

Garder le contrôle... ... à l'aide des mathématiques

Karine Beauchard, *chargée de recherche CNRS à l'École polytechnique*
Jean-Michel Coron, *professeur à l'Université Pierre et Marie Curie*
Pierre Rouchon, *professeur à Mines-ParisTech*

Contraindre la trajectoire d'un satellite, réguler la température de sa maison, stabiliser le niveau d'eau d'un canal... les situations nécessitant que l'on contrôle une donnée, une quantité, une position, sont omniprésentes. Ces problèmes sont l'objet d'une théorie mathématique très riche : la théorie du contrôle.

Posons un balai verticalement, à l'envers, sur une surface plane (le bout du balai est rond). La position où le balai est vertical, immobile, est une position d'équilibre : en théorie, lorsque le balai se trouve dans cette configuration, il y reste. En pratique, ce n'est pas ce que l'on constate (le balai s'éloigne de la verticale et finit par tomber) parce que le balai n'est pas exactement sur la position d'équilibre (il n'est pas parfaitement vertical ni parfaitement immobile). Ainsi, de petites perturbations produisent de grands effets : même si le balai est près de la position d'équilibre au début de l'expérience, il finit par s'en éloigner énormément. On dit alors que l'équilibre est instable.

Maintenant, posons le balai sur notre index. En bougeant notre doigt habilement, on

peut éviter que le balai ne tombe, même si cela requiert un certain entraînement. Dans le jargon de la théorie du contrôle, le mouvement de notre doigt est une *commande* qui agit sur le *système* (le balai). En fait, notre doigt exerce sur le balai une *rétroaction*, aussi appelée *feedback*, de façon à rendre stable un équilibre instable. Ce feedback repose sur le fait que nos yeux voient le balai tomber et donc si le balai commence par pencher à droite, on bougera notre index vers la droite, et ce d'autant plus vite que le balai penchera vite. Ainsi la position de notre index, la commande, dépend à chaque instant d'une combinaison de la position et de la vitesse du balai : c'est un feedback stabilisant le balai autour de son équilibre vertical instable.

Notre doigt exerce sur le balai une rétroaction, aussi appelée « feedback », de façon à rendre stable un équilibre instable.

Ce problème de stabilisation du balai est typiquement un problème dit de *contrôle*. La théorie du contrôle étudie des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. La commande est ici utilisée pour amener le système d'un état initial donné à un état final souhaité malgré des perturbations. Le problème de la stabilisation est une question centrale de la théorie du contrôle.

Les horloges à eau d'Alexandrie

Historiquement, l'un des plus anciens feedbacks construits par l'homme est celui inventé par Ctésibios, ingénieur grec d'Alexandrie au III^e siècle avant J.-C., pour les horloges à eau ou clepsydres, dont le but est de mesurer le temps qui passe, problème qui remonte aux premières civilisations. Le principe de la clepsydre est le suivant: un premier récipient, percé en son fond d'un trou, est rempli d'eau. L'eau

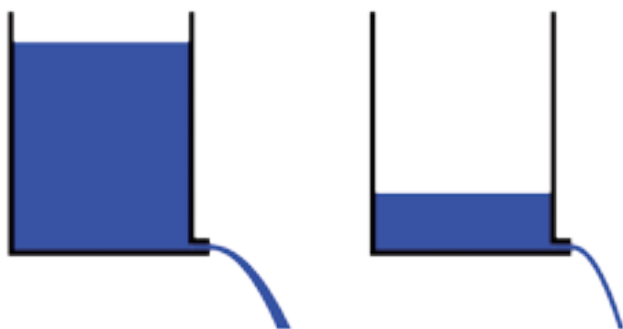


Figure 1. Quand le niveau baisse, le débit diminue.

s'écoule par le trou dans un autre récipient. On peut alors mesurer le temps en mesurant la hauteur de l'eau dans le second récipient. Cette méthode a été utilisée par les égyptiens dès le milieu du deuxième millénaire avant J.-C. Le problème de cet appareil est qu'il est difficile d'assurer un débit constant du premier récipient vers le second: plus il y a d'eau dans le premier récipient, plus le débit est important, comme illustré sur la figure 1. Ainsi, le débit de l'eau décroît au cours du temps et le niveau d'eau dans le deuxième récipient n'est pas proportionnel au temps écoulé.

Pour pallier ce problème, Ctésibios a introduit au III^e siècle avant J.-C. le dispositif représenté sur la figure 2. Il y a maintenant trois récipients; l'eau s'écoule du premier récipient vers le second, puis du second vers le troisième. C'est dans le deuxième récipient que se trouve le feedback. Quand le niveau de l'eau dans le récipient 2 est trop élevé, le flotteur rouge vient toucher la coiffe verte. Cela empêche l'eau de passer du récipient 1 vers le récipient 2. Par contre, si le niveau de l'eau dans le récipient 2 est bas, le flotteur rouge ne restreint pas le débit de l'eau du récipient 1 vers le récipient 2. Par construction, le débit du récipient 1 vers le récipient 2 est alors supérieur au débit du récipient 2 vers le récipient 3, donc le niveau de l'eau va monter dans le récipient 2, jusqu'à ce que le flotteur rouge soit de nouveau trop haut. On garde ainsi un niveau d'eau presque constant dans le récipient 2, ce qui assure un débit constant du récipient 2 vers le récipient 3. Le niveau d'eau dans le récipient 3 donne donc une mesure relativement bonne du temps écoulé.

Le premier régulateur industriel

Le premier régulateur utilisé au niveau industriel est le régulateur de James Watt (1736-1819), qui sert à réguler la vitesse de rotation des machines à vapeur. On le voit sur l'image 3 et le schéma 4. Son fonctionnement est le suivant. Lorsque la machine tourne, elle transmet (par un système non représenté) son mouvement à l'axe du régulateur, qui tourne alors autour de la verticale à une vitesse proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. Le cadre du régulateur est solidaire de son axe et tourne donc à la même vitesse. Quand la vitesse de rotation augmente, les deux boules, sous l'action de la force centrifuge, s'écartent de l'axe vertical et le manchon rouge monte. Ce manchon rouge, par un jeu de tringles non représenté, agit sur la vanne d'admission de la vapeur dans la machine. Ainsi, si la machine tourne plus vite que souhaité, le

manchon monte: cela provoque une réduction de l'arrivée de vapeur, et la machine finit par tourner moins vite. Par contre, si la machine tourne moins vite que souhaité, le manchon descend: cela provoque une ouverture plus importante de la vanne d'admission, rendant plus importante l'arrivée de vapeur, et la machine se met à tourner plus vite. Le régulateur de Watt exerce ainsi un feedback sur la machine à vapeur. Cette action dépend, à chaque instant, de l'état de la machine à vapeur.

Ce n'est que quatre-vingts ans plus tard que la première analyse mathématique de ce type de régulation sera faite, par James Clerk Maxwell (1831-1879). Le régulateur de Watt y est modélisé par une équation différentielle.

Dans notre monde actuel, les régulateurs sont omniprésents. Par exemple, le thermostat d'une maison stabilise la tempé-

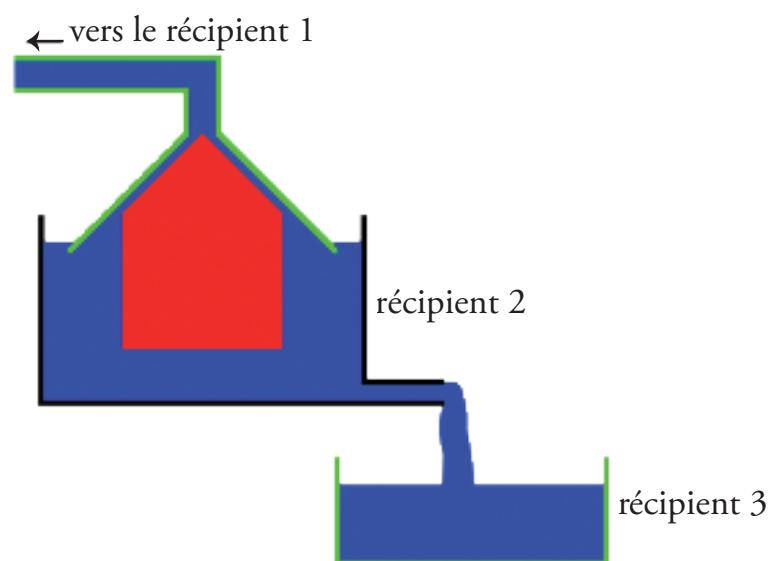


Figure 2. Grâce au flotteur rouge, le débit est maintenant constant.



Figure 3. Ce régulateur est installé sur la célèbre machine à vapeur « Lap » de la société Boulton & Watt. Elle date de 1788 et se trouve actuellement au Science Museum à Londres.

ature de la maison autour de la valeur de consigne imposée par l'utilisateur : le thermostat ajuste en temps réel la position de la vanne, qui détermine si l'eau du circuit des radiateurs entre dans la chaudière (vanne ouverte) ou repart dans le circuit sans être réchauffée (vanne fermée). Les suspensions actives des automobiles réalisent une stabilisation de l'habitacle par feedback. Les drones volants sont munis de feedbacks stabilisants qui les rendent plus faciles à piloter...

Même si James Watt a réussi à réguler sa machine à vapeur sans analyse mathématique, les deux exemples récents de régulateurs que nous allons maintenant découvrir reposent de façon cruciale sur des mathématiques : le premier stabilise des voies navigables, le second des états quantiques fragiles.

Des équations de Saint-Venant dans les écluses

Les canaux navigables sont constitués de biefs, c'est-à-dire d'une succession de petits canaux séparés d'une part par des vannes mobiles, qui permettent d'agir en temps réel sur le niveau de l'eau, et d'autre part par des écluses pour le passage des bateaux (voir figure 5). Sur ces canaux navigables, il est important de réguler le niveau de l'eau ainsi que son débit. Pourquoi ? Tout d'abord, il faut permettre aux transporteurs de conteneurs de calculer la charge maximale qu'ils peuvent embarquer sans risque

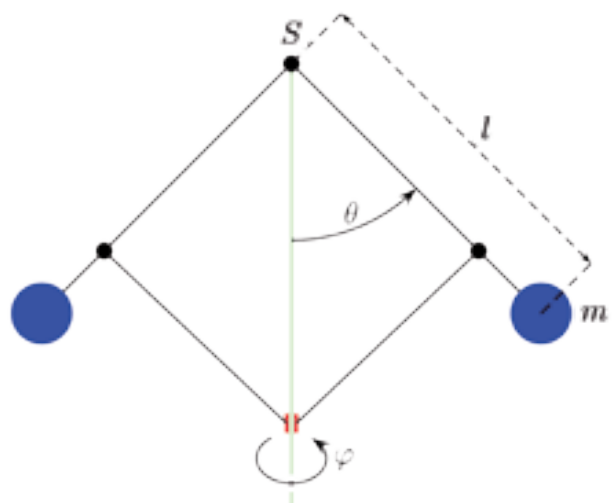


Figure 4. Schéma du régulateur de Watt.

de toucher le fond, ce qui impose de réguler le niveau de l'eau avec précision car les canaux sont souvent peu profonds. Ensuite, il faut garantir l'approvisionnement des centrales électriques et des industries consommatrices d'eau situées sur les berges, ce qui nécessite une régulation du débit.

La commande des vannes d'une écluse se fait de façon automatique. Le processus est géré par des algorithmes qui reposent sur un modèle de contrôle traduisant le comportement de l'eau dans les biefs.

La commande des vannes se fait aujourd'hui de façon automatique. Le processus est géré par des algorithmes qui reposent sur un modèle de contrôle traduisant le comportement de l'eau dans les biefs. Le modèle le plus utilisé est celui des équations de Saint

Venant. Son origine remonte au XIX^e siècle. Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint Venant fut élève de l'École polytechnique, puis enseigna les mathématiques à l'École nationale des ponts et chaussées. C'est en étudiant les rivières en crue et le mouvement des marées dans les estuaires qu'il publia son modèle en 1871. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles, traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le fluide.

Pour concevoir des lois de commande régissant le comportement des vannes, on utilise une quantité représentative du comportement global du bief: une *fonction de Lyapunov*, c'est-à-dire une fonction qui atteint son minimum lorsque le système est dans l'état d'équilibre souhaité. Cette méthode de stabilisation par l'utilisation de fonctions de Lyapunov est très courante en théorie du contrôle. Elle possède l'avantage



Figure 5. Vannes mobiles pour la régulation des canaux. A droite, la vanne a été sortie de l'eau pour une opération de maintenance.

de conduire à des comportements robustes vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations extérieures. De plus, ces lois de commande sont, dans notre exemple, faciles à mettre en œuvre concrètement.

Cette méthode d'analyse et de conception du contrôle des voies navigables a été utilisée notamment pour le réglage des vannes de la Sambre par l'administration des voies hydrauliques du ministère de l'Équipement et des Transports de la région wallonne en Belgique. On a pu constater des gains de performance significatifs : l'amplitude des variations de niveau est divisée par deux et les perturbations de débit sont amorties deux fois plus vite.

Stabiliser des états quantiques de la lumière grâce aux probabilités

L'expérience qui va suivre constitue la première réalisation expérimentale de feedback sur un système quantique. Il s'agit d'une étape significative vers l'ordinateur quantique, pour lequel la protection d'états quantiques par feedback serait alors une méthode efficace pour lutter contre les perturbations liées à l'environnement (la décohérence). L'objectif de cette expérience est de stabiliser certains états quantiques de la lumière. Ces états comportent un nombre entier et bien déterminé de photons. Ils sont fragiles et difficiles à observer, car très différents de ceux de la lumière qui nous entoure. L'objectif est de maintenir ce nombre de photons. Comme illustré de façon allégorique sur la figure 6, il faut sur-

monter une difficulté supplémentaire, car à l'échelle quantique, la mesure modifie le système.

Dans cette expérience, les photons sont confinés entre deux miroirs supraconducteurs qui se font face, formant ainsi une cavité ouverte sur les côtés, comme l'illustre la figure 7. La mesure repose sur des atomes qui traversent l'un après l'autre la cavité, interagissent avec les photons, et sont mesurés en sortie. Pour la commande, on dispose d'une source de lumière appropriée, utilisée entre le passage des atomes. (Une description bien plus détaillée de cette expérience se trouve notamment sur le site <http://www.lkb.ens.fr/Un-asservissement-quantique> où des animations basées sur des données expérimentales sont également présentées.)

Les principes de la mécanique quantique conduisent à une description probabiliste très précise du modèle reliant les signaux de commande et les signaux de mesure. Cette description mathématique, bien que relativement complexe, permet de déterminer un feedback stabilisant qui là encore repose sur une fonction de Lyapunov.

Bien que les modèles utilisés pour les canaux de navigation et les états quantiques de la lumière soient de natures très différentes, leurs contrôles s'appuient sur des méthodes mathématiques proches, dont l'origine remonte aux travaux fondamentaux d'Alexandre Lyapunov sur la stabilité.



Ainsi, bien que les modèles utilisés pour les canaux de navigation et les états quantiques de la lumière soient de natures très différentes, le premier étant déterministe en *temps continu* et le second aléatoire et en *temps discret*, leurs contrôles s'appuient sur des méthodes mathématiques proches dont l'origine remonte aux travaux fondamentaux d'Alexandre Lyapunov sur la stabilité.

Dans les problèmes de contrôle, le progrès ne vient donc pas uniquement d'inventions

purement techniques ou expérimentales. Il naît aussi des recherches abstraites de la théorie mathématique du contrôle. Les outils mathématiques qui y sont utilisés sont très variés (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, processus stochastiques...) et les recherches s'y font souvent à l'interface avec d'autres disciplines (mécanique des fluides, ingénierie hydraulique, mécanique quantique, optique quantique...).

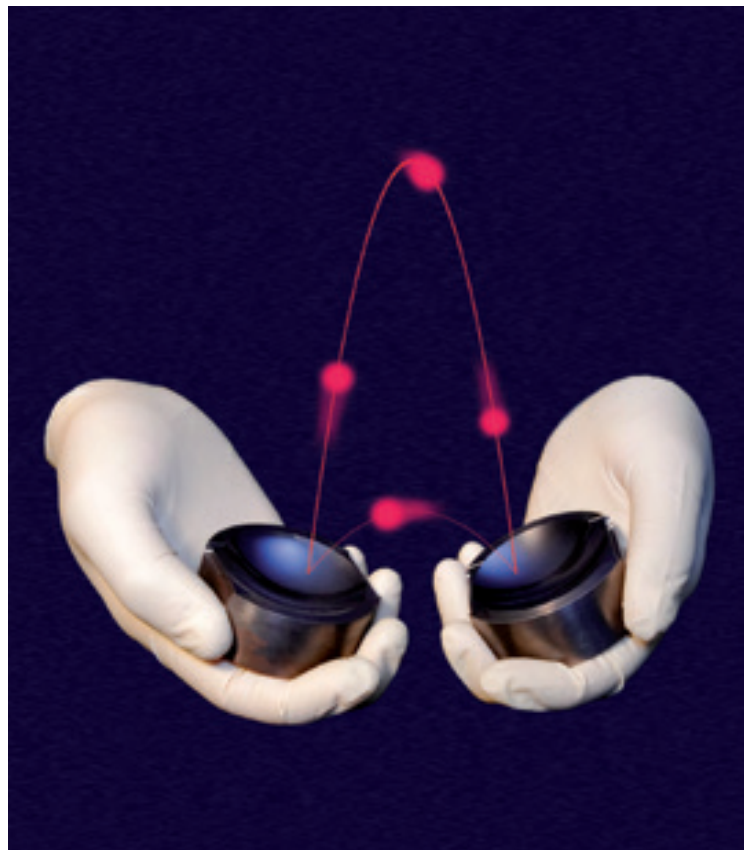


Figure 6: Les états quantiques à stabiliser sont des états avec un nombre entier et bien déterminé de photons. Ces derniers rebondissent entre les deux miroirs. La difficulté pour le feedback, ici représenté de façon allégorique par les deux mains du jongleur, vient du fait que l'observation de ces photons par le jongleur les perturbe nécessairement. Cette action en retour supplémentaire due à la mesure doit être prise en compte dès la conception d'un feedback stabilisant.

Remerciements

Les auteurs remercient Michel Brune pour les figures 6 et 7 illustrant le contrôle d'états quantiques.

Bibliographie

Coron J.-M., d'Andréa-Novel B., Bastin G., (mars 2008). *Penser globalement, agir localement*. La Recherche, n° 417, p. 82-83.

Mayr O., (1970). *The origins of feedback control*. The M.I.T. Press (Cambridge Massachusetts, and London, England), p. vii +151.

Sayrin C., Dotsenko I., Zhou X., Peaudecerf B., Rybarczyk T., Gleyzes S., Rouchon P., Mirrahimi M., Amini H., Brune M., Raimond J.-M., Haroche S., (septembre 2011). *Real time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states*. Nature, vol. 477, p. 73-77.

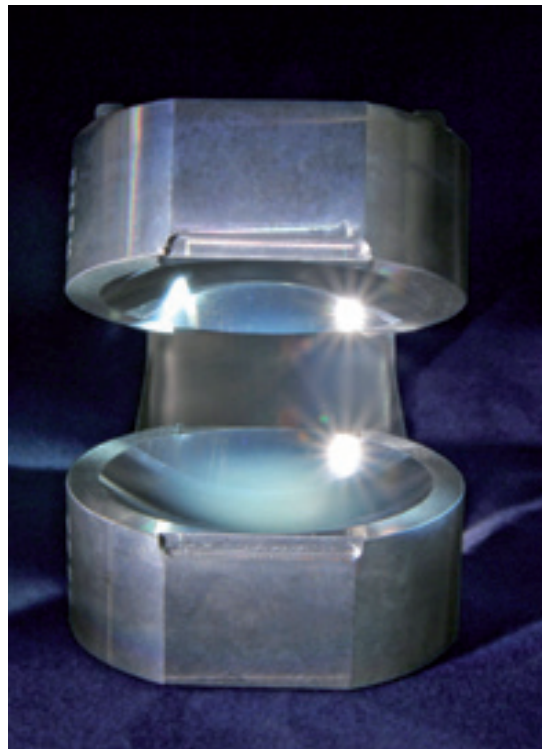


Figure 7. la lumière à contrôler est un champ électromagnétique d'une fréquence voisine de 10 GHz confiné entre les deux miroirs supraconducteurs qui se font face comme sur la figure. Ils forment ainsi une cavité ouverte sur les cotés. La mesure repose sur des atomes (non représentés sur la figure) qui traversent horizontalement la cavité à mi-chemin entre les deux miroirs. Ces atomes interagissent avec le champ électromagnétique et sont mesurés ensuite à leur sortie. Pour la commande, on dispose d'une source électromagnétique classique réglable (non représentée sur la figure) qui, après chaque atome, éclaire à la façon d'un flash la cavité.