

Le piano rêvé des mathématiciens

Juliette Chabassier, *chargée de recherche Inria, équipe Magique-3D*

Comme de nombreux phénomènes physiques, le fonctionnement d'un piano peut être modélisé grâce aux mathématiques. Mais le modèle obtenu permet aussi d'aller plus loin, de rêver de pianos impossibles ou d'imaginer des sons nouveaux. La recherche offre ainsi au compositeur un formidable champ d'exploration et de création.

Le piano est un système acoustique et mécanique assez sophistiqué. On peut résumer très schématiquement son fonctionnement de la façon suivante (voir figure 1) : le doigt du pianiste frappe une touche du clavier, un mécanisme très précis démultiplie le mouvement de la touche et met en mouvement un marteau. Le marteau frappe entre une et trois cordes à la fois (selon la note choisie), qui se mettent en vibration. Le chevalet permet de transmettre l'énergie des cordes à la table d'harmonie, qui vibre elle aussi, mettant en mouvement les molécules d'air avoisinantes, et entraînant la propagation d'un son dans l'air.

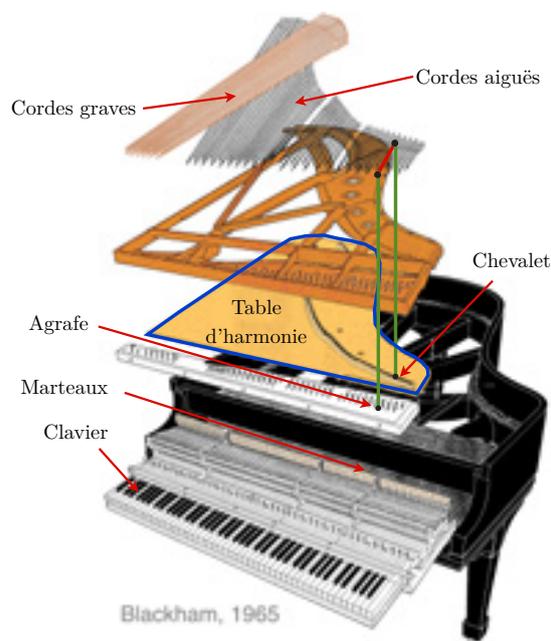


Figure 1. Vue éclatée d'un piano à queue.

Des EDP derrière les touches

Comme la plupart des phénomènes physiques qui nous entourent, le fonctionnement du piano peut être décrit mathématiquement à l'aide d'équations aux dérivées partielles (abrégées en EDP). Les EDP sont des équations qui mettent en relation les dérivées d'une ou plusieurs fonctions par rapport à leurs différentes variables: le temps, l'espace... Certaines EDP sont assez célèbres: *l'équation de la chaleur*, qui modélise l'évolution de la température dans un milieu; les *équations de propagation d'ondes*, qui modélisent la vibration d'une corde et la propagation du son; les *équations de Navier-Stokes*, qui interviennent en mécanique des fluides; les *équations de Maxwell*, qui sont celles de l'électromagnétisme; les *équation de l'élastodynamique*,

qui modélisent les ondes sismiques mais aussi la déformation des matériaux; ou encore *l'équation de Schrödinger*, qui modélise l'évolution d'une particule quantique.

Revenons à notre piano: chacune des étapes acoustiques citées plus haut peut donc être modélisée par une EDP (pour les cordes, ce sera une équation des ondes monodimensionnelle avec raideur, pour la table d'harmonie, une équation de vibration de plaque, pour l'air, une équation de propagation des ondes tri-dimensionnelle) ou par une équation d'une autre nature (pour le marteau on aura une équation différentielle ordinaire, au chevalet on exprimera l'égalité des vitesses, et pour le couplage table d'harmonie/air, l'équation traduira l'égalité aussi des vitesses mécanique et acoustique).



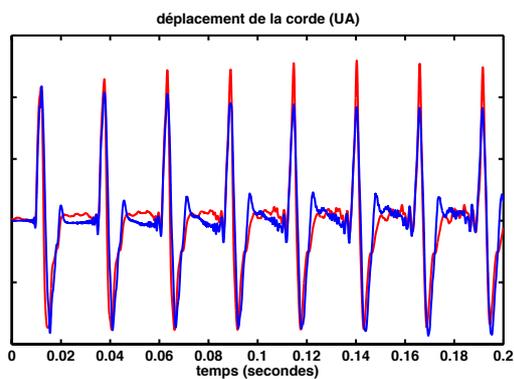
Figure 2. Maillage d'une table d'harmonie.

De manière générale, les EDP sont des équations complexes dont il est en général impossible de donner la solution au moyen d'une formule. Les problèmes physiques qu'elles traduisent, et qui combinent la plupart du temps plusieurs de ces équations, le sont aussi, à plus forte raison. Diverses méthodes permettent d'en calculer les solutions approchées décrivant le mieux possible la réalité (voir l'encadré *Analyse numérique des EDP*). Cela passe souvent par la *discrétisation* du problème et par le calcul sur ordinateur de solutions approchées.

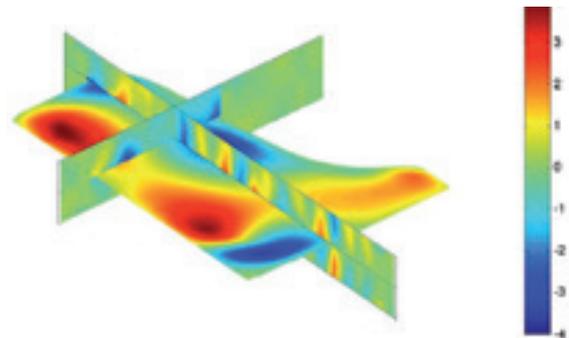
Un modèle général du piano est établi grâce aux EDP, puis discrétisé sous la forme d'un maillage, et enfin les solutions sont calculées numériquement.

C'est ce que l'on fait dans le cas du piano: un modèle général est établi grâce aux équations, puis discrétisé sous la forme d'un *maillage* (voir un maillage de table d'harmonie en figure 2), et enfin les solutions sont calculées numériquement grâce à des méthodes d'analyse numérique développées précisément pour l'occasion.

Grâce à ce modèle et aux simulations numériques qui en découlent, on parvient à reproduire fidèlement des formes d'ondes (voir figure 3), mais aussi, par exemple, à connaître le champ de pression de l'air sur un ensemble de points tout autour du piano, ce qui serait impossible à mesurer sans perturber le système: si on essayait de faire cette mesure en entourant le piano d'un réseau de capteurs, la présence même



(a) Comparaison simulation numérique (bleu)/expérience (rouge): déplacement de la corde D#1 pendant les 200 premières millisecondes.



(b) Déplacement sur la table d'harmonie en couleurs arbitraires et pression dans l'air (deux plans de coupe) en Pa (échelle de couleur sur la droite), 16 millisecondes après la frappe du marteau sur la corde C2.

Figure 3. Résultats de simulation numérique: vérification et prédictions

de ce réseau provoquerait un phénomène de diffraction du son et fausserait donc la mesure effectuée.

Pianos virtuels

L'une des applications les plus enthousiasmantes de ce modèle et de sa discrétisation numérique est l'aide à la facture instrumentale. Aujourd'hui, la facture du piano est majoritairement basée sur un savoir empirique issu de siècles d'expérimentations, d'échecs, de succès... Les facteurs, c'est-à-dire ceux qui conçoivent et réalisent les instruments, ont ainsi acquis un ensemble de connaissances extrêmement précises. On trouve par exemple dans la littérature spécialisée des affirmations telles que : « les rouleaux des marteaux influent sur le toucher du piano à queue de façon décisive », ou encore « la table d'harmonie est

en épicea de Sitka, un bois d'une densité et d'une élasticité idéales pour la résonance ». Ces affirmations intriguent beaucoup les chercheurs en acoustique musicale qui s'attachent, en utilisant des méthodes scientifiques, à leur donner raison ou tort, et à aller plus loin dans la compréhension des phénomènes mis en jeu. Le modèle de piano peut alors permettre d'isoler certains phénomènes afin de comprendre leur influence sur le son, sur le rayonnement, ou encore sur la transmission de l'énergie... mais aussi de construire virtuellement des pianos qui n'existent pas (changer la forme ou la taille de la table, les matériaux utilisés, la façon de l'utiliser...) et de pouvoir écouter le son qu'ils auraient s'ils étaient construits.

Encore plus intrigant, le modèle permet de générer des sons d'objets qui ne peuvent pas exister pour des raisons pratiques (matériaux inventés, cordes de sept mètres



de long, piano flottant sans cadre ni pieds...) mais qui pourtant respectent les lois de la physique et dont le son paraît donc plausible à l'oreille (en ce sens que le cerveau parvient à les attribuer à un événement, une cause physique, une dynamique associée). On touche là une application très intéressante du point de vue de l'interaction entre science et musique: la recherche offre au compositeur des instruments nouveaux, un matériau sonore jusqu'ici inexistant et adaptable à souhait. A une époque où le timbre et la manipulation du son sont au cœur de la création musicale, elle lui permet d'aller toujours plus loin.

Le modèle permet de générer des sons d'objets qui ne peuvent pas exister pour des raisons pratiques.

Un outil pour le compositeur

Ces possibilités sont parfaitement illustrées par les travaux du compositeur Guillaume Loizillon, qui utilise un logiciel de synthèse sonore par modèles physiques développé à l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, Modalys, permettant de modéliser une multitude d'instruments existants ou chimériques. Il dit à ce sujet: « Ce que je trouve intéressant dans Modalys, plus que l'imitation d'un timbre, c'est que cela permet, au niveau d'un son unique, de donner, de manière assez évidente, l'idée de la matière, du métal, du bois. Deuxième chose, cela permet de créer des dynamiques, des événements et non pas des objets. [...] C'est-à-dire que le son raconte un événement: cela roule, cela rebondit. »

Analyse numérique des EDP

Quand on s'intéresse à des applications concrètes des EDP (en météorologie, en sismologie, en aéronautique, en construction automobile...), il ne suffit pas de connaître l'existence et le comportement d'une solution dans son espace abstrait mathématique. Les physiciens ont besoin de pouvoir au moins estimer cette solution quantitativement. La science qui consiste à chercher une approximation de la solution d'une EDP de façon précise et performante grâce à l'utilisation d'ordinateurs est celle du calcul scientifique et de

l'analyse numérique. L'idée est de ramener l'infini de l'espace mathématique de la solution de l'EDP au caractère foncièrement fini et discret (par opposition à continu) de l'ordinateur, mais en s'assurant que plus on fera d'efforts (en termes de temps de calcul ou de puissance du processeur), plus on s'approchera de la « vraie » solution. Une des méthodes les plus connues et les plus répandues dans l'industrie est probablement la *méthode des éléments finis*.



Le compositeur peut même dépasser le monde physique existant et en imaginer un autre, aux lois différentes: « Ensuite ce que j'aime c'est aller dans des modèles plus utopiques » poursuit Guillaume Loizillon. « Avec Jean Claude Risset [NDLR: compositeur également], on avait discuté du sujet *est-ce que l'on peut créer une physique non terrienne*. [...] On peut imaginer une physique où les objets rebondissent pendant des heures et des heures, où la pesanteur n'est plus la même. »

Ainsi, la modélisation instrumentale ouvre au musicien des champs d'exploration inouïs.

Pour aller plus loin

Site web: <http://modelisation.piano.free.fr>

Les citations de Guillaume Loizillon sont extraites de *La synthèse par modèles physiques*, mémoire de maîtrise de Aline Hufschmitt, Université Paris Sorbonne (Paris IV), disponible à l'adresse alinehuf3.free.fr

