
# *Une météo turbulente !*

**Qu'il s'agisse de la naissance et de la trajectoire d'une tempête, de la structure géométrique d'un nuage et de son rôle dans l'absorption des rayonnements solaire et tellurique, de l'assimilation optimale de mesures hétérogènes et dispersées (stations météo, satellites, avions, bateaux...) dans un modèle numérique de prévision du temps, ... : la modélisation mathématique est omniprésente dans la météorologie moderne ; elle sert à décrire et à comprendre les mécanismes, à analyser et à prévoir le temps ou le climat.**

## TURBULENCES ATMOSPHÉRIQUES

Les écoulements turbulents, et les mouvements de l'atmosphère sont particulièrement turbulents, peuvent être modélisés par les équations de Navier-Stokes qu'on ne sait toujours pas résoudre. Les météorologues font donc appel à la simulation numérique, utilisant les ordinateurs les plus puissants et les schémas numériques les plus sophistiqués. Ils utilisent aussi la théorie mathématique des systèmes dynamiques.
C'est un météorologue, E.N. Lorenz, qui a mis en évidence en 1963 le caractère chaotique des trajectoires d'un système dynamique simple et sa sensibilité aux conditions initiales, évoquant l'effet dans le futur des battements d'aile d'un papillon sur l'écoulement atmosphérique.

Texte de Maurice Mashaal, Journaliste scientifique
Sur une idée de
Claude Basdevant (Ecole polytechnique & Ecole normale supérieure - Paris)
Philippe Courtier (Météo-France)
Graphisme : Samuel Roux - Orléans

**Pour aller plus loin :**
M. Rochas et J.-P. Javelle, *La météorologie — La prévision numérique du temps et du climat*, Syros, 1993.
M. Lesieur, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
R. Sadourny, *Le climat de la Terre*, Flammarion (coll. Dominos), 1994.
R. Kandel, *Les eaux du ciel*, *Hachette Sciences, 1998.*
R. Kandel, *L'incertitude des climats*, Hachette Pluriel, 1998.

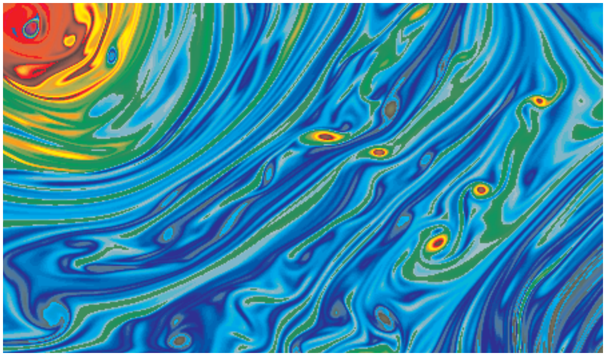
# Prévoir le temps, un défi majeur

*Pour obtenir des prévisions météorologiques ou climatiques, il faut trouver les équations qui décrivent l'évolution des conditions atmosphériques. Puis les résoudre, ce que l'ordinateur ne peut faire tout seul !*

La prévision météorologique a fait d'immenses progrès au cours des dernières décennies. Mais il arrive parfois que les prévisions n'aient qu'un lointain rapport avec le temps qu'il a effectivement fait le lendemain. Faut-il dans ces cas incriminer la personne qui a présenté le bulletin ? Les météorologues ? Leurs commanditaires ? Leurs ordinateurs ? Les caprices de la nature ? En fait, la prévision du temps ou du climat est un grand défi scientifique. Son principe, posé en 1904 par le météorologue norvégien Vilhelm Bjerknes, paraît pourtant simple : connaissant les lois d'évolution de l'état de l'atmosphère, on peut calculer son état futur à l'instant $t$ si l'on connaît son état initial, à l'instant 0. Mais à y regarder de plus près, les difficultés sont nombreuses.

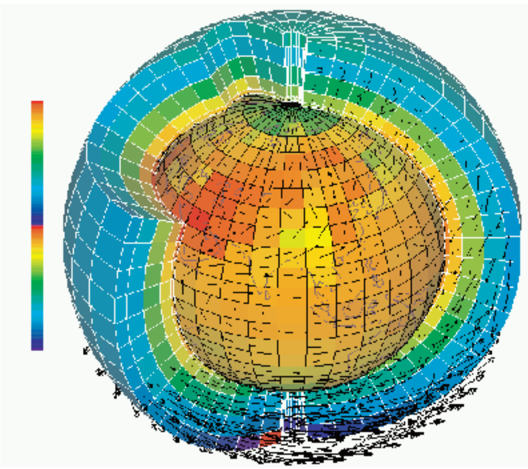
Tout d'abord, les lois d'évolution ont à inclure les lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique pour l'eau et l'air de l'atmosphère. On doit aussi intégrer les spécificités du système climatique, comme la sphéricité de la Terre, le rayonnement solaire, le rôle du relief, celui des océans, celui de la végétation, etc. Tout cela fait de la machinerie météorologique un système extrêmement complexe, faisant intervenir une multitude de phénomènes physiques, chimiques ou biologiques. Certains sont bien connus et compris, d'autres beaucoup moins (comme la turbulence ou l'influence des nuages). Une première difficulté a donc trait à l'analyse et la modélisation : il faut identifier, quantifier, retenir les phénomènes qui ont de l'importance, négliger les autres. Cette tâche, même si elle ne relève pas du mathématicien, nécessite des outils mathématiques parfois pointus.

Passons là-dessus. Supposons que l'on ait dégagé un ensemble de lois pertinentes régissant l'évolution des conditions météorologiques. Comment se traduit un tel "modèle" ? Par des équations mettant en jeu des fonctions inconnues, qui caractérisent la situation atmosphérique, et leurs variations. Ces fonctions sont, par exemple, la pression $P(x, y, z, t)$ ou la vitesse $v(x, y, z, t)$ de l'air au point de coordonnées $(x, y, z)$ et à l'instant $t$, ou encore l'humidité $h$, la température $T$, etc. Plus précisément, le modèle météorologique ou climatique se traduit par un système d'équations faisant intervenir les fonctions $P$, $v$, $h$, $T$, etc. (qui dépendent de plusieurs variables) et leurs dérivées par rapport au temps $t$ ou par rapport à $x$, $y$ ou $z$. C'est un système d'"équations aux dérivées partielles" (voir l'encadré).



Ecoulement turbulent  Cliché B. Legras LMD/ENS/CNRS

Le résoudre ne va pas de soi, pour plusieurs raisons. Une résolution "analytique", exacte, est hors de portée : on ne sait le faire que pour de rares équations simples. En outre, plus le modèle essaie de "coller" à la réalité, plus le système d'équations correspondant est gros et compliqué. Les procédés numériques, qui visent à fournir une bonne approximation des valeurs de la solution, constituent le seul recours. Ils sont nombreux et variés, mais l'idée de base est de "discrétiser" les équations : on découpe l'espace et le temps en un nombre fini de morceaux, et l'on considère à titre d'approximation que chacune des fonctions cherchées, la pression $P(x, y, z, t)$ par exemple, a une valeur uniforme à l'intérieur de chaque morceau.



Dans les modèles numériques utilisés par les météorologues ou les climatologues, l'atmosphère est découpée en morceaux, ou cellules, et l'on considère que dans chaque cellule les grandeurs météorologiques (pression, vitesse du vent, température, humidité, etc.) ont des valeurs uniformes. On obtient ainsi des équations simplifiées où le nombre d'inconnues est fini, que l'on résout ensuite numériquement.
(Cliché L. Fairhead LMD/UPMC/CNRS)

De cette manière, on ramène le nombre d'inconnues du problème (les valeurs des fonctions) à un nombre fini. Les dérivées sont alors approximées par des différences ; par exemple, si l'on découpe l'axe des $x$ en morceaux d'égale longueur $\Delta x$, la dérivée par rapport à $x$ d'une fonction $f$ au point $x_0$ peut être approximée par le rapport $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$. En procédant ainsi, on transforme le système d'équations différentielles initial en un système d'équations algébriques à $N$ inconnues (où $N$ est très grand).

La résolution de ce nouveau système, bien que plus simple, demande énormément de calculs numériques. Et plus on découpe finement l'espace et le temps (pour se rapprocher des équations originelles, où les fonctions varient *a priori* continûment lorsque leurs variables changent), plus les calculs sont volumineux. C'est pourquoi les modèles de prévision numérique du temps n'ont fait leur apparition que dans les années 1940, avec l'invention des ordinateurs. C'est aussi pourquoi les prévisions météorologiques se sont améliorées parallèlement à l'augmentation de puissance des ordinateurs.

Mais les ordinateurs ne font pas tout. Par exemple, ils ne garantissent pas que la solution du système discrétisé ressemble à la vraie solution, celle du système initial d'équations aux dérivées partielles. Il y a plusieurs façons de discrétiser des équations, et les résultats obtenus n'ont parfois rien à voir avec la vraie solution, même si l'on découpe l'espace et le temps en morceaux de plus en plus petits. Obtenir des résultats justes n'est pas aisé. La modélisation numérique est tout un art, où joue l'expérience des uns et des autres. Mais elle se perfectionne avec les années : une discipline mathématique entière, l'analyse numérique, consiste à trouver des procédés numériques efficaces, à évaluer rigoureusement leur efficacité, à rechercher des théorèmes et des critères précis permettant de dire si telle ou telle méthode numérique appliquée à tel ou tel système d'équations convergera vers une solution, à quel rythme, et si cette solution sera bien celle espérée.

Les "conditions initiales", c'est-à-dire le temps qu'il fait à l'instant 0, représentent une autre difficulté. Il faut les connaître complètement pour que les équations déterminent le temps qu'il fera à un instant futur *t*. Il faudrait pour cela mesurer la pression atmosphérique, la température, la vitesse du vent, etc. en chaque point de la Terre, et ce au même moment. C'est évidemment impossible, et notre connaissance des conditions initiales n'est que très partielle. Comment gérer ce déficit d'information, comment les modèles doivent le prendre en compte, voilà encore une question où interviennent les mathématiques.

Évoquons pour finir le phénomène de "chaos déterministe", que les mathématiciens des *systèmes dynamiques* étudient de près : pour certains systèmes, même simples, l'évolution est extrêmement sensible à l'état initial. En d'autres termes, en changeant très légèrement l'état initial, l'état futur peut être profondément modifié. L'état initial n'étant jamais connu avec une précision parfaite, la modélisation numérique d'un tel système "chaotique" fournirait à terme un résultat dépourvu de signification ; en changeant légèrement les données du programme de calcul, on obtiendrait un résultat totalement autre. Sachant que certains mécanismes météorologiques ou climatiques sont chaotiques, les experts pensent que l'on ne pourra jamais prévoir le temps avec précision plus d'une quinzaine de jours à l'avance (contre quatre ou cinq jours actuellement). Au-delà, on peut tout de même espérer faire des prévisions climatiques, c'est-à-dire prévoir par exemple des moyennes de températures ou de précipitations. Dur métier que celui de météorologue ou climatologue !

## L'équation de Navier-Stokes

L'une des principales équations de la mécanique des fluides est l'équation de Navier-Stokes, qui intervient dans l'étude de la turbulence, en météorologie, en aérodynamique, etc. Établie au XIX^e siècle, elle fait encore l'objet de nombreuses études mathématiques, pour déterminer par exemple dans quelles conditions sa solution existe et est unique. Cette équation traduit localement, en chaque point d'un fluide en mouvement, la loi fondamentale de la dynamique (force = masse x accélération), dans l'approximation où le fluide est incompressible. En l'absence de forces extérieures, et à deux dimensions pour simplifier, l'équation de Navier-Stokes constitue un système de trois équations aux dérivées partielles liant la vitesse et la pression. Celles-ci s'écrivent :

$$\rho\partial v_x/\partial t + \rho(v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y) = -\,\partial P/\partial x + \alpha(\partial^2 v_x/\partial x^2 + \partial^2 v_x/\partial y^2)$$

$$\rho\partial v_y/\partial t + \rho(v_x\partial v_y/\partial x + v_y\partial v_y/\partial y) = -\,\partial P/\partial y + \alpha(\partial^2 v_y/\partial x^2 + \partial^2 v_y/\partial y^2)$$

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$$

où $\rho$ est la densité du fluide, $\alpha$ un coefficient de viscosité, $P(x, y, t)$ la pression au point $(x, y)$ et à l'instant $t$, $v_x(x, y, t)$ et $v_y(x, y, t)$ les composantes selon O*x* et O*y* respectivement du vecteur vitesse du fluide au point $(x, y)$ et à l'instant $t$ (la "dérivée partielle" d'une fonction $f(x, y, t)$ par rapport à $x$, notée $\partial f/\partial x$, est la dérivée de $f$ par rapport à $x$ en considérant les autres variables comme fixes). À l'équation de Navier-Stokes, que l'on ne sait résoudre que numériquement, on doit adjoindre des "conditions initiales" ou des "conditions aux limites" sur les fonctions inconnues pour que le problème soit mathématiquement bien posé.