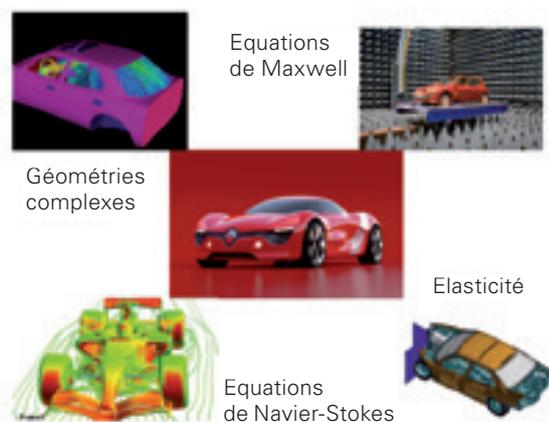


EDP à la française

John Ball, *professeur à l'Université d'Oxford*

Spécialiste des équations aux dérivées partielles, John Ball raconte ici comment ce domaine des mathématiques appliquées a connu un formidable essor en France, grâce en particulier à une figure emblématique: le professeur Jacques-Louis Lions.



dans le domaine des équations aux dérivées partielles (EDP). C'est de cette dernière école dont je parlerai ici car je m'en sens particulièrement proche, du fait de mon parcours et de mes longs et heureux séjours à Paris, au Laboratoire Jacques-Louis Lions, l'un des principaux centres mondiaux pour les EDP et leur analyse numérique. A Paris vivent plus d'experts de ce domaine que dans toute autre ville du monde. En fait, il y en a plus que dans bien des pays !

La France est un acteur important sur la scène mathématique mondiale dans presque toutes les branches de la discipline, avec une représentation particulièrement forte en algèbre, en géométrie, en théorie des nombres, en probabilités, ou encore

Le rôle essentiel de Jacques-Louis Lions

La création de cette école a été en grande partie le travail d'un homme, Jacques-Louis Lions. Après des études à l'École normale

supérieure de 1947 à 1950, et l'obtention de son doctorat sous la direction de Laurent Schwartz, Lions a commencé à s'attaquer au problème de résoudre, tant d'un point de vue théorique que numérique, diverses équations aux dérivées partielles qui servaient à décrire certains phénomènes réels. Il a perçu la nécessité, pour les mathématiques appliquées, de relever les défis résultant de l'utilisation croissante des simulations sur ordinateur. Comment savoir que de telles simulations produisaient la bonne réponse ? S'appuyer sur l'intuition physique ne suffisait plus dans le monde non-linéaire. Une compréhension fondamentale du comportement des solutions était nécessaire, afin de fournir une trame pour des schémas numériques.

La théorie moderne des équations aux dérivées partielles se construisait également de l'autre côté de l'Atlantique, au Courant Institute, à New-York, conduite par des personnalités tels que Kurt Friedrichs, Peter Lax, Louis Nirenberg, Fritz John, Joe Keller et Jürgen Moser, ainsi qu'en Russie, entre autres par les grandes mathématiciennes Olga Ladyzhenskaya et Olga Oleinik. Mais l'approche adoptée par Lions était plus abstraite, basée sur l'analyse fonctionnelle et en particulier la *convergence faible*, c'est-à-dire la convergence des moyennes, motivée par les travaux de Jean Leray et Eberhard Hopf sur les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le flux de fluides visqueux tels que l'huile et l'eau.

Lions a synthétisé et mis au point un éventail de techniques permettant l'utilisation de la convergence faible dans l'étude

des équations aux dérivées partielles non linéaires. Le corpus théorique résultant de ces travaux s'est révélé suffisamment souple pour permettre de traiter une large gamme de problèmes importants en mécanique et en physique. Une fois maîtrisées, ces idées sont devenues très faciles à utiliser. Bien qu'elles ne permettent pas de répondre aux questions techniques les plus profondes, qui exigeaient des méthodes d'analyse spécifiques, leur caractère systématique signifiait qu'elles pouvaient être utilisées efficacement dans de nombreuses situations. L'essor de cette école, propulsé par de nombreux étudiants de Lions ayant eux-mêmes acquis une renommée internationale, a été extraordinaire. Et son influence sur l'industrie française a été profonde.



*Jacques-Louis Lions au Centre national
d'études spatiales*

*L'essor de cette école a été
extraordinaire et son influence
sur l'industrie française a été
profonde.*



Cauchy et les modèles mathématiques

L'approche des équations aux dérivées partielles adoptée en France est une manière particulière, très influente et à l'impact profond, de faire des mathématiques appliquées. Mais ce n'est pas la seule façon de faire. Un contraste intéressant peut être relevé avec l'un des plus grands mathématiciens français, le baron Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), dont le nom est connu de tous les étudiants en mathématiques, par exemple grâce à la formule intégrale de Cauchy en analyse complexe et aux suites de Cauchy. Il semble que Cauchy n'ait pas été un collègue très agréable, mais son approche des mathématiques était admirable et tout à fait moderne en ce qu'il ne faisait pas de distinction artificielle entre mathématiques pures et appliquées. En effet, Cauchy a fondé l'analyse complexe en même temps qu'il introduisait la notion de contrainte dans un milieu continu, d'une importance incalculable pour l'ingénierie moderne, et écrivait pour la première fois les équations de l'élasticité linéaire, en faisant un lien entre les théories des solides à l'échelle atomique et celle des milieux continus (même si les atomes n'avaient pas encore été observés). Ainsi, Cauchy assumait la responsabilité des modèles mathématiques sur lesquels il travaillait, ainsi que celle de leur analyse. Une telle attitude n'est pas tout à fait dans la tradition française moderne des mathématiques appliquées, dans laquelle la création de modèles mathématiques est largement laissée aux chimistes, physiciens, biologistes, mécaniciens et aux économistes. Pour être

tout à fait juste, l'attitude moderne est aussi celle de nombreux mathématiciens dans le monde entier, mais il y aurait certainement beaucoup à gagner en associant la modélisation et l'analyse. Les travaux de Cauchy en offrent un bon exemple à travers sa découverte du théorème de décomposition polaire pour les matrices, qui fut une conséquence directe de son travail sur la mécanique des milieux continus.

Si les travaux de Lions et d'autres analystes appliqués ont été une source d'inspiration mathématique, ils m'ont aussi apporté le réconfort psychologique de savoir qu'il n'y avait pas lieu d'opposer bonnes mathématiques appliquées et raisonnements rigoureux!



Mathématiques pures ou appliquées ?

Je n'ai jamais bien compris ce qui a conduit à la polarisation des mathématiques pures d'un côté et appliquées de l'autre pendant la majeure partie du xx^e siècle, tant celle-ci me semble en contradiction avec l'esprit de l'unité de la science et des mathématiques représentées par plusieurs des plus grands mathématiciens universels, comme Archimède, Newton, Euler, Gauss, Riemann, Poincaré et Cauchy. En Grande-Bretagne, G.H. Hardy en fut peut-être en partie responsable, même si, ironiquement, ses mathématiques ont trouvé de nombreuses applications aux équations aux dérivées partielles résultant des sciences de la matière. En France, l'école Bourbaki a adopté dans ses traités (souvent précieux) une approche

pure sans compromis, distanciant systématiquement les mathématiques fondamentales des applications. Quand j'étais étudiant en doctorat dans les années 1960 et au début des années 1970, j'ai certainement ressenti en Grande-Bretagne que la majorité des mathématiciens appliqués n'accordaient pas aux théorèmes une grande valeur (et inversement, les spécialistes de mathématiques dites pures ne s'intéressaient guère aux applications). C'est pourquoi, si les travaux de Lions et d'autres analystes appliqués ont été une source d'inspiration mathématique, ils m'ont aussi apporté le réconfort psychologique de savoir qu'il n'y avait pas lieu d'opposer bonnes mathématiques appliquées et raisonnements rigoureux !

