Concours SMF Junior 2017

Rappel des consignes

Le concours se termine le jeudi 11 mai 2017 à 23h59.

Les copies sont à rendre sous forme de fichiers pdf déposés sur le site https://concourssmf2017.sciencesconf.org*. Il n'est pas obligatoire de résoudre tous les problèmes.*

Il faut un fichier par problème. Le nom de fichier doit commencer par l'acronyme de votre équipe, suivi de `_solution`*, suivi du numéro de problème (qui doit correspondre à la* nomenclature*). Par exemple,* `ACrO_solution8.pdf`.

Avant le dépôt, préparez vos fichiers pdf, et ouvrez le Guide du dépôt de solutions*. Suivez scrupuleusement les instructions : un dépôt par problème.*

N'attendez pas la dernière minute pour déposer. En principe, vous avez accès à vos dépôts et vous pouvez les modifier jusqu'à la fin du concours.

La remise des prix aura lieu à Paris, dans le quartier latin, à l'Institut Henri Poincaré, le samedi 10 juin à 16h30. Tous les candidats sont invités !

Problème 1 : Algèbre

Soient $p, q \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants, c'est-à-dire tels que, pour tout couple (a, b) d'entiers strictement positifs, on a $p^a \neq q^b$. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ sont deux polynômes complexes sans terme constant tels que

$$f(x^q) - f(x) = g(x^p) - g(x). \tag{1}$$

Montrer qu'il existe un polynôme complexe $h(x)$ tel que

$$h(x^p) - h(x) = f(x) \text{ et } h(x^q) - h(x) = g(x). \tag{2}$$

Problème 2 : Analyse

Notations et but du problème

Soit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels modulo 2π. Soit d un entier strictement positif. Les fonctions sur $\mathbb{T}^d$ seront identifiées avec des fonctions 2π périodiques en chacune des variables. On peut écrire indifféremment $\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\mathrm{d}x$ ou $\int_{(-\pi,+\pi)^d} f(x)\mathrm{d}x$ pour l'intégrale d'une fonction intégrable f définie sur $\mathbb{T}^d$. Pour $p \geq 1$, l'espace $L^p(\mathbb{T}^d)$ est l'espace des (classes de) fonctions f mesurables 2π périodiques en chacune des variables telles que

$$\|f\|_p^p := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

La suite des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ est définie par

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-in\cdot x} \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Ici $n \cdot x$ est le produit scalaire $\sum n_j x_j$. On notera $|x|$ la norme euclidienne d'un vecteur x de $\mathbb{R}^d$. La définition de coefficient de Fourier s'étend aux mesures de Borel bornées sur $\mathbb{T}^d$. Pour une telle mesure μ, on pose

$$\hat{\mu}(n) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-in\cdot x}\, \mu(\mathrm{d}x), \qquad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Soit B un espace de Banach de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}^d$ dans lequel les polynômes trigonométriques sont denses. On dira que la suite $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est un **multiplicateur de Fourier** de B, ou plus simplement, un multiplicateur, s'il existe une constante C telle que, pour tout polynôme trigonométrique f, le polynôme trigonométrique

$$T_m f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} m(n)\hat{f}(n)e^{in\cdot x}$$

satisfait l'inégalité

$$\|T_m f\|_B \leq C\|f\|_B.$$

La norme du multiplicateur, notée $\|m\|$, est la borne inférieure des constantes C pour lesquelles une telle inégalité a lieu.

Lorsque B est l'espace $L^1(\mathbb{T}^d)$, l'espace des multiplicateurs coïncide avec l'espace des coefficients de Fourier des mesures bornées. La mesure μ correspondant au multiplicateur m est telle que $T_m f = \mu \star f$ (produit de convolution).

L'espace de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{T}^d)$ est le complété de l'espace des polynômes trigonométriques pour la norme

$$\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{T}^d)} := \|f\|_1 + \|\nabla f\|_1.$$

On se propose de montrer qu'alors que l'espace des multiplicateurs de Fourier de $W^{1,1}(\mathbb{T})$ coïncide avec l'espace des multiplicateurs de $L^1(\mathbb{T})$, ce n'est plus le cas en dimension supérieure. La recherche de contre-exemple sera basée sur l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

A. Résultats préliminaires

1. Montrer que la suite des coefficients de Fourier d'une mesure bornée est un multiplicateur de $W^{1,1}(\mathbb{T}^d)$ quelle que soit la dimension d.
2. Montrer que si m est un multiplicateur de $W^{1,1}(\mathbb{T}^d)$,
$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |m(n)| \leq \|m\|.$$
3. Montrer qu'il n'y a pas d'autres multiplicateurs de $W^{1,1}(\mathbb{T}^d)$ que les suites de coefficients de Fourier des mesures bornées lorsque la dimension est 1.
4. Montrer qu'il suffit de trouver un contre-exemple en dimension 2 pour construire un contre-exemple en toute dimension $d > 1$.

B. Le contre-exemple

1. On pourra montrer ou admettre l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg pour $W^{1,1}(\mathbb{T}^2)$: il existe une constante C telle que, pour tout polynôme trigonométrique,
$$\|f\|_2 \leq C\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{T}^2)}.$$
2. On pourra admettre l'inégalité de Khintchine : soit X_j une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, c'est-à-dire prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité 1/2. Il existe une constante C telle que pour toute suite finie a_n on ait
$$\left(\sum |a_j|^2\right)^{1/2} \leq C\,\mathbb{E}\left(\left|\sum a_j X_j\right|\right).$$

3. Montrer l'existence d'une constante C telle que, quelle que soit la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ de coefficients égaux à ± 1, la suite $\frac{\varepsilon_n}{(|n|^2+1)^{1/2}}$ est un multiplicateur de norme bornée par C.
4. En déduire qu'il existe des multiplicateurs qui ne sont pas les coefficients de Fourier d'une mesure bornée.

Problème 3 : Combinatoire-cryptographie

On se donne des entiers $p \geq 1$, $n \geq 2$, $k_i \geq 1$ pour $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$k_1 + \ldots + k_n = 2p.$$

Soit l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation

$$x_1 + \ldots + x_n = p\,,\ 0 \leq x_i \leq k_i\,.$$

Il s'agit de donner un minorant de $c_p := \#\mathcal{S}$ (cardinal de $\mathcal{S}$), notamment dans le cas p grand, qui soit explicite selon $k_1, \ldots, k_n$. Montrer qu'on a par exemple

$$c_p \geq C_n \frac{\prod_{i=1}^n k_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2}},$$

pour une constante $C_n > 0$, dont on pourra donner une expression ou un moyen de calcul.

Il n'est pas interdit de proposer une meilleure minoration de c_p, ou même un équivalent simple quand p est grand.

Problème 4 : Géométrie

Sur un plan pavé par des triangles équilatéraux on déplace un solide régulier (à faces triangulaires) dont les faces ont la même taille que les dalles du pavage. Le solide est posé sur une seule dalle et pour se déplacer sur les dalles voisines il bascule sur l'arête commune aux dalles d'avant et d'après le mouvement.

À partir d'une position initiale, quelles sont les positions (dalle et orientation du solide) atteignables en se déplaçant ? On étudiera les solides réguliers suivants :

1. le tétraèdre,
2. l'octaèdre,
3. l'icosaèdre.
4. On se pose la question supplémentaires des positions atteignables lorsqu'un tétraèdre roule sur un icosaèdre.

Problème 5 : Modélisation

Une personne se trouve sur le trottoir sud d'une longue route rectiligne orientée est-ouest, et doit la traverser en se déplaçant en même temps d'une certaine distance (fixée, et non nulle) vers l'ouest.

Elle marche à une vitesse prescrite et constante et voudrait arriver à destination le plus rapidement possible. Cependant, tant qu'elle marche en pleine chaussée, il y a un risque de se faire renverser par une voiture, et ce risque (par unité de temps) est une fonction croissante de la distance aux trottoirs (donc, maximal au milieu de la chaussée, et croissant en s'y rapprochant ; on suppose aussi que cette fonction "risque" est une fonction régulière de la position où on se trouve). Elle décide donc de choisir sa trajectoire de manière à minimiser la somme du temps et d'un coût proportionnel au risque total de se faire renverser pendant le parcours.

Prouver qu'une telle trajectoire optimale existe, et en discuter les propriétés qualitatives :
- S'agit-il du graphe d'une fonction ?
- Quelle est l'équation différentielle satisfaite par la courbe et/ou le graphe ?
- Que peut-on dire de la courbure de cette trajectoire (concavité ou convexité du graphe) ?

Prouver également l'unicité de cette trajectoire optimale.

Problème 6 : Probabilités

Soit μ une loi sur $\mathbb{Z}$ fixée. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on appelle *marche aléatoire* partant de k et de loi des pas μ une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que
- $S_0 = k$ presque sûrement,
- la suite des pas $(X_n)_{n\geq 1}$, définie pour tout $n \geq 0$ par

$$X_{n+1} = S_{n+1} - S_n,$$

  est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ.

Dans la suite, on notera $\mathbb{P}^k$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que sous $\mathbb{P}^k$, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire partant de k et de loi des pas μ.

Le but du problème est de décrire une méthode permettant de déterminer la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad u_k = \mathbb{P}^k(\forall n \geq 0,\ S_n \geq 0).$$

1. On se propose d'étudier d'abord le cas particulier suivant :

$$\mu = \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{(-2)}.$$

   Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire que l'on déterminera.

   Montrer que $\lim_{k\to+\infty} u_k = 1$, puis exprimer u_k en fonction de k.
2. On suppose maintenant que la loi μ est à support dans un ensemble fini $\{-p, \ldots, q\} \subset \mathbb{Z}$ et telle que $\mathbb{E}(X_1) > 0$.

   Déterminer une méthode, la plus générale possible, permettant d'exprimer u_k en fonction de k.

Problème 7 : Systèmes dynamiques

On appelle *cycle limite* d'un champ de vecteurs défini sur un domaine (c'est-à-dire un ouvert connexe) de $\mathbb{R}^2$ une orbite fermée, qui est isolée : cela signifie qu'elle a un voisinage dans lequel il n'y a aucune autre orbite périodique.

On se donne une fonction holomorphe $f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$ sur un domaine dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, et on considère le champ de vecteurs $X = (f_1, f_2)$ défini sur ce domaine.

Démontrer que le champ X ne peut pas avoir de cycles limites.

Problème 8 : Théorie de la mesure

Soit $n \geq 2$ un entier, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres strictement positifs. Supposons que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

1. Démontrer l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_n b_n\right| \leq \frac{M-m}{M+m} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|, \tag{3}$$

où

$$m = \min_{1\leq k\leq n} b_k \quad \text{et} \quad M = \max_{1\leq k\leq n} b_k.$$

2. Montrer que la constante $\frac{M-m}{M+m}$ dans l'inégalité (3) est optimale.
3. Plus généralement, soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$ deux fonctions réelles. Supposons que $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$, et $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ μ-presque partout avec des constantes vérifiant $0 < \alpha < \beta < \infty$. Montrer que

$$\left|\int_X f g \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} \int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu.$$

Problème 9 : Théorie des nombres

Pour un entier $n \geq 2$ donné, déterminer l'entier minimal $\sigma(n)$ tel que tout élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit une somme de $\sigma(n)$ carrés.

Problème 10 : Topologie

On dit qu'un espace métrique (X, d) est *géodésique* si pour tous points x et $y \in X$, il existe (au moins) un *segment géodésique* joignant x et y, c'est-à-dire une application $\gamma : [0, d(x,y)] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x,y)) = y$ et $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t|$ pour tous $0 \leq s, t \leq d(x,y)$.

Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Soit G un groupe agissant à gauche sur X par isométries. On note simplement l'action $(g, x) \mapsto gx$. On dit que l'action est *proprement discontinue* si, pour toute partie compacte $K \subset X$, l'ensemble

$$\{g \in G\,;\, gK \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

On fixe un espace métrique (X, d) géodésique localement compact. On se donne une action à gauche proprement discontinue d'un groupe G par isométries sur (X, d). On suppose que l'espace quotient X/G est compact.

1. Montrer que pour tout $x \in X$ et tout $R > 0$, le nombre

$$N_G(x, R) := \#\{g \in G\,;\, d(x, g(x)) \leq R\}$$

est fini.

2. Montrer que la limite

$$\delta_G := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \ln N_G(x, R)$$

existe, et qu'il existe une constante C telle que, pour tout $R > 0$,

$$N_G(x, R) \geq C e^{\delta_G R}.$$

Indication. Soit Λ un réel suffisamment grand pour que les boules $B(gx, \Lambda)$ recouvrent X lorsque g décrit G. On montrera que la fonction $R \mapsto \#\{g \in G\,;\, R - 2\Lambda \leq d(x, g(x)) \leq R + 2\Lambda\}$ est sous-multiplicative.