TX, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ est le morphisme de Gysin associé à la projection f de X sur un point, $\mathrm{Todd}(TX \otimes \mathbb{C})$ la classe de Todd du fibré tangent complexifié, et $\mathrm{ch}(d)$ le caractère de Chern de l'élément de $K_X(TX)$ défini par le symbole de d (l'indice X signifiant « à support dans X »). Cette formule est analogue à celle de Riemann-Roch-Hirzebruch en géométrie algébrique. Ce que demandait Cartan, c'était un analogue de la formule de Riemann-Roch-Grothendieck, pour un morphisme $f : X \to Y$ propre et lisse entre variétés C^∞ compactes et d un opérateur (ou complexe) elliptique *relativement à Y*. J'avais commencé à réfléchir à la définition, dans ce cadre, de l'indice analytique $i_a(d)$, qui doit être un élément de $K(Y)$. J'étais parvenu à une définition locale (sur Y), mais je ne voyais pas comment globaliser. Cartan m'a alors conseillé d'aller voir Grothendieck, qui, m'a-t-il dit, devait avoir des idées sur la question. Des idées, Grothendieck en avait, en effet, et plus que je ne pouvais digérer sur le moment. Mais cette première rencontre a été pour moi décisive, bien au-delà du point technique qui me préoccupait, puisqu'elle devait déterminer toute l'orientation future de mes recherches.

J'aimerais dire quelques mots de la manière dont Grothendieck a résolu, très simplement, le problème en question (cf. [SGA 6 II, Ap. 2]). L'outil, qu'il m'a expliqué alors, et qui devait avoir de nombreuses applications, est la notion de *complexe parfait* (cette terminologie fut en fait choisie par Grothendieck plus tard). Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un espace (voire un site) annelé, en anneaux non nécessairement commutatifs. Un complexe parfait sur S est un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules (à gauche) qui, localement, est isomorphe, dans la catégorie dérivée, à un complexe borné à composantes facteurs directs de $\mathcal{O}$-modules libres de type fini. Si S est un espace compact, annelé par le faisceau des fonctions continues complexes, il est facile de montrer qu'un tel complexe est *globalement* isomorphe, dans la catégorie dérivée $D(S, \mathcal{O}_S)$, à un complexe borné de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini, et a donc une classe dans $K(S)$. Dans le cas du problème envisagé plus haut, ce que j'avais construit (sans le savoir) était un complexe parfait sur Y. Le résultat de Grothendieck me fournissait l'élément de $K(Y)$ que je cherchais. Quant à la définition de l'indice topologique, et la démonstration de la formule d'Atiyah-Singer dans ce cadre relatif, elles furent données quelque temps après par Shih [S] et, sous une forme plus forte, par Atiyah-Singer [A2].

Pour reconnaître qu'un complexe est parfait, il existe des critères commodes, dont le prototype est le suivant. Prenons pour S un espace réduit à un point, annelé par un anneau noethérien à gauche A. Soit E un complexe de A-modules à gauche. Pour que E soit parfait, il faut et il suffit que les groupes de cohomologie $H^i(E)$ soient de type fini sur A, et qu'il existe un intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout A-module à droite M, on ait $Tor_q^A(M, E) = 0$ pour $q \notin [a, b]$. Ces critères sont exposés, dans un degré de généralité malheureusement décourageant, dans [SGA 6, I, II]. Parmi les applications des complexes parfaits en géométrie algébrique, signalons :

(a) critères de semi-continuité ou de continuité pour la cohomologie des fibres d'un morphisme ([SGA 6 III], voir [I] pour une présentation récente) ;

(b) formule de Riemann-Roch-Grothendieck [SGA 6] ;

(c) formule des traces de Grothendieck en cohomologie étale ([G], [SGA 5]).

Quarante ans ont passé. À l'époque, Cartan me paraissait âgé. Il était pourtant plus jeune que je ne suis aujourd'hui. Et il était vif comme la poudre ; il l'est resté. Le revoyant récemment, j'ai évoqué son séminaire, et son conseil pour la machine à écrire. Il m'a confié que Weil, jadis, lui avait donné le même ...

C'est avec amour et reconnaissance que, pour son centième anniversaire, je lui dédie respectueusement ces quelques lignes.

Bibliographie

[CS] Séminaire Henri Cartan, 16e année (1963/64), dirigé par Henri Cartan et Laurent Schwartz, Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur elliptique, W. A. Benjamin, inc., 1967.

[A1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 422-433.

[A2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators, IV, Ann. of Math.(2) 93 (1971), 119-138.

[G] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki 1964/65, n° 290, 31-45, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., North-Holland Pub. Comp., Masson et Cie , 1968.

[I] L. Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, ICTP Trieste, 2003.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965/66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, SLN 225, Springer-Verlag, 1971.

[S] Shih, Weishu, Fiber cobordism and the index of a family of elliptic diferential operators, Bull. Amer. Soc. 72 (1966), 984-991.