Claire Anantharaman-Delaroche

Classification des C*-algèbres purement infinies nucléaires

Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, exp. n° 805, p. 7-27.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__7_0>

Séminaire BOURBAKI
48ème année, 1995-96, n° 805

Novembre 1995

CLASSIFICATION DES C*-ALGÈBRES PUREMENT INFINIES NUCLÉAIRES

[d'après E. KIRCHBERG]

par Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE

INTRODUCTION

Depuis une vingtaine d'années, l'utilisation en théorie des C*-algèbres de méthodes issues de la topologie algébrique a remporté de nombreux succès. Ils ont conduit G. Elliott à lancer, au début des années 90, le programme ambitieux suivant : classifier les C*-algèbres nucléaires séparables, à isomorphisme près, à l'aide d'invariants ayant la K-théorie comme principal ingrédient.

La réalisation de ce programme progresse de façon remarquable grâce aux efforts de nombreux chercheurs, notamment G. Elliott, E. Kirchberg et M. Rørdam (voir [23] pour un aperçu des nombreux résultats obtenus et pour une bibliographie complète jusqu'en 1994).

Nous nous limitons ici à la présentation des résultats récents de E. Kirchberg [32] qui règlent le cas des C*-algèbres simples, purement infinies, nucléaires : à une nuance près, le couple formé par leurs groupes (abéliens dénombrables) de K-théorie est un invariant complet pour la classification de ces algèbres. On sait par ailleurs, grâce au travail de Rørdam [38], que tous les couples de groupes abéliens dénombrables apparaissent comme invariants.

Plus précisément, Kirchberg montre que deux C*-algèbres simples, purement infinies, séparables, nucléaires, sont KK-équivalentes (voir §8) si et seulement si elles sont isomorphes après tensorisation par la C*-algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts. Parmi les conséquences immédiates de ce résultat, mentionnons les deux suivantes :

— une C*-algèbre A, simple, séparable, nucléaire, est purement infinie si et seulement si elle est isomorphe à $A\otimes\mathcal{O}_\infty$, où $\mathcal{O}_\infty$ désigne la C*-algèbre universelle engendrée par une infinité dénombrable d'isométries s_i telles que $s_i^*s_j = 0$ si $i \neq j$;

— deux C*-algèbres A et B simples, séparables, nucléaires, sont KK-équivalentes si et seulement si $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ et $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ sont isomorphes.

On voit en particulier que cette étude dépasse le cadre des C*-algèbres purement infinies.

Notons que la KK-équivalence entraîne l'isomorphisme des groupes de K-théorie et que pour une classe très vaste de C*-algèbres la réciproque est vraie. Savoir si c'est toujours le cas pour les C*-algèbres nucléaires est un problème important et non résolu.

Les outils fondamentaux de l'approche de Kirchberg sont les suivants :

— les résultats de J. Cuntz [15] donnant une description très simple de la K-théorie des C*-algèbres purement infinies;

— des résultats d'absorption d'homomorphismes dits "triviaux", dans l'esprit des travaux de D. Voiculescu [44] et G.G. Kasparov [26] sur les extensions de C*-algèbres, faisant suite à ceux de Brown, Douglas et Fillmore [8];

— sa caractérisation remarquable des C*-algèbres exactes — une classe de C*-algèbres plus générale que les nucléaires, très intéressante en elle-même — , aboutissement de toute une série de travaux sur cette notion qu'il avait définie vers 1977 [31] (à la même époque S. Wassermann avait également introduit une propriété voisine de l'exactitude [45]);

— des techniques de KK-théorie développées par Kasparov [27].

Signalons que N. C. Phillips a aussi obtenu de son côté [36] le résultat de classification 8.1 de ce texte, en s'appuyant sur les cas particuliers 8.2 et 8.3 de Kirchberg.

Avant d'aborder le travail de Kirchberg, nous consacrons les quatre premiers paragraphes aux définitions des termes "nucléaire", "exact", "purement infini", ainsi qu'à des exemples, et nous donnons les éléments de K-théorie nécessaires à l'exposé. *Nous ne considérons ici que des C*-algèbres ayant une unité approchée dénombrable* (et l'hypothèse plus forte de séparabilité sera souvent nécessaire). Nous notons $\mathcal{B}$ la C*-algèbre des opérateurs bornés sur l'espace hilbertien de dimension infinie dénombrable, et $\mathcal{K}$ la C*-algèbre des opérateurs compacts. Enfin $M_n(\mathbb{C})$ désigne la C*-algèbre des matrices $n \times n$ complexes.

Je remercie Joachim Cuntz, Eberhard Kirchberg et Georges Skandalis pour leurs commentaires durant la préparation de ce texte.

1. NUCLÉARITÉ ET EXACTITUDE

Une norme sur le produit tensoriel algébrique $A \odot B$ de deux C*-algèbres A et B telle que le complété soit lui aussi une C*-algèbre est appelée une *C^*-norme*. Takesaki a montré [40] l'existence d'une plus petite C^*-norme, la C^*-norme spatiale, obtenue en représentant fidèlement A et B dans des espaces de Hilbert et $A \odot B$ dans leur produit tensoriel hilbertien. Le complété sera noté $A \otimes B$.

En général, il peut exister plus d'une C^*-norme sur $A \odot B$ [40]. En cas d'unicité quelle que soit B, on dit que A est *nucléaire.* Des exemples importants sont fournis par les C*-algèbres associées aux groupes localement compacts. Soit Γ un groupe discret (nous nous bornons ici à ce cas). La C*-algèbre *réduite* $C_r^*(\Gamma)$ est la fermeture normique de l'algèbre $\ell^1(\Gamma)$ agissant par convolution sur $\ell^2(\Gamma)$, et la C*-algèbre *pleine* $C^*(\Gamma)$ est la C*-algèbre universelle associée à l'algèbre de Banach involutive $\ell^1(\Gamma)$. On montre [34] que $C_r^*(\Gamma)$ (ou $C^*(\Gamma)$) est nucléaire si et seulement si le groupe Γ est moyennable.

La classe des C*-algèbres nucléaires est stable par de nombreuses opérations, mais à partir d'un exemple de M.-D. Choi [9], on voit que la C*-algèbre non nucléaire $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ associée au groupe libre $\mathbb{F}_2$ à deux générateurs se plonge dans la C*-algèbre nucléaire $\mathcal{O}_2$ qui sera introduite au §2.

Il était donc intéressant de caractériser les sous-C*-algèbres des nucléaires. Kirchberg montre (nous le verrons au §6) que ce sont les C*-algèbres exactes. Nous les présentons succinctement et nous renvoyons au livre de S. Wassermann [46] pour une excellente exposition des résultats connus sur ce sujet avant 1993.

Etant donnés des C*-algèbres A et B et un idéal I de B, l'algèbre $A \odot (B/I)$ est isomorphe à $(A \odot B)/(A \odot I)$ qui s'injecte dans $(A \otimes B)/(A \otimes I)$, d'où une C^*-norme sur $A \odot (B/I)$. Par conséquent, si A est nucléaire, la suite

$$0 \longrightarrow A \otimes I \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes (B/I) \longrightarrow O$$

est exacte. Sans hypothèse de nucléarité il n'en est pas toujours ainsi, et A est dite *exacte* si toute suite exacte $0 \to I \to B \to B/I \to 0$ le reste après tensorisation par A (en considérant la C^*-norme spatiale). Toute sous-C*-algèbre d'une C*-algèbre exacte est bien sûr exacte, mais c'est beaucoup plus difficile de voir que cette propriété passe au quotient [30].

L'exactitude des C*-algèbres associées aux groupes discrets pose des questions très intéressantes dont les réponses sont encore partielles. Pour un groupe discret Γ possédant une famille séparatrice de représentations de dimension finie, on sait [29] que $C^*(\Gamma)$ est exacte si et seulement si Γ est moyennable. Le cas général reste ouvert. D'après une remarque de A. Connes, pour tout sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie connexe, $C_r^*(\Gamma)$ se plonge dans une C*-algèbre nucléaire. S. Adams a montré [1] qu'il en est de même si Γ est un groupe hyperbolique au sens de Gromov. Il est conjecturé que la C*-algèbre réduite de tout groupe discret est exacte.

2. C^*-ALGÈBRES PUREMENT INFINIES

On classe les C*-algèbres en divers types suivant les propriétés de leurs projecteurs (i.e. idempotents auto-adjoints). On dit que deux projecteurs p et q d'une C*-algèbre A

sont *équivalents* s'il existe $x \in A$ avec $x^*x = p$ et $xx^* = q$. La classe de p sera notée $[p]$. Un projecteur p est dit *infini* s'il est équivalent à un projecteur strictement plus petit. Sinon p est fini. On dit qu'une C*-algèbre simple A est *purement infinie* si pour tout x non nul dans A, la C*-algèbre $\overline{x^*Ax}$ contient un projecteur infini. Cela signifie que A a "beaucoup" de projecteurs, et qu'ils sont tous (sauf 0) infinis.

Cette notion de C*-algèbre purement infinie admet d'autres caractérisations utiles. Par exemple, on voit facilement qu'une C*-algèbre simple unifère A, distincte de $\mathbb{C}$, est purement infinie si et seulement si pour tout a non nul dans A, il existe x, y dans A avec $xay = 1$. Signalons aussi que plusieurs questions importantes ne sont toujours pas éclaircies, dont celle concernant la caractérisation des C*-algèbres purement infinies en terme de traces. Supposons toujours A simple avec unité. Une trace f sur A est une forme linéaire positive (c'est-à-dire telle que $f(x^*x) \geq 0$ si $x \in A$) vérifiant $f(xy) = f(yx)$ pour tous x, y dans A. Si A est purement infinie, elle n'a évidemment pas de trace non nulle. Réciproquement, si A n'a pas de trace non nulle, et si de plus A est exacte, on voit que $A \otimes \mathcal{K}$ possède un projecteur infini en combinant des travaux difficiles de Cuntz [14], de Blackadar et Handelman [6], et de Haagerup [25]. Mais on ne sait pas si cela entraîne que $A \otimes \mathcal{K}$ (et donc A) est purement infinie. On ne sait même pas si une C*-algèbre simple peut posséder à la fois des projecteurs finis ($\neq 0$) et des projecteurs infinis.

Bien entendu, la C*-algèbre quotient $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ est simple et purement infinie, mais elle n'est pas séparable. C'est seulement en 1977 qu'ont été découverts, par J. Cuntz [13], les premiers exemples concrets de C*-algèbre simples purement infinies séparables, les C*-algèbres (dites de Cuntz) $\mathcal{O}_n$.

Pour n entier ≥ 2, on note $\mathcal{O}_n$ la C*-algèbre universelle engendrée par n éléments $s_1, \ldots, s_n$ tels que $s_i^* s_i = 1$ pour tout i, $s_i s_i^* \perp s_j s_j^*$ si $i \neq j$, et $\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1$. J. Cuntz a démontré que ces algèbres sont simples, purement infinies, nucléaires. Ceci reste vrai pour la C*-algèbre universelle $\mathcal{O}_\infty$ engendrée par une infinité dénombrable d'isométries s_i vérifiant $s_i s_i^* \perp s_j s_j^*$ si $i \neq j$.

Le rôle des algèbres de Cuntz est crucial dans la classification, spécialement celui de $\mathcal{O}_\infty$ qui est équivalente en KK-théorie à la C*-algèbre $\mathbb{C}$ (voir §8), et celui de $\mathcal{O}_2$ à cause du résultat de contractibilité suivant.

LEMME 2.1 (Cuntz).- *L'endomorphisme $\alpha : x \mapsto s_1 x s_1^* + s_2 x s_2^*$ de $\mathcal{O}_2$ (c'est-à-dire "deux fois l'identité" de $\mathcal{O}_2$) est homotope à l'identité de $\mathcal{O}_2$.*

En effet, l'unitaire $u = s_1\alpha(s_1^*) + s_2\alpha(s_2^*)$ appartient à la sous-C*-algèbre de $\mathcal{O}_2$ engendrée par les $s_i s_j s_i^* s_j^*$ $(1 \leq i, j \leq 2)$, qui est isomorphe à $M_4(\mathbb{C})$. Il existe donc une application continue $t \mapsto u_t$ de $[0,1]$ dans le groupe unitaire de $\mathcal{O}_2$ avec $u_0 = 1_{\mathcal{O}_2}$ (unité de $\mathcal{O}_2$) et $u_1 = u$. L'égalité $\alpha_t(s_i) = u_t^* s_i$ $(i = 1, 2)$ définit un endomorphisme de $\mathcal{O}_2$ et $t \mapsto \alpha_t$ est un chemin continu d'endomorphismes de $\mathcal{O}_2$ reliant l'identité à α. ∎

Notons que les C*-algèbres nucléaires, simples, purement infinies, apparaissent maintenant dans de nombreux contextes. Par exemple, soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0,1\}$, irréductible (c'est-à-dire telle que pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $A^k(i,j) \neq 0$), et distincte d'une matrice de permutation. Notons $\mathcal{O}_A$ la C*-algèbre universelle engendrée par des isométries partielles $s_1,\dots,s_n$ avec les relations

$$s_i s_i^* \perp s_j s_j^* \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad s_i^* s_i = \sum_{j=1}^{n} A(i,j) s_j s_j^* \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,n.$$

J. Cuntz et W. Krieger ont montré [17] que $\mathcal{O}_A$ est une C*-algèbre nucléaire, simple, purement infinie , étroitement liée à la dynamique de la chaîne de Markov topologique définie par la matrice A . L'algèbre $\mathcal{O}_n$ correspond au cas où tous les coefficients de A sont égaux à 1.

Voici une autre construction d'exemples intéressants. Considérons un réseau Γ d'un groupe de Lie semi-simple G sans facteurs compacts et de centre trivial. Notons α l'action naturelle de Γ sur la frontière de Furstenberg G/P de G, où P est un sous-groupe parabolique minimal de G. Rappelons que le *produit croisé* $B \rtimes_\alpha \Gamma$ de la C*-algèbre B des fonctions continues sur G/P par l'action α de Γ est la C*-algèbre universelle engendrée par B et une représentation unitaire $\gamma \mapsto u_\gamma$ de Γ, vérifiant les relations $u_\gamma f u_\gamma^* = f \circ \alpha_{\gamma^{-1}}$ pour $f \in B$ et $\gamma \in \Gamma$. Cette C*-algèbre $B \rtimes_\alpha \Gamma$ est nucléaire, simple, purement infinie. Des exemples analogues sont aussi obtenus en faisant agir les groupes hyperboliques non élémentaires de Gromov sur le bord de leurs graphes de Cayley (voir [2] et [33]).

3. LES GROUPES DE K-THÉORIE

Rappelons brièvement quelques éléments de la K-théorie des C*-algèbres. Le groupe $K_0(A)$ est celui de la K-théorie algébrique complexe. Nous le définissons ici à l'aide des projecteurs de $A \otimes \mathcal{K}$. L'ensemble $\mathcal{K}_0(A)$ des classes d'équivalence de ces projecteurs a une structure naturelle de semi-groupe abélien (on additionne les projecteurs en les plaçant en position orthogonale). Si A est unifère, $K_0(A)$ est le groupe des différences formelles des éléments de $\mathcal{K}_0(A)$. Sinon, $K_0(A)$ est le noyau de l'homomorphisme naturel de $K_0(\tilde{A})$ dans $K_0(\mathbb{C})$, où $\tilde{A}$ désigne la C*-algèbre déduite de A par adjonction d'une unité. L'image de $[p] \in \mathcal{K}_0(A)$ dans $K_0(A)$ sera notée $[p]_0$, et $K_0(A)_+$ désignera l'image de $\mathcal{K}_0(A)$.

Pour $n \geq 0$, on pose $K_n(A) = K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n))$. Le théorème de périodicité de Bott qui établit l'existence d'un isomorphisme naturel de $K_0(A)$ sur $K_2(A)$ est fondamental dans la théorie. Le groupe $K_1(A)$ (différent de celui de la K-théorie algébrique) peut se décrire comme le groupe des composantes connexes du groupe unitaire de $(A \otimes \mathcal{K})^{\tilde{}}$.

On voit donc que deux C*-algèbres A et B *stablement isomorphes* — i.e. telles que

$A \otimes \mathcal{K}$ et $B \otimes \mathcal{K}$ soient isomorphes — possèdent les mêmes groupes de K-théorie. Pour affiner les invariants il faut bien sûr se donner en plus, dans le cas où A possède une unité 1_A , l'élément $[1_A]_0$ de $K_0(A)_+$.

La classification des C*-algèbres nucléaires par la K-théorie a connu son premier résultat significatif en 1976. Il concerne les C*-algèbres dites AF (Approximativement de dimension Finie). Ce sont celles qui s'obtiennent comme limite inductive d'une suite de C*-algèbres de dimension finie. Pour une telle algèbre A, le groupe $K_1(A)$ est nul, et $(K_0(A), K_0(A)_+)$ est un groupe ordonné — ce qui n'est pas le cas en général —. G. Elliott a montré [20] que deux C*-algèbres AF unifères A et B sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme de groupe ordonné de $K_0(A)$ sur $K_0(B)$ envoyant $[1_A]_0$ sur $[1_B]_0$. En outre les groupes ordonnés apparaissant dans cette classification sont caractérisés par des axiomes simples [19].

Dans son programme général de classification des C*-algèbres nucléaires, G. Elliott fait figurer d'autres invariants naturels comme le cône convexe topologique des traces positives sur A (voir [23]). Dans le cas considéré ici d'une C*-algèbre simple purement infinie, la liste des invariants d'Elliott se formule plus aisément. Une telle algèbre A ne possède pas de trace non triviale. En outre les groupes $K_0(A)$ et $K_1(A)$ admettent une description très simple [15]. On voit facilement que tout élément de $K_0(A)$ est représenté par un projecteur non nul de A, d'où $K_0(A)_+ = K_0(A)$. De plus deux tels projecteurs sont équivalents si et seulement si ils ont même image dans $K_0(A)$. Dans le cas unifère, $K_1(A)$ est canoniquement isomorphe au groupe des composantes connexes du groupe unitaire de A (sans stabilisation). J. Cuntz a aussi montré que les groupes unitaires des algèbres $\mathcal{O}_n$ sont connexes, que $K_0(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{Z}$, et que $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ (n fini). En particulier, tous les projecteurs non nuls de $\mathcal{O}_2$ sont équivalents.

4. LE BIFONCTEUR $Ext(A, B)$ DE KASPAROV

Dans la stratégie de Kirchberg, l'invariance par homotopie du bifoncteur de Kasparov [27] est cruciale. Ce bifoncteur admet des réalisations variées qui, ajoutées à la richesse de ses propriétés fonctorielles, lui confèrent une grande souplesse. Nous renvoyons à [4] et à [24] pour des informations détaillées sur le sujet, et à [42] pour un exposé très accessible.

Nous privilégierons ici la description du bifoncteur comme groupe d'extensions de C*-algèbres. Si A et B sont deux C*-algèbres, rappelons qu'une *extension* de A par B est une suite exacte de C*-algèbres $0 \to B \to E \to A \to 0$.

Il est intéressant de remonter au problème initial de la théorie d'un seul opérateur qui est l'une des origines de l'apparition des techniques de topologie algébrique en théorie des C*-algèbres. Pour un opérateur $T \in \mathcal{B}$, le spectre de son image dans $\mathcal{B}/\mathcal{K}$

est appelé le *spectre essentiel* de T et noté $\sigma_e(T)$. Par des travaux de H. Weyl [47] et J. von Neumann [35], on sait depuis longtemps que deux opérateurs auto-adjoints dans un espace hilbertien sont unitairement équivalents modulo les opérateurs compacts si et seulement si leurs spectres essentiels sont égaux. Ce résultat fut étendu par la suite au cas des opérateurs normaux. L'exemple du "shift" unilatéral montre que $\sigma_e(T)$ n'est plus un invariant complet pour la classification des opérateurs T tels que $TT^* - T^*T \in \mathcal{K}$ (dits essentiellement normaux).

Au début des années 70, Brown, Douglas et Fillmore résolurent le problème de la classification de ces opérateurs en le remplaçant par l'étude des extensions d'une C*-algèbre commutative par $\mathcal{K}$. A tout opérateur T essentiellement normal de spectre essentiel X, on associe l'extension $0 \to \mathcal{K} \to E \to C(X) \to 0$, où E désigne la sous-C*-algèbre de $\mathcal{B}$ engendrée par T, $\mathcal{K}$ et $1_{\mathcal{B}}$, et on identifie deux extensions associées à des opérateurs unitairement équivalents modulo les compacts. L'ensemble $Ext(X)$ de ces classes d'extensions a une structure naturelle de groupe abélien ([7], [8]), dont l'élément neutre représente les perturbations compactes des opérateurs normaux de spectre essentiel X.

Dépassant ce cadre, on s'aperçoit que $Ext(X)$ a un sens pour tout espace compact, d'où un foncteur covariant, qui à tout espace compact métrisable X associe le groupe abélien $Ext(X)$. L'identification de ce foncteur comme théorie homologique associée à la K-théorie [8] a été décisive pour l'interaction des algèbres d'opérateurs avec la K-théorie.

Par la suite, on s'est évidemment intéressé ([44], [3]) au cas des extensions d'une C*-algèbre A par $\mathcal{K}$. Enfin, l'étude des extensions du type

$$0 \to B \otimes \mathcal{K} \to E \to A \to 0$$

est intervenue dans le développement de la K-théorie de Kasparov [27] (la présence de $\mathcal{K}$ est indispensable pour l'addition des extensions).

L'introduction du bifoncteur Ext de Kasparov nécessite quelques définitions préliminaires. Un idéal B d'une C*-algèbre E est dit *essentiel* si on a $B \cap J \neq 0$ pour tout idéal J non nul de B. Il existe une plus grande C*-algèbre, appelée algèbre des *multiplicateurs* de B et notée $M(B)$, contenant B comme idéal essentiel. Pour B unifère, on a bien entendu $M(B) = B$. Pour X localement compact, notons $C_0(X, B)$ la C*-algèbre des fonctions normiquement continues de X dans B, tendant vers 0 à l'infini. En supposant B unifère, $M(C_0(X, B))$ est la C*-algèbre $C_b(X, B)$ des fonctions continues bornées de X dans B. Signalons aussi que $M(\mathcal{K}) = \mathcal{B}$.

Soit $0 \to B \otimes \mathcal{K} \to E \xrightarrow{f} A \to 0$ une extension de A par $B \otimes \mathcal{K}$, d'où un homomorphisme α de E dans $M(B \otimes \mathcal{K})$ qui définit sans ambiguïté l'homomorphisme σ de A

dans $Q^s(B) = M(B \otimes \mathcal{K})/(B \otimes \mathcal{K})$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B\otimes\mathcal{K} & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow\alpha & & \downarrow\sigma & & \\ 0 & \longrightarrow & B\otimes\mathcal{K} & \longrightarrow & M(B\otimes\mathcal{K}) & \xrightarrow{\pi} & Q^s(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Toute l'information sur l'extension est contenue dans σ. Réciproquement, à la donnée d'un homomorphisme $\sigma : A \to Q^s(B)$ on associe l'extension

$$E = \{(a,m) \in A \times M(B \otimes \mathcal{K}), \sigma(a) = \pi(m)\}.$$

On dit que l'extension est *triviale* si σ se relève en un homomorphisme de A dans $M(B \otimes \mathcal{K})$, ou encore s'il existe un homomorphisme $s : A \to E$ tel que $f \circ s = id_A$. Notons que σ est injectif si et seulement si $B \otimes \mathcal{K}$ est un idéal essentiel de E, et dans ce cas on dit que l'extension est *essentielle.*

Deux extensions σ_1 et σ_2 sont *(unitairement) équivalentes* s'il existe un unitaire U de $M(B\otimes\mathcal{K})$ tel que $Ad\,\pi(U)\circ\sigma_1 = \sigma_2$. On notera $\mathcal{E}xt(A,B)$ l'ensemble des classes $[\sigma]$ d'extensions $\sigma : A \to M(B \otimes \mathcal{K})/(B \otimes \mathcal{K})$. Muni de l'addition $[\sigma_1] + [\sigma_2] = [\sigma_1 \oplus \sigma_2]$, où $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ est l'homomorphisme

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(a) & 0 \\ 0 & \sigma_2(a) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes Q^s(B) \simeq Q^s(B),$$

$\mathcal{E}xt(A,B)$ est un semi-groupe abélien. Son quotient modulo les classes d'extensions triviales est le semi-groupe $Ext(A,B)$ de Kasparov. $Ext(A,B)$ admet la classe des extensions triviales comme élément neutre, mais ce n'est pas un groupe en général. Signalons que $Ext(A,B)$ est un groupe lorsque A est nucléaire séparable, et que Ext fait le lien entre K-théorie et K-homologie : $Ext(\mathbb{C},B) = K_1(B)$, et $Ext(C(X),\mathbb{C}) = K_1(X) = K^1(C(X))$ pour X compact métrisable. La preuve de l'invariance par homotopie du bifoncteur $(A,B) \mapsto Ext(A,B)^{-1}$ (groupe des éléments inversibles de $Ext(A,B)$) est l'un des succès majeurs de la théorie de Kasparov [27].

$Ext(A,B)$ présente toutefois le défaut de décrire seulement les classes d'équivalence stables d'extensions (modulo l'addition d'extensions triviales). La généralisation remarquable par D. Voiculescu ([44], [3]) de la théorie de Weyl-von Neumann permet d'y remédier dans le cas $B = \mathbb{C}$. Rappelons d'abord qu'une extension $\sigma : A \to Q^s(B)$ est dite *absorbante* si $[\sigma] + [\tau] = [\sigma]$ pour toute extension triviale τ.

THÉORÈME 4.1 (Voiculescu [44]).- *Toute extension non unifère essentielle d'une* C^*-*algèbre séparable A par $\mathcal{K}$ est absorbante.*

Comme il existe des extensions triviales essentielles non unifères, on voit que tout élément de $Ext(A,\mathbb{C})$ est représenté par une et une seule (à équivalence unitaire près) extension essentielle non unifère. En particulier, l'équivalence unitaire de toutes celles qui sont triviales généralise la théorie classique de Weyl-von Neumann. Dans le cas de $Ext(A, B)$ avec B quelconque la situation est moins satisfaisante :

THÉORÈME 4.2 (Kasparov [26]).- *Soient A et B deux* C*-*algèbres avec A ou B nucléaire, et A séparable. Il existe une extension triviale absorbante, et par conséquent dans chaque classe de $Ext(A, B)$ il existe une et une seule extension absorbante (à équivalence unitaire près).*

La caractérisation des extensions absorbantes est un problème difficile. Kirchberg le résoud pour B simple purement infinie : de façon inattendue le résultat est le même que pour $B = \mathbb{C}$, comme nous allons le voir maintenant.

5. LES THÉORÈMES DE TYPE WEYL-VON NEUMANN DE KIRCHBERG

Introduisons d'abord une classe de morphismes qui intervient naturellement dans les problèmes liés aux produits tensoriels de C*-algèbres. Soit $\varphi : A \to B$ une application linéaire et pour $n \geq 1$ notons $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$ l'application définie par $\varphi_n([a_{ij}]) = [\varphi(a_{ij})]$ (où $M_n(A)$ est la C*-algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans A). On dit que φ est *complètement positive* si φ_n est positive pour tout n. Bien entendu les homomorphismes sont des applications complètement positives. Pour $B \supset A$ et $b \in B$, l'application $a \mapsto b^*ab$ est complètement positive.

Une contraction complètement positive $\varphi : A \to B$ est dite *nucléaire* si elle est limite (en topologie de la convergence simple normique) d'applications de la forme $\tau \circ \sigma$ où $\sigma : A \to M_n(\mathbb{C})$ et $\tau : M_n(\mathbb{C}) \to B$ sont des contractions complètement positives. Le lien avec les C*-algèbres nucléaires se fait par un théoreme d'approximation qui rappelle celui de Grothendieck pour les espaces de Banach : A est nucléaire si et seulement si l'application identique de A est nucléaire ([34], [10]).

PROPOSITION 5.1.- *Soient B une* C*-*algèbre simple purement infinie et A une sous-*C*-*algèbre séparable de $M(B)$. Considérons une contraction complètement positive nucléaire $\varphi : A \to B$. Il existe une suite (v_n) d'éléments de B, de norme ≤ 1, telle que $\varphi(a) = \lim_n v_n^* a v_n$ pour tout $a \in A$.*

Esquissons la preuve dans le cas où B est unifère pour simplifier. On peut supposer que φ est de la forme $\tau \circ \sigma$ comme ci-dessus. Comme B contient des isométries $s_1, \ldots, s_n$ avec $\sum_1^n s_i s_i^* \leq 1$, on montre aisément l'existence de $e_1, \ldots, e_n$ dans B tels que τ soit de la forme $[x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \sum x_{ij} e_i^* e_j$. Le lemme de Glimm (voir [18], §11.2), appliqué à la représentation irréductible associée à un état pur ω arbitrairement choisi sur B, permet d'approximer σ par une application complètement positive de la forme $a \mapsto [\omega(f_i^* a f_j)] \in M_n(\mathbb{C})$, avec $f_1, \ldots, f_n \in B$. On est donc ramené au cas où φ est de la forme $a \mapsto \sum_{i,j=1}^n e_i^* \omega(f_i^* a f_j) e_j$, et il suffit en fait de traiter le cas $\varphi : a \mapsto \omega(a) 1_B$. On se donne une partie finie K de B et $\varepsilon > 0$. Comme ω est un état pur, on trouve $b \in B$, de norme 1, avec $\|b^*(x - \omega(x)1_B)b\| \leq \varepsilon$ pour $x \in K$. C'est ici qu'intervient vraiment le fait que B est simple purement infinie : il existe $c \in B$ de norme 1 tel que $\|1 - c^* b^* bc\| \leq \varepsilon$. Par conséquent, φ est approché par $x \mapsto (bc)^* x (bc)$. ∎

A partir de cette proposition, les techniques utilisées par Voiculescu, puis par Kasparov dans son étude de $Ext(A, B)$, donnent :

PROPOSITION 5.2.– *Soient B une C*-algèbre simple purement infinie et A une sous-C*-algèbre unifère séparable de $M(B \otimes \mathcal{K})$, avec A ou B nucléaire. Soit φ un homomorphisme unifère de A dans $M(B \otimes \mathcal{K})$, nul sur $A \cap (B \otimes \mathcal{K})$. Alors il existe une suite (u_n) d'unitaires de $M(B \otimes \mathcal{K})$ telle que pour tout $x \in A$,*

$$(x \oplus \varphi(x)) - u_n^* x u_n \in B \otimes \mathcal{K} \quad et \quad (x \oplus \varphi(x)) = lim_n u_n^* x u_n.$$

COROLLAIRE 5.3.– *Soient A et B deux C*-algèbres avec B simple purement infinie , A séparable, et A ou B nucléaire. Toute extension non unifère essentielle de A par $B \otimes \mathcal{K}$ est absorbante.*

REMARQUES – a) Kirchberg remarque que les cas B stablement isomorphe à $\mathbb{C}$ et B simple purement infinie sont les deux seuls pour lesquels, quelle que soit A nucléaire séparable, toute extension essentielle non unifère de A par $B \otimes \mathcal{K}$ est absorbante.

– b) Son article contient aussi plusieurs variantes utiles mais un peu techniques de la proposition 5.1, qui lui permettent de travailler avec des hypothèses sur B un peu moins contraignantes que la propriété d'être purement infinie.

6. CARACTÉRISATION DES C*-ALGÈBRES EXACTES

THÉORÈME 6.1.– *Une C*-algèbre séparable A est exacte si et seulement si elle est isomorphe à une sous-C*-algèbre de $\mathcal{O}_2$.*

La démonstration part d'une première caractérisation remarquable des C*-algèbres exactes obtenue par Kirchberg dans [30] (voir [46] pour une preuve plus accessible): une C*-algèbre est exacte si et seulement si elle est isomorphe à un quotient d'une sous-C*-algèbre de $M_{2^\infty} = \varinjlim M_{2^n}(\mathbb{C})$ (produit tensoriel infini d'algèbres $M_2(\mathbb{C})$). Comme M_{2^∞} se plonge dans $\mathcal{O}_2$, on voit que A s'insère dans une suite exacte $0 \to I \to E \to A \to 0$, où E est une sous-C*-algèbre de $\mathcal{O}_2$. Par des arguments standards, on peut supposer que I est isomorphe à $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{K}$. On obtient ainsi une extension σ de A par $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{K}$. Pour simplifier, le principe de la preuve restant le même, nous continuons la démonstration en supposant A nucléaire. L'homotopie des endomorphismes $id_{\mathcal{O}_2}$ et "$2\, id_{\mathcal{O}_2}$" (lemme 2.1) de $\mathcal{O}_2$, et l'invariance par homotopie du foncteur $Ext(A, .)$ donnent $Ext(A, \mathcal{O}_2) = 0$. A priori, ceci montre seulement que σ est stablement triviale. Mais on se ramène aisément au cas d'une extension essentielle, et à l'aide du corollaire 5.3 on voit que σ est triviale. L'homomorphisme section $s : A \to E \subset \mathcal{O}_2$ donne alors le plongement recherché. ∎

REMARQUE – Kirchberg montre aussi qu'une C*-algèbre séparable unifère A est nucléaire si et seulement elle est isomorphe à une sous-C*-algèbre unifère de $\mathcal{O}_2$, image de $\mathcal{O}_2$ par une projection de norme 1.

7. MORPHISMES D'UNE C*-ALGÈBRE NUCLÉAIRE VERS UNE PUREMENT INFINIE

Soient A et B deux C*-algèbres avec A séparable. On note SB la suspension $C_0(\mathbb{R}) \otimes B$ de B. Grâce au résultat fondamental de Kasparov [27], nous identifierons le groupe $Ext(A, SB)^{-1}$avec le groupe $KK(A, B)$, objet de base de sa théorie. Nous n'en rappellerons pas la définition. Disons seulement que par construction même, KK est invariant par homotopie et que l'efficacité de cette théorie provient en grande partie de l'existence d'un produit associatif de $KK(A, B) \times KK(B, C)$ dans $KK(A, C)$, noté $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \otimes_B \mathbf{y}$. On peut comprendre les éléments de $KK(A, B)$ comme des morphismes généralisés et ce produit comme une composition de morphismes. La E-théorie introduite par N. Higson et A. Connes [11] précise ce point de vue. La notion de base est très simple, c'est celle de morphisme asymptotique. Pour les détails nous renvoyons à ([12], Appendix II-B).

DÉFINITION 7.1.– On appelle *morphisme asymptotique* de A dans B la donnée d'une famille $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ d'applications de A dans B telle que

(i) $t \mapsto \varphi_t(a)$ est continue pour tout $a \in A$;

(ii) pour tous $a, a' \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi_t(a) + \lambda \varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a')) = 0;$$

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi_t(aa') - \varphi_t(a)\varphi_t(a')) = 0;$$

$$\lim_{t \to \infty} \quad - \varphi_t(a)^*) = 0.$$

A équivalence près, les morphismes asymptotiques correspondent exactement aux homomorphismes de A dans $B_\infty = C_b(\mathbb{R}_+, B)/C_0(\mathbb{R}_+, B)$. A toute extension de A par

$SB \otimes \mathcal{K}$, on associe sans trop de difficultés un morphisme asymptotique de SA dans $SB \otimes \mathcal{K}$, d'où une flèche naturelle de $KK(A,B)$ dans le groupe $E(A,B)$ des classes d'homotopie des morphismes asymptotiques de SA dans $SB \otimes \mathcal{K}$. Ce n'est pas toujours un isomorphisme [43], mais Connes et Higson montrent que c'est le cas si A est nucléaire.

L'originalité de l'approche de Kirchberg consiste à considérer les morphismes asymptotiques de A dans B (sans prendre les suspensions) et à travailler avec la relation d'équivalence suivante (plus fine a priori que l'homotopie usuelle lorsque B est stable) :

DÉFINITION 7.2.- Deux morphismes asymptotiques (φ_t) et (ψ_t) de A dans B sont dits *(asymptotiquement) unitairement équivalents* s'il existe une application $t \mapsto u(t)$ de $\mathbb{R}_+$ dans le groupe unitaire de $M(B)$ telle que pour tout $b \in B$, $t \mapsto u(t)b$ soit normiquement continue, et telle que pour tout $a \in A$, on ait $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)\varphi_t(a)u(t)^* - \psi_t(a) = 0$. La classe de $\varphi = (\varphi_t)$ sera notée $[\varphi]$.

Nous considérons maintenant des C*-algèbres unifères A et B, et nous supposons que B contient une copie unifère de $\mathcal{O}_2$. Nous notons $\mathcal{R}(A,B)$ l'ensemble des classes d'équivalence unitaires des morphismes asymptotiques unifères de A dans B. Il a une structure naturelle de semi-groupe abélien, en posant $[\varphi_1]+[\varphi_2] = [\varphi_1 \oplus \varphi_2]$, où $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ est le morphisme asymptotique $s_1\varphi_1 s_1^* + s_2\varphi_2 s_2^*$, bien défini (à équivalence près) par le choix d'isométries s_1, s_2 de B telles que $s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1$. Grâce aux résultats du type Weyl-von Neumann de Kirchberg, l'étude de $\mathcal{R}(A,B)$ se déroule de façon analogue à celle de $\mathcal{E}xt(A,B)$.

Un morphisme asymptotique unifère $\varphi : A \to B_\infty$ est dit *trivial* si le commutant $\varphi(A)' \cap B_\infty$ de $\varphi(A)$ dans B_∞ contient une copie unifère de $\mathcal{O}_2$ (ou encore si $[\varphi]+[\varphi] = [\varphi]$). Il est dit *absorbant* si, pour tout morphisme asymptotique unifère trivial τ, on a $[\varphi]+[\tau] = [\varphi]$. Il est dit *complètement fidèle* si pour tout $a \in A$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} \|\varphi_t(a)\| = \|a\|$.

LEMME 7.3.- *Soient A une C*-algèbre nucléaire unifère séparable et soit B une C*-algèbre simple, purement infinie, contenant une copie unifère de $\mathcal{O}_2$.*

(i) Il existe dans $\mathcal{R}(A,B)$ des éléments complètement fidèles triviaux.

(ii) Un morphisme asymptotique unifère de A dans B est absorbant si et seulement il est complètement fidèle.

Pour (i) on utilise le théorème 6.1 : un plongement unifère

$$\tau_0 : A \longrightarrow \mathcal{O}_2 \otimes 1_{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_2 \subset B \subset B_\infty$$

fait l'affaire. Pour (ii), considérons un morphisme asymptotique complètement fidèle φ et un élément trivial τ. Une variante un peu technique de la proposition 5.1 assure l'existence de $s \in B_\infty$ tel que $\tau(x) = s^*\varphi(x)s$ pour tout $x \in A$. En notant p le projecteur ss^* (qui commute avec l'image de φ), on obtient $[\varphi] = [\tau] + [(1-p)\varphi]$, d'où

$$[\varphi] + [\tau] = [\tau] + [\tau] + [(1-p)\varphi] = [\varphi].$$

∎

En conservant les hypothèses du lemme 7.3, posons

$$R(A,B) = \{[\varphi] + [\tau_0], [\varphi] \in \mathcal{R}(A,B)\},$$

où τ_0 est défini comme ci-dessus. Remarquons que $R(A,B)$ n'est autre que l'ensemble des classes de morphismes asymptotiques unifères complètement fidèles. Il est clair que $[\tau_0]$ est l'élément neutre de $R(A,B)$. A nouveau, un argument de type Weyl-von Neumann montre :

PROPOSITION 7.4.– *Soit A une C*-algèbre nucléaire unifère séparable et soit B une C*-algèbre contenant une copie unifère de $\mathcal{O}_2$. Alors $R(A,B)$ est un groupe.*

Nous allons maintenant expliciter l'homomorphisme naturel F de $R(A,B)$ dans $Ext(A, SB) = KK(A,B)$. Fixons un projecteur e de rang 1 dans $\mathcal{K}$. Pour $f \in C_b(\mathbb{R}_+, B)$, nous choisissons un prolongement $\hat{f}$ de f en une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans B telle que $\lim_{t\to-\infty} \hat{f}(t) = 0$. L'application qui à f associe la classe de $\hat{f} \otimes e$ dans $Q^s(SB) = M(SB \otimes \mathcal{K})/(SB \otimes \mathcal{K})$ donne, par passage au quotient, un plongement canonique de $B_\infty = C_b(\mathbb{R}_+, B)/C_0(\mathbb{R}_+, B)$ dans $Q^s(SB)$. De cette façon, tout morphisme asymptotique de A dans B peut être vu comme un homomorphisme de A dans $Q^s(SB)$, et définit donc un élément de $Ext(A, SB)$. De plus, deux morphismes asymptotiques unitairement équivalents donnent le même élément de $Ext(A, SB)$. L'application $F : R(A,B) \to Ext(A, SB)$ ainsi obtenue respecte l'addition.

Voici le résultat central du travail de Kirchberg :

THÉORÈME 7.5.– *Soient A et B deux C*-algèbres contenant chacune une copie unifère de $\mathcal{O}_2$, avec A nucléaire séparable et B simple purement infinie. Alors F est un isomorphisme naturel du groupe $R(A,B)$ sur le groupe $KK(A,B)$.*

C'est la partie la plus délicate de l'article. La preuve (que nous ne pouvons pas esquisser ici) combine habilement des raisonnements classiques de KK-théorie dans lesquels la K-contractibilié de $\mathcal{O}_2$ est essentielle.

THÉORÈME 7.6.– *Soient A et B comme dans le théorème précédent.*

(i) Pour tout morphisme asymptotique unifère complètement fidèle φ de A dans B, il existe un homomorphisme $\psi : A \to B$ et une application normiquement continue $t \mapsto u(t)$ de $\mathbb{R}_+$ dans le groupe unitaire de B tels que, pour tout $a \in A$,

$$\lim_{t\to+\infty} \|\varphi_t(a) - u(t)\psi(a)u(t)^*\| = 0.$$

(ii) *Tout élément de $KK(A,B)$ est représenté par un et un seul (à équivalence unitaire asymptotique près) homomorphisme unifère injectif de A dans B.*

Donnons une idée de la preuve de (i). Soit α un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$. Nous le prolongeons en un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ par $\alpha(t) = t$ si $t \leq 0$. Alors $f \mapsto f \circ \alpha$ définit un automorphisme $\hat{\alpha}$ de la C*-algèbre $SB = C_0(\mathbb{R}, B)$, d'où par fonctorialité un automorphisme $\hat{\alpha}_*$ du groupe $Ext(A, SB)$. En notant $\tilde{\alpha} \circ \varphi$ le morphisme asymptotique $(\varphi_{\alpha(t)})_{t \geq 0}$, on voit immédiatement que $F([\tilde{\alpha} \circ \varphi]) = \hat{\alpha}_* F([\varphi])$. Mais $\hat{\alpha}$ est homotope à l'identité de SB, et donc, grâce à l'invariance par homotopie de Ext par rapport à la seconde variable, $\hat{\alpha}_*$ est l'identité de $Ext(A, SB)$. On déduit alors de l'injectivité de F que φ et $\tilde{\alpha} \circ \varphi$ sont unitairement équivalents pour tout homéomorphisme α de $\mathbb{R}_+$, et (i) en résulte assez facilement. L'assertion (ii) est alors une conséquence immédiate du théorème 7.5. ∎

Notons que l'hypothèse concernant l'existence d'une copie unifère de $\mathcal{O}_2$ dans A n'est pas essentielle, et aurait pu être évitée si on avait choisi de travailler avec des morphismes non unifères, ou des morphismes de A dans $B \otimes \mathcal{K}$. En fait, Kirchberg obtient de façon analogue le résultat plus fort ci-dessous :

THÉORÈME 7.7.– *Soient A une C*-algèbre unifère, nucléaire, séparable, et B une C*-algèbre contenant une copie unifère de $\mathcal{O}_2$.*

(i) *Tout élément de $KK(A,B)$ est représenté par un homomorphisme injectif de A dans $B \otimes \mathcal{K}$.*

(ii) *Deux homomorphismes φ et ψ de A dans $B \otimes \mathcal{K}$ définissent le même élément de $KK(A,B)$ si et seulement si les homomorphismes $\varphi \oplus (\tau_0 \otimes e)$ et $\psi \oplus (\tau_0 \otimes e)$ sont asymptotiquement unitairement équivalents (où τ_0 désigne un plongement unifère de A dans $\mathcal{O}_2 \otimes 1_{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_2 \subset B \subset B_\infty$).*

(iii) *Si de plus B est simple purement infinie, deux homomorphismes injectifs φ et ψ de A dans $B \otimes \mathcal{K}$ définissent le même élément de $KK(A,B)$ si et seulement si ils sont asymptotiquement unitairement équivalents.*

REMARQUE – Une C*-algèbre B unifère, simple, purement infinie, contient une copie unifère de $\mathcal{O}_2$ si et seulement si $[1_B]_0 = 0$. Notons que cette hypothèse n'est pas une restriction sérieuse. En effet, si B est unifère, simple, purement infinie, il existe une et une seule (à isomorphisme près) C*-algèbre unifère C stablement isomorphe à B et telle que $[1_C]_0 = 0$ (on prend $C = pBp$ où p est un projecteur non nul de B tel que $[p]_0 = 0$). On dit que C est la *forme standard* (de Cuntz) de B.

8. LA CLASSIFICATION DES C*-ALGÈBRES P.I.S.U.N.

C'est ainsi sous l'abréviation p.i.s.u.n. que nous désignerons dorénavant les C*-algèbres purement infinies, simples, séparables, unifères, nucléaires. Dans ce paragraphe, nous supposons toujours A et B séparables.

Rappelons d'abord comment la KK-théorie agit sur la K-théorie. A toute extension

$$0 \to SB \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} A \to 0$$

est associée la suite exacte à 6 termes

$$\begin{array}{ccccc} K_0(SB \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(E) & \xrightarrow{K_0(f)} & K_0(A) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K_1(A) & \xleftarrow{K_1(f)} & K_1(E) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(SB \otimes \mathcal{K}) \end{array}$$

Par périodicité de Bott et stabilité de la K-théorie, les groupes $K_0(SB \otimes \mathcal{K})$ et $K_1(SB \otimes \mathcal{K})$ sont naturellement isomorphes à $K_1(B)$ et $K_0(B)$ respectivement, d'où une flèche naturelle

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1) : KK(A, B) \to Hom(K_0(A), K_0(B)) \oplus Hom(K_1(A), K_1(B)).$$

On dit qu'un élément $\mathbf{x} \in KK(A, B)$ est une *KK-équivalence* s'il existe $\mathbf{y} \in KK(B, A)$ tel que $\mathbf{x} \otimes_B \mathbf{y} = \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{y} \otimes_A \mathbf{x} = \mathbf{1}_B$ (où $\mathbf{1}_A$ est ici l'élément de $KK(A, A)$ qui représente l'application identité de A). A l'aide du produit de Kasparov, on voit immédiatement que $(\gamma_0(\mathbf{x}), \gamma_1(\mathbf{x}))$ est, dans ce cas, un isomorphisme du couple de groupes abéliens $(K_0(A), K_1(A))$ sur $(K_0(B), K_1(B))$.

THÉORÈME 8.1.– *Soient A et B deux C*-algèbres purement infinies, simples, séparables, nucléaires.*

(i) A et B sont KK-équivalentes si et seulement si elles sont stablement isomorphes (i.e. $A \otimes \mathcal{K} \simeq B \otimes \mathcal{K}$).

(ii) Si de plus A et B sont unifères et s'il existe une KK-équivalence $\mathbf{x} \in KK(A, B)$ telle que $\gamma_0(\mathbf{x})([1_A]_0) = [1_B]_0$ alors A et B sont isomorphes.

Pour la preuve de (i) on peut supposer que A et B sont sous forme standard. Soit $\mathbf{x} \in KK(A, B)$ d'inverse $\mathbf{y} \in KK(B, A)$. Par le théorème 7.6 il existe des homomorphismes $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to A$ tels que $[\psi \circ \varphi] = [id_A]$ et $[\varphi \circ \psi] = [id_B]$. En particulier, on peut trouver des suites d'unitaires (u_n) et (v_n) dans A et B respectivement telles que $\lim_{n \to \infty} (Ad\, u_n) \circ \psi \circ \varphi = id_A$ et $\lim_{n \to \infty} (Ad\, v_n) \circ \varphi \circ \psi = id_B$ (convergence simple normique). Un argument simple de G. Elliott [21] implique alors que A et B sont isomorphes.

Avec les hypothèses supplémentaires de (ii), on contrôle bien les unités de A et B, d'où la conclusion. ∎

Kirchberg démontre en fait plus : la KK-équivalence $\mathbf{x}$ est elle-même représentée par un isomorphisme de A sur B.

On déduit du théorème 8.1 les trois résultats remarquables suivants :

COROLLAIRE 8.2.– *Pour toute* C^**-algèbre simple, séparable, unifère, nucléaire* A*, les* C^**-algèbres* $\mathcal{O}_2$ *et* $A \otimes \mathcal{O}_2$ *sont isomorphes.*

C'est immédiat puisque $KK(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_2)$ et $KK(A \otimes \mathcal{O}_2, A \otimes \mathcal{O}_2)$ sont nuls. ∎

Signalons que plusieurs cas particuliers de ce résultat étaient déjà connus; G. Elliott avait notamment établi (voir [37]) l'isomorphisme des C^*-algèbres $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$.

COROLLAIRE 8.3.– *Une* C^**-algèbre simple, séparable, unifère, nucléaire* A *est purement infinie si et seulement si elle est isomorphe à* $A \otimes \mathcal{O}_\infty$.

En effet, on sait que le plongement unifère $i : \mathbb{C} \to \mathcal{O}_\infty$ induit une KK-équivalence entre les algèbres $\mathbb{C}$ et $\mathcal{O}_\infty$, qui préserve les classes des unités dans K_0. Par tensorisation, $id_A \otimes i$ définit une KK-équivalence de $A = A \otimes \mathbb{C}$ avec $A \otimes \mathcal{O}_\infty$, qui préserve aussi les classes des unités. Lorsque A est p.i.s.u.n. on est donc exactement dans la situation du théorème 8.1(ii), en posant $B = A \otimes \mathcal{O}_\infty$. On voit même que l'injection $id_A \otimes i$ est asymptotiquement unitairement équivalente à un isomorphisme de A sur $A \otimes \mathcal{O}_\infty$. ∎

COROLLAIRE 8.4.– *Deux* C^**-algèbres simples, séparables, nucléaires* A *et* B *sont* KK*-équivalentes si et seulement si les* C^**-algèbres* $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ *et* $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ *sont isomorphes.*

C'est immédiat puisque les C^*-algèbres A et B sont KK-équivalentes aux C^*-algèbres (purement infinies, simples, séparables, nucléaires) $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ et $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$ respectivement. ∎

Si on veut une classification exprimée en termes de K_0 et K_1 on rencontre la difficulté suivante : un isomorphisme de la paire de groupes abéliens $(K_0(A), K_1(A))$ sur la paire $(K_0(B), K_1(B))$ ne provient pas toujours d'une KK-équivalence [41]. C'est toutefois le cas lorsque A et B appartiennent à une classe très vaste $\mathcal{N}$ de C^*-algèbres, celles qui satisfont au théorème des coefficients universels [39]. Rappelons que A est dans la classe $\mathcal{N}$ si et seulement si pour toute C^*-algèbre B, on a une suite exacte naturelle

$$0 \to \bigoplus_{i=0,1} Ext^1_{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_{i+1}(B)) \xrightarrow{\delta} KK(A, B) \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i=0,1} Hom(K_i(A), K_i(B)) \to 0,$$

où δ est l'inverse de l'application qui à $\mathbf{x} \in \ker(\gamma)$ associe la paire d'extensions de groupes abéliens

$$0 \to K_0(B) \to K_1(E) \to K_1(A) \to 0, \quad 0 \to K_1(B) \to K_0(E) \to K_0(A) \to 0$$

définie par la suite exacte à 6 termes relative à $\mathbf{x}$. Mentionnons que la classe $\mathcal{N}$ contient en particulier les C^*-algèbres qui se construisent à partir des commutatives par les opérations usuelles de la théorie (tensorisation par $\mathcal{K}$ ou $M_n(\mathbb{C})$, limites inductives, extensions, produits croisés par $\mathbb{Z}$...). Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 8.1 (*ii*) :

THÉORÈME 8.5.- *Soient A et B deux* C*-*algèbres p.i.s.u.n. dans la classe $\mathcal{N}$. Si les invariants $(K_0(A), [1_A,]_0, K_1(A))$ et $(K_0(B), [1_B,]_0, K_1(B))$ sont isomorphes (en tant que groupes abéliens, avec élément distingué dans K_0), alors A et B sont isomorphes.*

EXEMPLES – 1) Les C*-algèbres $\mathcal{O}_n$ sont dans la classe $\mathcal{N}$. Comme $(\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, \hat{k}, 0)$ est l'invariant de $M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_n$, on voit que $M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_m$ et $M_l(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_n$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$ et $p.g.c.d.(k, n-1) = p.g.c.d.(l, n-1)$.

L'invariant de $\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q$ est $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, \hat{1}, (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$, où r désigne le *p.g.c.d.* de $p-1$ et $q-1$. Il en résulte par exemple que $\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q$ et $\mathcal{O}_2$ sont isomorphes si et seulement si $p-1$ et $q-1$ sont premiers entre eux.

– 2) Soit Γ un réseau de $PSL(2, \mathbb{R})$, agissant par isométries sur le demi-plan de Poincaré H. Le quotient $\Gamma \backslash H$ est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$, privée, lorsque Γ n'est pas cocompact, d'un nombre fini $q \geq 1$ de points. Notons α l'action de Γ sur la frontière S de H. La C*-algèbre produit croisé $D = C(S) \rtimes_\alpha \Gamma$ est p.i.s.u.n. et elle appartient à la classe $\mathcal{N}$. Le calcul de sa K-théorie montre que $K_0(D)$ est un groupe abélien finiment engendré dont la composante sans torsion est isomorphe à $K_1(D)$. Son rang vaut $2g+1$ si Γ est cocompact et $2g+q$ sinon. De plus, on observe que $(K_0(D), K_1(D))$ ne dépend que du groupe Γ, et non pas de la façon dont il est plongé comme réseau dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

Rappelons par ailleurs que la K-théorie de toute algèbre de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ est du même type que celle de D, c'est-à-dire que $K_0(\mathcal{O}_A)$ est un groupe abélien finiment engendré dont la composante sans torsion est isomorphe à $K_1(\mathcal{O}_A)$ (voir [16]). Enfin, pour tout couple (G_0, g_0) formé d'un groupe abélien finiment engendré G_0 et d'un élément g_0 de G_0, il existe une C*-algèbre simple de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ telle que $(K_0(\mathcal{O}_A), [1_A,]_0)$ soit isomorphe à (G_0, g_0). Comme ces algèbres $\mathcal{O}_A$ sont aussi p.i.s.u.n. dans la classe $\mathcal{N}$, le théorème de classification de Kirchberg permet d'obtenir le résultat non évident suivant: D est isomorphe à une C*-algèbre simple de Cuntz-Krieger (ce qui la relie à la théorie des chaînes de Markov topologiques); elle ne dépend, à isomorphisme stable près, que du groupe Γ, et non pas de son plongement comme réseau dans $PSL(2, \mathbb{R})$. En outre, on s'aperçoit que toutes les algèbres simples de Cuntz-Krieger, sauf les $\mathcal{O}_n$, s'obtiennent de cette façon à partir d'un réseau non cocompact de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Pour terminer, énonçons le joli résultat de Rørdam, qui montre que toutes les valeurs possibles de l'invariant apparaissent dans la classe $\mathcal{N}$. Soit α un isomorphisme d'une C*-algèbre unifère B sur un coin pBp ($p = \alpha(1)$ projecteur de B). On note $B \rtimes_\alpha \mathbb{N}$ la C*-algèbre universelle engendrée par une copie de B et une isométrie s telle que

$sbs^* = \alpha(b)$ pour tout b dans B. Par ailleurs on dit que B est une C*-algèbre $A\mathbb{T}$ si elle est limite inductive d'une suite $(B_n \otimes C(\mathbb{T}))$ de C*-algèbres, où B_n est de dimension finie pour tout n. Dans ce cas $B \rtimes_\alpha \mathbb{N}$ est nucléaire et appartient à la classe $\mathcal{N}$.

THÉORÈME 8.6 (Rørdam [38]).– *Soient* G_0, G_1 *deux groupes abéliens dénombrables et* $g_0 \in G_0$. *Il existe une* C*-*algèbre* $A\mathbb{T}$ *simple unifère* B, *et un isomorphisme* α *de* B *sur un coin* pBp *de* B *tels que* $A = B \rtimes_\alpha \mathbb{N}$ *soit simple purement infinie avec* (G_0, g_0, G_1) *isomorphe à* $(K_0(A), [1_A,]_0, K_1(A))$.

La classification des C*-algèbres p.i.s.u.n. sera donc complètement résolue en cas de réponse positive au problème suivant, posé depuis longtemps :

PROBLÈME : $\mathcal{N}$ contient-elle toutes les C*-algèbres simples, séparables, nucléaires ? D'après une remarque de Kirchberg, cette question est équivalente à la résolution du cas particulier le "plus simple" de la classification des p.i.s.u.n. : une C*-algèbre p.i.s.u.n A telle que $K_0(A) = 0$ et $K_1(A) = 0$ est-elle isomorphe à $\mathcal{O}_2$?

RÉFÉRENCES

[1] S. ADAMS, *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups*, Topology **33** (1994), 765–783.

[2] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE, *C*-algèbres purement infinies et groupes hyperboliques*, Prépublication, Université d'Orléans (1995).

[3] W. ARVESON, *Notes on extensions of C*-algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), 329–355.

[4] B. BLACKADAR, K-theory for operator algebras, M.S.R.I. Publications **5**, Springer Verlag, New York (1986).

[5] B. BLACKADAR, J. CUNTZ, *The structure of stable algebraically simple C*-algebras*, Amer. J. Math. **104** (1982), 813–822.

[6] B. BLACKADAR, D. HANDELMAN, *Dimension functions and traces on C*-algebras*, J. Functional Anal. **45** (1982), 297–340.

[7] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras*, Proc. Conf. on Operator Theory, Springer Lecture Notes in Math. **345** (1973), 58-128.

[8] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, *Extensions of C*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. **105** (1977), 265–324.

[9] M.-D. CHOI, *A simple* C*-*algebra generated by two finite order unitaries*, Can. J. Math. **31** (1979), 887–890.

[10] M.-D. CHOI, E. EFFROS, *Nuclear* C*-*algebras and the approximation property*, Amer. J. Math. **100** (1978), 61–97.

[11] A. CONNES, N. HIGSON, *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie*, C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1990), 101–106.

[12] A. CONNES, Noncommutative geometry, Academic Press (1994).

[13] J. CUNTZ, *Simple* C*-*algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.

[14] J. CUNTZ, *Dimension functions on simple* C*-*algebras*, Math. Ann. **233** (1978), 145–153.

[15] J. CUNTZ, *K-theory for certain* C*-*algebras*, Ann. of Math. **113** (1981), 181–197.

[16] J. CUNTZ, *A class of* C*-*algebras and topological Markov chains II : Reducible chains and the Ext-functor for* C*-*algebras*, Invent. Math. **63** (1981), 25–40.

[17] C. CUNTZ, W. KRIEGER, *A class of* C*-*algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), 251–268.

[18] J. DIXMIER Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthiers-Villars, Paris (1969).

[19] E. EFFROS, D. HANDELMAN, C. L. SHEN, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math. **102** (1980), 385–407.

[20] G.A. ELLIOTT, *On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite dimensional algebras*, J. Algebra. **38** (1976), 29–44.

[21] G.A. ELLIOTT, *On the classification of* C*-*algebras of real rank zero*, J. Reine Angew. Math. **443** (1993), 179–219.

[22] G.A. ELLIOTT, *Are amenable* C*-*algebras classifiable?*, in Representation theory of groups and algebras, Contemporary Mathematics **145** (1993), 423–426.

[23] G.A. ELLIOTT, *The classification problem for amenable* C*-*algebras*, Proc. I.C.M., Zurich (1994).

[24] T. FACK, *K-théorie bivariante de Kasparov*, Séminaire Bourbaki, Astérisque **105-106** (1983), 149–166.

[25] U. HAAGERUP, *Quasitraces on exact* C*-*algebras are traces*, Notes manuscrites.

[26] G.G. KASPAROV, *Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), 133–150.

[27] G.G. KASPAROV, *The operator K-functor and extensions of* C^**-algebras* , Math. U.S.S.R. Izv. **16** (1981), 513–572. Traduit de Izv. Acad. Nauk S.S.S.R., Ser. Math. **44** (1980), 571–636.

[28] E. KIRCHBERG, *Positive maps and C^*-nuclear algebras*, Proc. Intern. Conf. on Operator Algebras, Ideals and their applications in theoretical Physics, Leipzig (1977), 225–257, Teubner, Leipzig, 1978.

[29] E. KIRCHBERG, *On non-semi-split extensions, tensor products and exactness of group* C^**-algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449–489.

[30] E. KIRCHBERG, *On subalgebras of the CAR-algebra*, J. Functional Analysis **129** (1995), 35–63.

[31] E. KIRCHBERG, *Exact* C^**-algebras, tensor products, and classification of purely infinite algebras*, Proc. I.C.M., Zurich (1994).

[32] E. KIRCHBERG, *The classification of purely infinite* C^**-algebras using Kasparov's theory* , version préliminaire, Humboldt Universität zu Berlin (1994).

[33] M. LACA, J. SPIELBERG, *Purely infinite* C^**-algebras from boundary actions of discrete groups*, Prépublication (1995).

[34] C. LANCE, *On nuclear* C^**-algebras*, J. Functional Analysis **12** (1973), 157–176.

[35] J. von NEUMANN, *Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators*, Hermann, Paris (1935).

[36] N. C. PHILLIPS, *A classification theorem for purely infinite simple* C^**-algebras*, Prépublication, Univ. Oregon et Fields Inst. (1995).

[37] M. RØRDAM, *A simple proof of Elliott's result* $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada**16** (1994), 31–36.

[38] M. RØRDAM, *Classification of certain infinite simple* C^**-algebras*, J. Functional Analysis, à paraître.

[39] J. ROSENBERG, C. SCHOCHET, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor*, Duke J. Math. **55** (1987), 431–474.

[40] M. TAKESAKI, *On the cross norm of the direct product of* C^**-algebras*, Tôhoku Math J. **16** (1964), 111–122.

[41] G. SKANDALIS, *Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz)*, K-theory **1** (1988), 549–573.

[42] G. SKANDALIS, *Kasparov's bivariant K-theory and applications*, Expo. Math. **9** (1991), 193–250.

[43] G. SKANDALIS, *Le bifoncteur de Kasparov n'est pas exact*, C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 939–941.

[44] D. VOICULESCU, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **21** (1976), 97–113.

[45] S. WASSERMANN, *On tensor products of certain group* C*-*algebras*, J. Functional Analysis **23** (1976), 239–254.

[46] S. WASSERMANN, Exact C*-algebras and related topics, Lecture Notes Series **19**, Seoul National University (1994).

[47] H. WEYL, *Über beschrankte quadratischen Formen deren Differenz vollstetig ist*, Rend. Circ. mat. Palermo **27** (1909), 373–392.

Claire Anantharaman-Delaroche
U.R.A. 747
Département de Mathématiques
Université d'Orléans
BP 6759
45067 ORLEANS Cedex 2