La supraconductivité

Sylvia Serfaty, *professeur à l'Université Pierre et Marie Curie*

La supraconductivité, capacité d'un métal à laisser passer le courant électrique sans perte d'énergie, peut avoir des applications étonnantes. L'étude de ce phénomène fait intervenir divers domaines des mathématiques, comme le calcul des variations, les équations aux dérivées partielles, l'analyse asymptotique. Plusieurs questions ouvertes y sont associées.

La supraconductivité vient de fêter ses 100 ans. Plus exactement, c'est en 1911 que le physicien hollandais Heike Kamerlingh Onnes a découvert qu'une fois refroidi à une température très proche du zéro absolu, le mercure perdait complètement sa résistance électrique : autrement dit, on pouvait y voir circuler des courants électriques indéfiniment, sans dissipation d'énergie ni perte de chaleur.

Lévitation et tourbillons

La supraconductivité, qui concerne de nombreux métaux et alliages, entraîne d'autres phénomènes surprenants, notamment en réponse à un champ magnétique. Lorsqu'un supraconducteur, refroidi en-dessous de sa *température critique*, est soumis à un champ magnétique extérieur, il l'expulse littéralement. Ceci s'appelle l'*effet Meissner*.

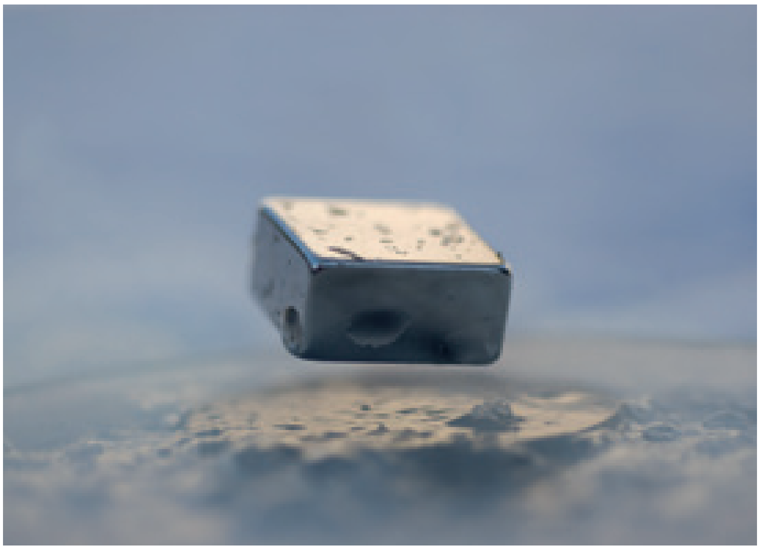

Figure 1. Supraconducteur en lévitation au dessus d'un aimant : l'effet Meissner. Copyright : J. Bobrov

L'une des conséquences les plus spectaculaires de cet effet est qu'un aimant posé sur un supraconducteur est soumis à une force magnétique qui le repousse : on voit l'aimant léviter au-dessus du supraconducteur !

Cependant, lorsque certains matériaux supraconducteurs sont soumis à un champ magnétique plus intense, la situation change : au-delà d'un certain seuil de champ, appelé *premier champ critique*, le champ magnétique commence à pénétrer un peu, et aux endroits où il pénètre, on voit se former des tourbillons de vorticité ou *vortex*, qui sont comme les tourbillons d'un mini-cyclone, le cœur étant dans l'état normal (non supraconducteur) entouré de phase supraconductrice, autour desquels tournent des boucles de *courant supraconducteur*. Plus le champ appliqué est élevé, et plus on voit de vortex. Une fois devenus nombreux, ceux-ci s'organisent en réseaux hexagonaux parfaits, comme en nid d'abeille (cf. photo). Mais au-delà d'une certaine intensité, appelée le *second champ critique*, les vortex sont tellement serrés les uns contre les autres qu'il n'y a plus de place pour la phase supraconductrice, et le matériau retrouve l'état normal.

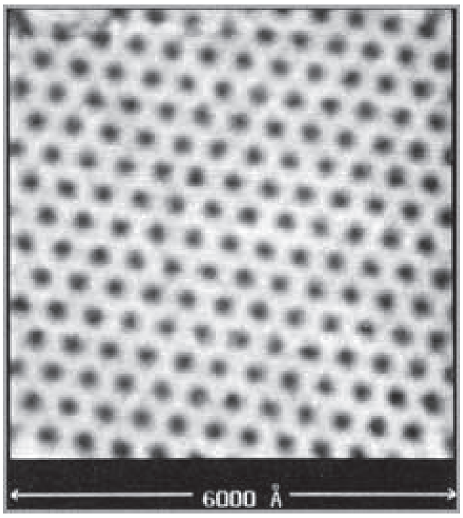

Figure 2. Vortex organisés en réseau d'Abrikosov, d'après H. F. Hess et al., Bell Labs, Phys. Rev. Lett. 62, 214 (1989).

Un aimant posé sur un supraconducteur est soumis à une force magnétique qui le repousse : on voit l'aimant léviter au-dessus du supraconducteur !

Un potentiel énorme en termes d'applications

Les applications de la supraconductivité sont potentiellement énormes. En effet, ce phénomène permet en principe de transporter des courants très forts sans perte d'énergie. Déjà, les systèmes de trains à sustentation magnétique, comme le japonais Maglev, reposent sur la supraconductivité. Ces trains sont équipés de bobines supraconductrices leur permettant de glisser sans frottement en lévitation au-dessus de rails aimantés. Les supraconducteurs sont également utilisés pour engendrer de très forts champs magnétiques, en y faisant circuler des courants de forte intensité, comme par exemple dans le nouvel accélérateur de particules LHC de Genève. Ils servent aussi à détecter de très faibles champs magnétiques, ce qui est utilisé entre autres dans les sous-marins, en imagerie médicale, pour la détection d'objets cachés et dans les nano-circuits. Pour l'instant, la principale limitation est que les supraconducteurs doivent être équipés de systèmes de refroidissement pour descendre à très basse température, ce qui est coûteux et contraignant. Les physiciens, en partenariat avec les chimistes, continuent donc d'explorer la possibilité de fabriquer des composés chimiques qui soient supraconducteurs à des températures plus élevées.

Un peu de physique quantique

Que se passe-t-il dans un matériau qui fait qu'il devient supraconducteur à basse température ? Seule la physique quantique peut nous l'expliquer. Dans un métal normal, les électrons se comportent comme des ondes étalées sur chaque atome, indépendantes les unes des autres. Quand le métal devient supraconducteur, à basse température, les électrons s'associent par paires, appelées *paires de Cooper*. Grossièrement, toutes les paires d'électrons se mettent alors dans le même état quantique pour former comme une seule onde, un peu comme des poissons dans un banc. Ce comportement collectif des électrons leur permet de traverser le matériau sans être sensibles aux obstacles et ainsi la résistance électrique disparaît. La *condensation* dans un seul état quantique est d'ailleurs exactement ce qui se produit aussi pour les atomes dans les *superfluides* (tel l'hélium liquide à basse température) ou les condensats de Bose-Einstein, prédits par Einstein et récemment mis en évidence expérimentalement. Les superfluides et les condensats sont deux types de liquides qui perdent toute viscosité à très basse température, d'où leur nom de *liquides superfluides*. Et lorsqu'on met un liquide superfluide en rotation rapide, on y observe, comme dans les supraconducteurs, des tourbillons de vorticité.

Dans les années 30, le physicien London a fourni le premier modèle descriptif de la supraconductivité, mais ce n'est que dans les années 50 qu'est née la théorie de Ginzburg et Landau, la plus universellement admise de nos jours, qui décrit l'apparition de la supraconductivité et le comportement des supraconducteurs en présence de champ magnétique. Cette théorie décrit un supraconducteur par deux « fonctions » indiquant son état local : une *fonction d'onde* ψ, et un champ magnétique A, chacun dépendant du point dans l'échantillon où l'on se place.

A ces deux fonctions on associe alors, par une formule explicite, un nombre unique, dépendant de l'intensité du champ appliqué, et qui donne ce qui s'appelle *l'énergie de Ginzburg-Landau*. Les états stables du système, ceux que l'on observe lorsqu'il est au repos, sont ceux pour lesquels l'énergie de Ginzburg-Landau est la plus basse. En 1956, la théorie BCS de Bardeen, Cooper et Schrieffer est venue compléter la théorie de Ginzburg et Landau, en expliquant la supraconductivité à partir du niveau quantique, par la formation des paires de Cooper.

Que viennent faire les mathématiques dans tout cela ?

L'énergie de Ginzburg-Landau, qui est une fonction de l'état du système, constitue une sorte de fonction mathématique. En outre, de manière pas si surprenante, c'est quasiment la même fonction mathématique que celle qui décrit l'énergie d'un superfluide ou d'un condensat de Bose-Einstein en rotation. On peut donc faire semblant d'oublier le modèle physique dont cette énergie provient et, la regardant avec un œil de mathématicien, l'étudier comme fonction mathématique, à l'aide de démonstrations, obtenant ainsi du même coup des résultats sur ces trois problèmes physiques. On se demande alors : quelle est la valeur du minimum de cette fonction ? À quoi ressemblent les états qui atteignent ce minimum ? Comment varient-ils en fonction de la valeur du champ appliqué ? Peut-on prédire l'apparition des vortex (caractérisés comme les points où la fonction ψ vaut 0) et leur emplacement ?

Il se trouve que le même genre de questions se pose pour toutes sortes d'énergies qui proviennent de la physique, et même de l'ingénierie, de l'économie… où l'on cherche à minimiser un certain coût (ou, dans le cas de l'économie, à maximiser un gain ou une *fonction d'utilité*) et où l'on veut comprendre quels sont les états ou configurations optimaux. Mathématiquement, cela relève de la théorie du *calcul des variations*, qui remonte à Bernoulli, Euler et Lagrange, et qui nous dit quand on peut garantir l'existence d'un optimum, et comment le caractériser. Le plus souvent, celui-ci est caractérisé par une *équation aux dérivées partielles*, qui n'est autre qu'une relation exacte entre la fonction d'état (qui dépend du lieu dans l'échantillon) et ses dérivées. Or, les mathématiciens ont également développé depuis un siècle une gigantesque théorie et classification de ces équations aux dérivées partielles. Même si de nombreuses et difficiles questions subsistent, on sait assez bien dire lesquelles ont des solutions, comment celles-ci se comportent qualitativement dans l'espace et dans le temps, etc.

Les mathématiciens savent dire, par exemple, comment les vortex vont se déplacer sous l'effet d'un courant appliqué, question importante puisque les mouvements des vortex entraînent de la déperdition d'énergie.

Mais revenons à cette fameuse énergie de Ginzburg-Landau : comment savoir si cette énergie, proposée à l'origine sans démonstration, est un bon modèle pour décrire la supraconductivité ? Précisément, en regardant si, mathématiquement, elle prédit le même comportement que celui qui est observé dans les expériences. Ce problème se pose d'ailleurs pour tout modèle physique : l'étude mathématique permet d'abord de valider le modèle, puis au-delà, de prédire le comportement du système physique avec plus de détails, et dans des situations qui ne sont par exemple pas accessibles à l'expérience ! Ainsi, le physicien Abrikosov, peu après l'introduction du modèle de Ginzburg et Landau, a fait des calculs, quelque peu formels, qui l'ont amené à dire que le modèle devrait avoir des solutions avec des vortex disposés périodiquement, et ainsi à prédire que l'on devrait les voir dans les expériences. Les physiciens ont ensuite essayé d'observer de telles situations et ils ont effectivement découvert les arrangements de vortex en réseau hexagonal tels que sur la photo de la page 38. Ceux-ci ont été baptisés *réseaux d'Abrikosov*.

Par rapport à la physique et au calcul formel, les mathématiques apportent toute la rigueur et la précision de leur méthode hypothético-déductive. De ce point de vue, le modèle de Ginzburg-Landau est déjà très largement validé mathématiquement. On sait en effet démontrer pour quelles valeurs (dites critiques) du champ magnétique appliqué les vortex apparaissent dans les minimiseurs de l'énergie, combien il y en a, et comment ils se disposent en moyenne. On retrouve et précise ainsi le comportement observé ou calculé par les physiciens. Les mathématiciens savent aussi dire, par exemple, comment les vortex vont se déplacer sous l'effet d'un courant appliqué, question importante puisque les mouvements des vortex entraînent de la déperdition d'énergie.

Analyse asymptotique

L'analyse mathématique de la supraconductivité fait donc intervenir le calcul des variations, la théorie des équations aux dérivées partielles, la *théorie spectrale*, mais aussi de manière importante, un autre ingrédient qui s'appelle l'*analyse asymptotique*. Dans les supraconducteurs, le comportement des vortex dépend d'une constante K, appelée le paramètre de Ginzburg-Landau, qui est propre à chaque matériau et qui apparaît naturellement dans le calcul de l'énergie de Ginzburg-Landau. En fait, ce n'est que dans les matériaux pour lesquels cette constante est assez grande que les vortex apparaissent. L'idée de l'analyse asymptotique est alors de « forcer le trait » : si l'on s'intéresse aux matériaux pour lesquels les vortex apparaissent – donc pour lesquels cette constante est grande – pourquoi ne pas regarder ce qui se passe mathématiquement lorsqu'on la rend *infiniment grande* ? Cette idée s'avère en fait très fructueuse dans toute l'analyse d'équations ou d'énergies provenant de modèles physiques. La philosophie, qui est très générale, est donc d'arriver à réduire un problème de minimisation compliqué (sur un espace de dimension infinie) à un problème plus simple, en dimension plus petite (c'est-à-dire avec moins de paramètres possibles à examiner). La difficulté est d'arriver à justifier rigoureusement cette simplification (en quelque sorte, à montrer qu'elle est « légale ») et à donner la formule explicite de l'énergie réduite.

La meilleure disposition possible

Ce n'est que très récemment que nous sommes parvenus à expliciter, à partir de Ginzburg-Landau, la formule de l'énergie simplifiée, qui régit la distribution et la répartition des vortex. Cette énergie n'est pas inconnue des physiciens ni des mathématiciens : elle correspond à une interaction de type électrostatique entre les vortex. Ceux-ci se comportent donc comme des charges électriques ponctuelles qui se repoussent entre elles, mais sont en même temps confinées par une force extérieure (la force du champ magnétique appliqué). C'est la compétition entre ces deux effets qui dicte la répartition. Par analogie, imaginez des personnes nombreuses qui se détestent mais qui sont forcées de rester toutes ensemble dans la même pièce : quelle est la meilleure manière que toutes ont de se positionner pour être le plus loin possible les unes des autres ?

Ce dernier problème ne se limite pas à la supraconductivité, c'est en fait un type de question courant dans la nature. Pourquoi les atomes dans un cristal se disposent-ils exactement selon un réseau cristallin (en général cubique), c'est-à-dire de manière périodique ? De nouveau, c'est la somme de toutes les interactions électrostatiques entre les atomes, et entre les atomes et les électrons, qui doit dicter la disposition. On peut mesurer le coût de chaque répartition via une énergie, dont on pense que le minimum est justement atteint par un tel arrangement en réseau. Hélas, on ne sait pas démontrer que ces structures cristallines sont bien celles qui minimisent cette énergie, même si on les observe clairement dans la nature… Le seul cas où l'on sache démontrer quelque chose d'analogue est celui où l'on cherche la meilleure distribution de boules rigides toutes identiques dans un plan, telles des boules de billard, lorsqu'on veut en mettre le maximum possible par unité de volume. Dans ce cas, il a été démontré assez récemment que la meilleure configuration est celle en réseau hexagonal (en dimension 3, le résultat analogue donne la meilleure manière d'empiler des oranges sur l'étal d'un marchand !)

Ces questions de périodicité sont donc générales, fondamentales dans la nature, et constituent un réel défi mathématique. Dans le cas de la répulsion électrostatique qui gouverne l'interaction entre les vortex dans Ginzburg-Landau, on pense que le meilleur arrangement est de nouveau le réseau hexagonal, toujours le fameux réseau d'Abrikosov ! Mais, pour le moment, on ne sait pas le démontrer rigoureusement. Le modèle de Ginzburg-Landau n'a donc pas encore livré tous ses secrets…

La meilleure distribution de boules rigides identiques dans un plan, telles des boules de billard, est celle en réseau hexagonal (en dimension 3, le résultat analogue donne la meilleure manière d'empiler des oranges sur l'étal d'un marchand !)