Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 113

Nouvelle série

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean FASEL

2 0 0 8

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 27 € ($ 40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën
Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-265-5

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 113

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Société Mathématique de France 2008
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Fasel
D-Math, ETH Zentrum, 8092 Zürich, Switzerland.
E-mail : `jean.fasel@gmail.com`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 13C10, 13D15, 14C15, 14C17, 18F30.
***Mots clefs*. —** groupes de Chow-Witt, classe d'Euler, fibrés vectoriels.

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Résumé. — Dans ce travail, nous étudions les *groupes de Chow-Witt*. Ces groupes ont été introduits par J. Barge et F. Morel dans le but de comprendre dans quelle situation un A-module projectif P de rang égal à la dimension de A est isomorphe à un module projectif plus simple $Q \oplus A$.

Dans un premier temps, nous montrons que ces groupes satisfont à peu de choses près les propriétés fonctorielles des groupes de Chow classiques. Nous définissons ensuite pour tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre E de rang (constant) n sur un schéma régulier X de dimension $m \geq n$ une classe d'Euler $\tilde{c}_n(E)$ qui est un raffinement de la classe de Chern maximale classique $c_n(E)$. Cette classe d'Euler satisfait elle aussi de bonnes propriétés fonctorielles. Nous obtenons en particulier que si P est un projectif de rang n sur un anneau régulier A de dimension supérieure ou égale à n tel que $P \simeq Q \oplus A$ alors $\tilde{c}_n(P) = 0$.

Nous calculons dans un second temps les groupes de Chow-Witt maximaux d'un anneau régulier de dimension 2 et d'une $\mathbb{R}$-algèbre A régulière de dimension quelconque. Il découle immédiatement de ces calculs que si P est un A-module projectif de rang n égal à la dimension de l'anneau on a $\tilde{c}_n(P) = 0$ si et seulement si $P \simeq Q \oplus A$.

Finalement nous examinons les liens entre les groupes de Chow-Witt et les groupes des classes d'Euler introduits par S. Bhatwadekar et R. Sridharan.

***Abstract* (Chow-Witt groups).** — In this work we study the *Chow-Witt groups*. These groups were defined by J. Barge et F. Morel in order to understand when a projective module P of top rank over a ring A has a free factor of rank one, *i.e.*, is isomorphic to $Q \oplus A$.

We show first that these groups satisfy the same functorial properties as the classical Chow groups. Then we define for each locally free $\mathcal{O}_X$-module E of (constant) rank n over a regular scheme X an Euler class $\tilde{c}_n(E)$ which is a refinement of the usual top Chern class $c_n(E)$. The Euler classes satisfy also good fonctorial properties. In particular, we get $\tilde{c}_n(P) = 0$ if P is a projective module of rank n over a regular ring A of dimension n such that $P \simeq Q \oplus A$.

Next we compute the top Chow-Witt group of a regular ring A of dimension 2 and the top Chow-Witt group of a regular $\mathbb{R}$-algebra A of finite dimension. For such A, we get that if P is a projective module of rank equal to the dimension of the ring then $\tilde{c}_n(P) = 0$ if and only if $P \simeq Q \oplus A$.

Finally, we examine the links between the Chow-Witt groups and the Euler class groups defined by S. Bhatwadekar and R. Sridharan.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction ... 1
1.1. Avertissement ... 3
1.2. Conventions ... 4
1.3. Remerciements ... 4

2. Le complexe en K-théorie de Milnor ... 5
2.1. Résumé ... 5
2.2. Définitions ... 6
2.3. Fonctorialité du complexe en K-théorie de Milnor ... 10

3. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma régulier ... 15
3.1. Résumé ... 15
3.2. Le groupe de Witt des complexes de modules localement libres ... 15
3.3. Le groupe de Witt des modules de longueur finie ... 17
3.4. Le complexe de Gersten-Witt ... 20
3.5. Un calcul des différentielles du complexe ... 25

4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein ... 27
4.1. Résumé ... 27
4.2. Les groupes de Witt des modules cohérents ... 28
4.3. Le groupe de Witt cohérent d'un anneau de Gorenstein local ... 30
4.4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein ... 34

5. Le morphisme de transfert ... 41
5.1. Résumé ... 41
5.2. Transferts ... 41
5.3. Le morphisme de complexes ... 43

6. Le calcul du morphisme de transfert ... 49
6.1. Résumé ... 49
6.2. Le complexe tordu par le faisceau canonique ... 50
6.3. Le morphisme de transfert tordu par les faisceaux canoniques ... 52
6.4. Le calcul explicite du transfert ... 55

7. Un autre calcul des différentielles du complexe 65
7.1. Résumé 65
7.2. Le cas facile 65
7.3. Le cas général 69

8. Le morphisme de transfert pour les morphismes propres 71
8.1. Résumé 71
8.2. Définition 71
8.3. Le morphisme de complexes 72

9. Complexe de Gersten-Witt et idéaux fondamentaux 83
9.1. Résumé 83
9.2. Différentielles et idéaux fondamentaux 84
9.3. Fonctorialité 86

10. Groupes de Chow-Witt d'un schéma 89
10.1. Résumé 89
10.2. La définition des groupes de Chow-Witt 90
10.3. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une k-algèbre 97
10.4. Propriétés fonctorielles 101

11. Invariances homotopiques 107
11.1. Résumé 107
11.2. Invariance homotopique de $C(X, W)$ 107
11.3. Invariance homotopique des groupes de Chow-Witt 113

12. Produits fibrés et morphismes de complexes 115
12.1. Résumé 115
12.2. Le cas des morphismes finis 115
12.3. Le cas général 119

13. Les classes d'Euler 125
13.1. Résumé 125
13.2. Définitions 126
13.3. Propriétés 128
13.4. Le calcul de $(s_0)_*$ 130

14. La classe d'Euler d'un module projectif de rang maximal 133
14.1. Résumé 133
14.2. Homotopies de sections 133
14.3. Le calcul de $(p^*)^{-1}$ 135

15. La dimension 2 137
15.1. Résumé 137
15.2. L'homomorphisme $f : W^{lf}(A) \to W^-(A)$ 137
15.3. L'homomorphisme $\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \to K_0^{Sp}(A)$ 144

16. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une $\mathbb{R}$-algèbre lisse 151
16.1. Résumé 151
16.2. Premiers pas 152
16.3. Le calcul de $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$ 154
16.4. La suite exacte 158

17. Les groupes des classes d'Euler 161
17.1. Résumé 161
17.2. Définition du groupe des classes d'Euler et premiers résultats 161
17.3. Le groupe des classes d'Euler noethérien 165
17.4. Quelques résultats 168

A. Théorème d'Eisenbud-Evans et Théorème de Bertini 171
A.1. Théorème d'Eisenbud-Evans 171
A.2. Théorème de Bertini 172

B. Catégories triangulées 175
B.1. Définition 175
B.2. Exemples de catégories triangulées 177

C. Le groupe de Witt d'une catégorie exacte 181
C.1. Définitions 181
C.2. Orthogonalité 182
C.3. Fonctorialité 183

D. Les groupes de Witt de catégories triangulées 185
D.1. Définitions 185
D.2. La suite exacte de localisation 188

E. Remarques sur les groupes de Witt d'un corps 193
E.1. Le groupe de Witt $W(k, L)$ 193
E.2. Le groupe de Witt $W(k, \mathrm{Ext}^n_A(k, A))$ 194

Bibliographie 195

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Soit A un anneau de dimension de Krull n et P un A-module projectif de rang m. On dit que P admet un facteur libre (de rang 1) s'il existe un module projectif Q tel que $P \simeq Q \oplus A$. La question est la suivante :

Quelles sont les conditions pour que P admette un facteur libre ?

Une des première réponses générales est donnée par un théorème de Serre (annexe A, corollaire A.1.7) :

Théorème 1. — *Soient A un anneau noethérien de dimension n et P un module projectif de rang $m > n$. Alors il existe un module projectif Q tel que $P \simeq Q \oplus A$.*

Il suffit donc d'étudier les modules projectifs de rang inférieur ou égal à la dimension de A. Soit $CH^j(A)$ le groupe de Chow des cycles de codimension j sur A. On dispose pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'une classe de Chern $c_k(P)$ qu'on peut voir comme un homomorphisme

$$c_k(P) : CH^j(A) \longrightarrow CH^{j+k}(A)$$

satisfaisant de bonnes propriétés fonctorielles. Entre autre, on a $c_1(A) = 0$ et

$$c_k(P) = \sum_{i+j=k} c_i(P')c_j(P'')$$

si $P \simeq P' \oplus P''$. En particulier, si P est un module projectif de rang n tel que $P \simeq Q \oplus A$ on a $c_n(P) = 0$. Cela nous amène à un résultat important dû à Murthy ([**Mur94**]) :

Théorème 2. — *Soient A une k-algèbre lisse de dimension n sur un corps algébriquement clos k et P un module projectif de rang n sur A. On a alors*

$$c_n(P) = 0 \Longleftrightarrow P \simeq Q \oplus A.$$

La véritable puissance de ce théorème tient dans le fait que la classe $c_n(P)$ et le groupe $CH^n(A)$ ont de bonnes propriétés fonctorielles. On possède ainsi de bonnes chances de calculer ce groupe et cette classe, rendant ainsi le théorème utilisable.

Par ailleurs, il est bien connu que si A est l'anneau des coordonnées de la sphère réelle et P est le plan tangent à cette sphère, alors P ne possède pas de facteur libre. De plus, $c_2(P) = 0$ puisque P est stablement libre. Le théorème ci-dessus est donc faux pour des algèbres sur des corps non algébriquement clos.

C'est pour cette raison que Nori a introduit le groupe des classes d'Euler $E(A)$ (voir par exemple [**Mur99**]) et la classe d'Euler $e(P, \chi)$ où χ est une orientation de P. Un peu plus tard, Bhatwadekar et Sridharan ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 3. — *Soit k un corps infini parfait et A une k-algèbre lisse de dimension $n \geq 2$. Soit P un module projectif de rang n et χ un générateur de $\bigwedge^n P$. On a*

$$P \simeq Q \oplus A$$

si et seulement si $e(P, \chi) = 0$ dans $E(A)$.

Le groupe des classes d'Euler et la classe d'Euler répondent donc complètement à la question de savoir si P admet un facteur libre ou non. En y regardant de plus près, cette réponse souffre de quelques insuffisances. Le principal défaut est que le groupe $E(A)$ ne possède *a priori* pas de bonnes propriétés fonctorielles. En conséquence, les cas où $E(A)$ a pu être calculé sont plutôt rares. On connaît ce groupe pour les k-algèbres de dimension 2 sur un corps infini parfait, les k-algèbres lisses de dimension quelconque pour $k = \mathbb{R}$ ou k algébriquement clos. Dans ce dernier cas, on démontre que $E(A)$ est isomorphe à $CH^n(A)$. Cette démonstration est néanmoins non triviale (voir [**BS98**]).

Ces quelques défauts ont amené Barge et Morel à définir pour tout schéma régulier X de dimension n sur un corps k de caractéristique différente de 2 des groupes $\widetilde{CH}^j(X)$, qu'ils appellent *groupes de Chow des cycles orientés*, et une classe $e(E)$ associée à un fibré vectoriel E de rang n sur X qu'ils appellent *classe d'Euler* de E (voir [**BM00**]). Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $E = Q \oplus A$, ils affirment que $e(E) = 0$. Il découle de plus de leur définition que si k est algébriquement clos et A est une k-algèbre de dimension finie alors on a un isomorphisme naturel entre $\widetilde{CH}^n(A)$ et $CH^n(A)$.

La première partie du présent travail montre que les groupes de Chow-Witt satisfont à peu de chose près les mêmes propriétés fonctorielles que les groupes de Chow usuels. Comme ces groupes de Chow-Witt sont définis à l'aide du complexe de Gersten-Witt et du complexe en K-théorie de Milnor associés à X (voir le chapitre 10), il suffit de démontrer que ces deux complexes satisfont de bonnes propriétés fonctorielles pour en déduire celles des groupes qui nous intéressent. Les propriétés du complexe en K-théorie de Milnor étant bien connues ([**Ros96**]), il suffit de démontrer que le complexe de Gersten-Witt a lui aussi de bonnes propriétés. C'est chose faite dans les douze premiers chapitres.

Nous reprenons ensuite la définition de Barge et Morel pour obtenir une classe d'Euler $\tilde{c}_n(E)$ associée à un fibré vectoriel E de rang n sur X. Cette classe satisfait elle aussi de bonnes propriétés fonctorielles. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ on a en particulier $\tilde{c}_1(A) = 0$ et

$$\tilde{c}_n(P) = \tilde{c}_r(P')\tilde{c}_k(P'')$$

si $P \simeq P' \oplus P''$ avec P' de rang r et P'' de rang k. On en déduit immédiatement que $\tilde{c}_n(P) = 0$ si $P \simeq Q \oplus A$. Les groupes de Chow-Witt et les classes d'Euler sont tout à fait satisfaisants en ce qui concerne les calculs. Mais nous n'avons pas obtenu le résultat qui apporterait un sacre définitif à cette théorie :

Conjecture 1. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n sur un corps parfait k de caractéristique différente de 2 et P un module projectif de rang n. Alors*

$$\tilde{c}_n(P) = 0 \Longleftrightarrow P \simeq Q \oplus A.$$

Il semble néanmoins que ce théorème ait maintenant été démontré par F. Morel ([**Mor04**]). Dans ce travail, on donne une preuve lorsque A est de dimension 2 (chapitre 15) et lorsque A est de dimension quelconque sur $k = \mathbb{R}$ (chapitre 16) ou $k = \mathbb{C}$. Soit exactement les cas où $E(A)$ peut être calculé ! En outre, les groupes de Chow inférieurs $\widetilde{CH}^m(A)$ avec $m < \dim(A)$ sont candidats à détecter les obstructions à scinder un projectif Q de rang m. En effet, on tire immédiatement de la relation

$$\tilde{c}_n(P) = \tilde{c}_r(P')\tilde{c}_k(P'')$$

que $\tilde{c}_m(Q) = 0$ si $Q \simeq R \oplus A$.

1.1. Avertissement

De bonnes connaissances d'algèbre commutative sont absolument nécessaires pour lire ce travail. Par exemple, nous supposons connues les notions d'anneau régulier, de spectre d'un anneau, de module projectif et module injectif, de modules d'extension, de support d'un module, etc... Le livre de Matsumura ([**Mat86**]) est une excellente référence en la matière. Le seuls résultats d'algèbre commutative non classiques utilisés dans ce travail sont le théorème d'Eisenbud-Evans et le théorème de Bertini. L'annexe A fournit les énoncés de ces théorèmes, ainsi que quelques corollaires immédiats. Il est également nécessaire de connaître quelques concepts basiques de géométrie algébrique. Nous utiliserons ainsi sans les définir les concepts de schéma, morphisme plat, morphisme fini et morphisme propre. Le chapitre 2 du livre de Hartshorne ([**Har77**]) fournit les définitions et résultats nécessaires à une bonne compréhension. Par ailleurs, la construction du complexe de Gersten-Witt et les résultats de fonctorialité de ce complexe demandent une certaine aisance avec les concepts de groupe de Witt, de catégories triangulées et de groupes de Witt d'une catégorie triangulée. Les annexes B, C, D et E donnent les outils nécessaires pour acquérir cette aisance. Il est donc fortement conseillé de commencer par ces annexes avant d'entamer la lecture des chapitres 3 et suivants. Enfin, nous utiliserons librement les résultats basiques de la théorie de l'intersection présentés dans le livre de Fulton ([**Ful84**]). Une bonne connaissance de cette théorie est donc souhaitable.

1.2. Conventions

Tous les schémas considérés dans ce travail sont des schémas séparés de type fini sur un corps k de caractéristique différente de 2, ou des localisations de tels schémas. Pour éviter certaines questions de lissité, on supposera que k est parfait. Dans ce cas, un schéma est régulier si et seulement s'il est lisse ([**Gro67c**, corollaire 17.15.2, p. 99]). On supposera de plus que les schémas réguliers sont connexes et les morphismes propres sont de dimension relative constante. Si X est un schéma et L est un corps, on notera $X(L)$ l'ensemble des points L-rationnels de X.

1.3. Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier Jean Barge pour pour la générosité avec laquelle il a partagé ses idées sur les résultats du chapitre 15. J'aimerais également exprimer toute ma gratitude à Paul Balmer pour les innombrables remarques et améliorations qu'il m'a suggérées pour améliorer autant que possible ce manuscrit. Merci enfin à Manuel Ojanguren sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

CHAPITRE 2

LE COMPLEXE EN K-THÉORIE DE MILNOR

2.1. Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats obtenus par M. Rost ([**Ros96**]). Si X est un schéma et $p \in \mathbb{N}$, le groupe de Chow usuel $\mathrm{CH}^p(X)$ peut être vu comme le conoyau de l'application diviseur

$$d : \bigoplus_{x \in X^{(p+1)}} K_1(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_0(k(x)).$$

Si U est un ouvert de X et $Y = X \setminus U$, on a une suite exacte

$$\mathrm{CH}^l(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(U) \longrightarrow 0$$

où l dépend de la codimension de Y dans X. Cette suite n'est en général pas exacte à gauche. Pour faire des calculs, on aimerait néanmoins pouvoir prolonger cette suite en définissant des objets qui ressemblent à des groupes de Chow. Pour définir ces groupes de Chow « supérieurs », il s'agit de considérer un complexe de la forme

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p-2)}} K_2(k(x)) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} K_1(k(x)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_0(k(x)) \longrightarrow 0.$$

Notons $C(X, K_p)$ ce complexe. Choisissant une bonne graduation, on peut définir le groupe de Chow de la manière suivante :

$$\mathrm{CH}^p(X) = H^p(C(X, K_p)).$$

Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre, on obtient un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, K_p) \longrightarrow C(Y, K_s)$$

tel que $H^p(f_*)$ soit le push-forward usuel de cycles (où s dépend de la dimension de X et de Y) et si f est un morphisme plat on obtient un morphisme de complexes

$$f^* : C(X, K_p) \longrightarrow C(Y, K_p)$$

tel $H^p(f^*)$ soit le pull-back usuel. En particulier, si U est un ouvert de X et $Y = X\backslash U$, on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C(Y, K_s) \longrightarrow C(X, K_p) \longrightarrow C(U, K_p) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\ldots \longrightarrow H^{p-1}(U, K_p) \longrightarrow \mathrm{CH}^s(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(U) \longrightarrow 0.$$

On a ainsi une bonne prolongation à gauche de la suite

$$\mathrm{CH}^k(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(U) \longrightarrow 0.$$

2.2. Définitions

Rappelons tout d'abord la définition de la K-théorie de Milnor (voir [**Mil70**]). Soit F un corps et $F^\times$ son groupe des inversibles. On considère l'algèbre tensorielle graduée

$$T(F^\times) = \mathbb{Z} \oplus F^\times \oplus (F^\times \otimes F^\times) \oplus \ldots$$

Soit J l'idéal homogène de $T(F^\times)$ engendré par les éléments de la forme $a \otimes (1-a)$. On obtient une algèbre graduée

$$K_*^M(F) = T(F^\times)/J.$$

Définition 2.2.1. — *La n-ième composante homogène $K_n^M(F)$ de $K_*^M(F)$ est le n-ième groupe de K-théorie de Milnor. On pose $K_i^M(F) = 0$ si $i < 0$.*

Dans ce qui suit, on notera $\{a_1, \ldots, a_n\}$ l'élément $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ de $K_n^M(F)$. On notera additivement la loi de $F^\times = K_1^M(F)$, c'est-à-dire $\{a\} + \{b\} = \{ab\}$.

Soit E un corps et $\phi : F \to E$ un homomorphisme. On définit un homomorphisme de degré 0

$$\phi_* : K_*^M(F) \longrightarrow K_*^M(E)$$

par $\phi_*(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)\}$.

Supposons maintenant que F soit muni d'une valuation discrète v de corps résiduel $k(v)$ et d'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$. Notons $\overline{a}$ l'image d'un élément $a \in \mathcal{O}_v$ dans $k(v)$.

Lemme 2.2.2. — *Il existe un (et un seul) homomorphisme de degré -1*

$$d : K_*^M(F) \longrightarrow K_{*-1}^M(k(v))$$

qui envoie le symbole $\{\pi, a_1, \ldots, a_n\}$ sur $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ pour tout premier π et tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_v^\times$.

Démonstration. — Voir [**Mil70**, Lemme 2.1, p. 322]. □

En particulier, si F est un corps et $F(X)$ est le corps des fonctions rationnelles sur F, on obtient pour tout polynôme irréductible $p \in F[X]$ une valuation sur $F(X)$ dont le corps résiduel est noté $k(p)$. On a donc des homomorphismes

$$d_p : K^M_*(F(X)) \longrightarrow K^M_{*-1}(k(p)).$$

Le théorème suivant est bien connu :

Théorème 2.2.3. — *Soit F un corps et P l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $F[X]$. Notons $i : F \to F(X)$ l'inclusion. Alors on a pour tout n une suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow K^M_n(F) \xrightarrow{i_*} K^M_n(F(X)) \xrightarrow{\sum d_p} \bigoplus_{p\in P} K^M_{n-1}(k(p)) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Voir [**Mil70**, Théorème 2.3, p. 325]. ☐

Remarquons que $F(X)$ possède aussi une valuation discrète notée v_∞ définie par $v_\infty(\frac{a}{b}) = \text{degré}(b) - \text{degré}(a)$. On obtient ainsi un homomorphisme résiduel

$$d_\infty : K^M_*(F)(X) \longrightarrow K^M_{*-1}(F).$$

Choisissons une section

$$\phi : \bigoplus_{p\in P} K^M_n(k(p)) \longrightarrow K^M_{n+1}(F(X))$$

et notons

$$j : K^M_n(k(p)) \longrightarrow \bigoplus_{p\in P} K^M_n(k(p))$$

l'inclusion.

Définition 2.2.4. — *Soit F un corps, p un polynôme irréductible unitaire de $F[X]$. Pour tout n, on définit l'homomorphisme « norme »*

$$N_{k(p)/F} : K^M_n(k(p)) \longrightarrow K^M_n(F)$$

par $N_{k(p)/F} = -d_\infty \circ \phi \circ j$.

A priori, la norme dépend de la section

$$\phi : \bigoplus_{p\in P} K^M_n(k(p)) \longrightarrow K^M_{n+1}(F(X))$$

choisie. Mais le résultat suivant montre qu'il n'en est rien.

Proposition 2.2.5. — *Pour toutes sections*

$$\phi_1 : \bigoplus_{p\in P} K^M_n(k(p)) \longrightarrow K^M_{n+1}(F(X))$$

et

$$\phi_2 : \bigoplus_{p\in P} K^M_n(k(p)) \longrightarrow K^M_{n+1}(F(X))$$

on a

$$d_\infty \circ \phi_1 = d_\infty \circ \phi_2.$$

Démonstration. — En utilisant la définition de d_∞, on voit que $d_\infty i_* = 0$. Pour tout $a \in \bigoplus_{p \in P} K_n^M(k(p))$, on a $(\phi_1 - \phi_2)(a) \in \mathrm{Im}(i_*)$. Ainsi, $d_\infty \phi_1 = d_\infty \phi_2$. □

Cette norme a une expression simple en degrés 0 et 1. En effet,

Théorème 2.2.6. — *Notons $i : F \to k(p)$ l'inclusion. Alors pour tout n la composition*

$$K_n^M(F) \xrightarrow{i_*} K_n^M(k(p)) \xrightarrow{N_{k(p)/F}} K_n^M(F)$$

est la multiplication par $[k(p) : F]$.

Démonstration. — Voir [**Mag02**, proposition 14.64, p. 552]. □

Corollaire 2.2.7. — *En degré 0, la norme*

$$N_{k(p)/F} : K_0^M(k(p)) \longrightarrow K_0^M(F)$$

est la multiplication par $[k(p) : F]$.

Démonstration. — On sait que la composition

$$K_0^M(F) \xrightarrow{i_*} K_0^M(k(p)) \xrightarrow{N_{k(p)/F}} K_0^M(F)$$

est la multiplication par $[k(p) : F]$. Mais

$$i_* : K_0^M(F) \longrightarrow K_0^M(k(p))$$

est l'identité. D'où le corollaire. □

En ce qui concerne le degré 1, on a les résultats suivants :

Proposition 2.2.8. — *Les normes $N_{k(p)/F}$ sont les uniques homomorphismes tels que*

$$-d_\infty = \sum_{p \in P} N_{k(p)/F} \circ d_p.$$

Démonstration. — Voir [**Mag02**, proposition 14.65, p. 552]. □

Corollaire 2.2.9. — *En degré 1, la norme $N_{k(p)/F}$ coïncide avec la norme*

$$N : k(p)^\times \longrightarrow F^\times$$

usuelle.

Démonstration. — Voir [**Mag02**, corollaire 14.66, p. 553]. □

Soit maintenant $\phi : F \to E$ un homomorphisme tel que E/F soit une extension finie. Alors il existe une filtration

$$F \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$$

telle que F_i/F_{i-1} soit monogène. Pour tout i, il existe donc un polynôme irréductible unitaire p dans $F_{i-1}[X]$ tel que $F_{i-1}[X]/p \simeq F_i$. Ceci nous permet de définir pour tout i un homomorphisme de degré 0

$$\alpha_i^* : K_*^M(F_i) \longrightarrow K_*^M(F_{i-1})$$

par $\alpha_i^* = N_{k(p)/F_{i-1}}$ et donc un homomorphisme

$$\phi^* : K_*^M(E) \longrightarrow K_*^M(F).$$

Remarque 2.2.10. — Cet homomorphisme ϕ^* semble être dépendant de la filtration

$$F \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$$

choisie. On peut néanmoins démontrer que ϕ^* est indépendant du choix de la filtration (voir [**Mag02**, p. 555]).

Proposition 2.2.11. — *Soient* $F \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} L$ *des extensions finies de corps. Alors*

$$(\psi\phi)^* = \psi^*\phi^*.$$

Démonstration. — Voir [**Mag02**, remarque p. 555]. $\square$

Soit k un corps et A une k-algèbre locale intègre de dimension 1. Notons x l'idéal maximal de A, F le corps des fractions de A et $k(x)$ le corps A/x. Soit encore B la clôture intégrale de A dans F et $z_1, \ldots, z_m$ les points de B au-dessus de x. Les anneaux locaux B_{z_i} sont des anneaux de valuation discrète. Par le lemme 2.2.2, on obtient des homomorphismes résidus

$$d_i : K_*^M(F) \longrightarrow K_{*-1}^M(k(z_i))$$

et un résidu total

$$d : K_*^M(F) \longrightarrow \bigoplus_i K_{*-1}^M(k(z_i))$$

donné par $d = \sum d_i$.

D'autre part, on sait que les homomorphismes $\phi_i : k(x) \to k(z_i)$ sont finis (puisque les deux corps sont des extensions finies de k) et donc on a des homomorphismes

$$\phi_i^* : K_*^M(k(z_i)) \longrightarrow K_*^M(k(x)).$$

Notons $c : \bigoplus_i K_*^M(k(z_i)) \to K_*^M(k(x))$ l'homomorphisme $\sum \phi_i^*$. En composant d et c, on obtient finalement un homomorphisme

$$d_x : K_*^M(F) \longrightarrow K_{*-1}^M(k(x)).$$

Soit A un anneau intègre global de dimension 1 de corps des fractions F. Il est facile de voir que si $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)$, alors $d_x(\{a_1, \dots, a_n\}) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de maximaux x. On obtient ainsi un homomorphisme résidu de degré -1

$$d : K_*^M(F) \longrightarrow \bigoplus_{x \in \operatorname{Max}(A)} K_{*-1}^M(k(x))$$

donné par

$$d = \sum_{x \in \operatorname{Max}(A)} d_x.$$

Remarque 2.2.12. — On peut aussi calculer

$$d : K_1^M(F) \longrightarrow \bigoplus_{x \in \operatorname{Max}(A)} K_0^M(k(x))$$

de la manière suivante : Si $\frac{a}{b} \in F$, on pose $d(\frac{a}{b}) = l(A/a) - l(A/b)$ (où l est la longueur).

Théorème 2.2.13. — *Soit X un schéma noethérien sur un corps k. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on dispose d'un complexe en K-théorie de Milnor*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_j^M(k(x)) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(1)}} K_{j-1}^M(k(y)) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{z \in X^{(p)}} K_{j-p}^M(k(z)) \xrightarrow{d} \bigoplus_{u \in X^{(p+1)}} K_{j-p-1}^M(k(u)) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. — Les résidus sont construits comme ci-dessus. La vérification qu'il s'agit bien d'un complexe se trouve dans [**Ros96**, lemme 3.3, p. 346]. ☐

Définition 2.2.14. — *Le complexe ci-dessus sera noté $C(X, K_j^M)$. On gradue ce complexe en fonction de la codimension des points. Ainsi, le i-ème degré de $C(X, K_j^M)$, noté $C^i(X, K_j^M)$, est le groupe abélien $\bigoplus_{x \in X^{(i)}} K_{j-i}^M(k(x))$.*

Remarque 2.2.15. — Avec cette graduation, on observe que

$$H^j(C(X, K_j^M)) = \mathrm{CH}^j(X).$$

2.3. Fonctorialité du complexe en K-théorie de Milnor

Soient X et Y deux schémas sur un corps k et $f : X \to Y$ un morphisme propre. Soit $x \in X$, $y = f(x)$ et $\phi : k(y) \to k(x)$ l'homomorphisme induit par f. Si $[k(x) : k(y)]$ est fini (il faut pour cela que $\overline{\{x\}}$ et $\overline{\{y\}}$ aient la même dimension), on définit un homomorphisme

$$(f_*)_y^x : K_*^M(k(x)) \longrightarrow K_*^M(k(y))$$

par $(f_*)_y^x = \phi^*$. Si $[k(x) : k(y)]$ est infini, on pose $(f_*)_y^x = 0$.

Si $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$, on obtient donc pour tout i un homomorphisme

$$(f_*)^i : C^i(X, K_j^M) \longrightarrow C^i(Y, K_{j+m-n}^M)$$

et donc une application de degré $m - n$

$$f_* : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(Y, K_{j+m-n}^M)$$

THÉORÈME 2.3.1. — *Soient X et Y deux schémas sur un corps k et*

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme propre. Alors f_* est un morphisme de complexes de degré $m - n$.

Démonstration. — Voir [**Ros96**, proposition 4.6, p. 352]. □

REMARQUE 2.3.2. — En particulier, f_* induit un homomorphisme

$$f_* : H^j(C(X, K_j^M)) \longrightarrow H^{j+m-n}(C(Y, K_{j+m-n}^M))$$

qui est le push-forward usuel de cycles $\mathrm{CH}^j(X) \to \mathrm{CH}^{j+m-n}(Y)$.

Cette construction est fonctorielle :

PROPOSITION 2.3.3. — *Soient X, Y et Z trois schémas sur un corps k et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des morphismes propres. Alors*

$$(gf)_* = g_* f_*.$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la proposition 2.2.11. □

Supposons maintenant que $f : X \to Y$ soit un morphisme plat de dimension relative constante q. Pour $y \in Y$, on note X_y la fibre de f au dessus de y. Si $x \in X_y^{(0)}$ et $\phi : k(y) \to k(x)$ est l'homomorphisme induit par f, on définit un homomorphisme

$$(f^*)_x^y : K_*^M(k(y)) \longrightarrow K_*^M(k(x))$$

par $(f^*)_y^x = l(\mathcal{O}_{X_y,x}) \cdot \phi_*$.

On obtient ainsi pour tout i un homomorphisme

$$(f^*)^i : C^i(Y, K_j^M) \longrightarrow C^i(X, K_j^M)$$

et donc une application

$$f^* : C(Y, K_j^M) \longrightarrow C(X, K_j^M).$$

THÉORÈME 2.3.4. — *Soient X et Y deux schémas noethérien sur un corps k et*

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme plat. Alors f^* est un morphisme de complexes.

Démonstration. — Voir [**Ros96**, proposition 4.6, p. 352]. □

Remarque 2.3.5. — En particulier, f^* induit un homomorphisme

$$f^* : H^j(C(Y, K_j^M)) \longrightarrow H^j(C(X, K_j^M))$$

qui est le pull-back usuel de cycles $\mathrm{CH}^j(Y) \to \mathrm{CH}^j(X)$.

Soit maintenant $U \subset X$ un ouvert et $Y = X \setminus U$. Supposons que Y soit de codimension q dans X. Notons $\iota : U \to X$ et $\pi : Y \to X$ les injections. On sait qu'on a des morphismes de complexes

$$\iota^* : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(U, K_j^M)$$

et

$$\pi_* : C(Y, K_{j-q}^M) \longrightarrow C(X, K_j^M).$$

Pour tout i, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow C^i(Y, K_{j-q}^M) \xrightarrow{(\pi_*)^i} C^i(X, K_j^M) \xrightarrow{(\iota^*)^i} C^i(U, K_j^M) \longrightarrow 0\ .$$

On en déduit une suite exacte longue en cohomologie :

Théorème 2.3.6. — *Soit $U \subset X$ un ouvert et $Y = X \setminus U$. Supposons que Y soit de codimension (constante) q dans X. On a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow H^{i-j}(C(Y, K_{j-q}^M)) &\xrightarrow{\pi_*} H^i(C(X, K_j^M)) \xrightarrow{\iota^*} H^i(C(U, K_j^M)) \xrightarrow{\partial} \\
\xrightarrow{\partial} H^{i+1}(C(Y, K_{j-q}^M)) &\xrightarrow{\pi_*} H^{i+1}(C(X, K_j^M)) \xrightarrow{\iota^*} H^{i+1}(C(U, K_j^M)) \longrightarrow \\
\ldots \longrightarrow H^{j-q}(C(Y, K_{j-q}^M)) &\xrightarrow{\pi_*} H^j(C(X, K_j^M)) \xrightarrow{\iota^*} H^j(C(U, K_j^M)) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.7. — Pour tout j, cette suite exacte longue se termine en fait par

$$\ldots \longrightarrow H^{j-1}(C(U, K_j^M)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{CH}^{j-q}(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}^j(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^j(U) \longrightarrow 0\ .$$

On peut ainsi mesurer le défaut d'injectivité de l'homomorphisme

$$\mathrm{CH}^{j-q}(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}^j(X).$$

Soit maintenant le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Supposons que f soit propre et g soit plat. Alors f' est propre et g' est plat puisque ces deux propriétés sont stables par changement de base ([**Har77**, corollaire 4.8, p. 102] et [**Har77**, proposition 9.2, p. 254]).

THÉORÈME 2.3.8. — *Dans la situation ci-dessus, on a*

$$g^* f_* = (f')_* (g')^*.$$

Démonstration. — Voir [**Ros96**, proposition 4.1, p. 350]. $\square$

CHAPITRE 3

LE COMPLEXE DE GERSTEN-WITT D'UN SCHÉMA RÉGULIER

3.1. Résumé

Si X est un schéma régulier, on peut définir un complexe de Gersten-Witt

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

noté $C(X, W)$. La construction, due à P. Balmer et C. Walter (voir [**BW02**]), utilise les groupes de Witt de la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{P}(X))$ de la catégorie exacte $\mathcal{P}(X)$ des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres sur X. Les notions de catégorie triangulée et de groupe de Witt d'une catégorie triangulée sont rappelées dans les annexes B et D. Utilisant les propriétés fonctorielles de ces groupes, nous montrons que si

$$f : X \longrightarrow Y$$

est un morphisme plat de dimension relative constante on peut définir un morphisme de complexes

$$f^* : C(Y, W) \longrightarrow C(X, W).$$

Si L est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible, on a également des complexes $C(Y, W, L)$ et $C(X, W, f^*L)$ ainsi qu'un morphisme de complexes

$$f^* : C(Y, W, L) \longrightarrow C(X, W, f^*L).$$

3.2. Le groupe de Witt des complexes de modules localement libres

Soit X un schéma régulier de dimension de Krull n. Notons $\mathcal{P}(X)$ la catégorie exacte des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de type fini sur X, $D(\mathcal{P}(X))$ sa catégorie dérivée et $D^b(\mathcal{P}(X))$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{P}(X))$ des complexes bornés. Les catégories $D(\mathcal{P}(X))$ et $D^b(\mathcal{P}(X))$ sont des catégories triangulées (annexe B). La dualité usuelle

$$^\vee : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

définie par

$$P^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(P, \mathcal{O}_X)$$

induit une dualité dérivée sur $D^b(\mathcal{P}(X))$

$$^\sharp : D^b(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(X)).$$

Explicitement, si

$$P_\bullet : \qquad \dots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d^i} P_{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} P_{i-2} \longrightarrow \dots$$

est un complexe de $D^b(\mathcal{P}(X))$ avec P_i en degré i, alors $P_\bullet^\sharp$ est le complexe

$$P_\bullet^\sharp : \qquad \dots \longrightarrow P_j^\vee \xrightarrow{(d^{j+1})^\vee} P_{j+1}^\vee \xrightarrow{(d^{j+2})^\vee} P_{j+2}^\vee \longrightarrow \dots$$

avec $P_j^\vee$ en degré $-j$. On dispose de plus pour tout $P \in \mathcal{P}(X)$ d'un isomorphisme canonique

$$ev_P : P \longrightarrow (P^\vee)^\vee$$

défini par $ev_P(p)(\varphi) = \varphi(p)$ pour tout $\varphi \in P^\vee$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme $\varpi_P : P_\bullet \to (P_\bullet^\sharp)^\sharp$ pour tout $P_\bullet \in D^b(\mathcal{P}(X))$ donné par

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "ev_{P_i}"'] & P_{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "ev_{P_{i-1}}"'] & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[d, "ev_{P_{i-2}}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & (P_i^\vee)^\vee \arrow[r, "d^i"] & (P_{i-1}^\vee)^\vee \arrow[r, "d^{i-1}"] & (P_{i-2}^\vee)^\vee \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

La catégorie triangulée $D^b(\mathcal{P}(X))$, accompagnée du foncteur contravariant 1-exact (annexe D, définition D.1.1)

$$^\sharp : D^b(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(X))$$

et de l'isomorphisme de foncteurs

$$\varpi : 1 \longrightarrow {}^{\sharp\sharp}$$

est une catégorie triangulée avec dualité (définition D.1.3). Ainsi :

Lemme 3.2.1. — *Soit X un schéma. Alors $(D^b(\mathcal{P}(X)), ^\sharp, 1, \varpi)$ est une catégorie triangulée avec dualité.*

Démonstration. — Voir [**Bal99**, proposition 2.3, p. 5]. □

Cette structure de catégorie triangulée avec dualité permet de définir les groupes de Witt $W^i(D^b(\mathcal{P}(X)))$ (annexe D, définitions D.1.10 et D.1.11) pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On a les théorèmes de fonctorialité suivants.

THÉORÈME 3.2.2. — *Soit X, Y des schémas et $f : Y \to X$ un morphisme. Alors*

$$f^* : D^b(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(Y))$$

induit pour tout i un homomorphisme

$$f^* : W^i(X) \longrightarrow W^i(Y).$$

Démonstration. — Si $P_\bullet \in D^b(\mathcal{P}(X))$ et $P_\bullet^{\sharp(X)}$ est son dual, on a un isomorphisme évident

$$\eta_{P_\bullet} : f^*(P_\bullet^{\sharp(X)}) \longrightarrow (f^* P_\bullet)^{\sharp(Y)}.$$

Le foncteur f^* muni de l'isomorphisme de foncteurs η satisfait la définition d'un foncteur préservant les dualités (annexe D, définition D.1.12) et induit donc les homomorphismes annoncés. □

En particulier, on obtient les corollaires suivants :

COROLLAIRE 3.2.3. — *Soit X un schéma et $x \in X$. Alors*

$$j_x^* : D^b(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})))$$

induit pour tout i un homomorphisme

$$j_x^* : W^i(X) \longrightarrow W^i(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})).$$

COROLLAIRE 3.2.4. — *Soit X un schéma et $i : U \to X$ un ouvert. Alors*

$$i^* : D^b(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(U))$$

induit pour tout i un homomorphisme

$$i^* : W^i(X) \longrightarrow W^i(U).$$

3.3. Le groupe de Witt des modules de longueur finie

Soit A un anneau régulier local de dimension n et M un A-module de longueur finie. Notons $\widehat{M}$ le module $\mathrm{Ext}_A^n(M, A)$. On considère une résolution projective de M

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "ev_{P_n}"'] & \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "ev_{P_1}"'] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "ev_{P_0}"'] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P_n^\vee)^\vee \arrow[r] & \dots \arrow[r] & (P_1^\vee)^\vee \arrow[r] & (P_0^\vee)^\vee \arrow[r, "\pi_0"] & \widehat{\widehat{M}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se referme en un isomorphisme

$$\eta(P) : M \longrightarrow \widehat{\widehat{M}}.$$

DÉFINITION 3.3.1. — *Soit A un anneau régulier local de dimension n. On définit*

$$\varpi(P) : M \longrightarrow \widehat{\widehat{M}}$$

par $\varpi(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \eta(P)$.

THÉORÈME 3.3.2. — *Soient*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{q_0} M \longrightarrow 0$$

des résolutions projectives de M. Alors $\varpi(P) = \varpi(Q)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\eta(P) = \eta(Q)$. Choisissons un morphisme

$$\psi : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n"'] & \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"'] & P_0 \arrow[r, "d_0^P"] \arrow[d, "\psi_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "d_0^Q"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[rr, "d_0^P"] \arrow[dr, "\psi_0"] \arrow[dd, "ev_{P_0}"] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "\eta(P)"] & & 0 & \\
& Q_0 \arrow[rr, "d_0^Q"] \arrow[dd, "ev_{Q_0}"] & & M \arrow[rr] \arrow[dd, "\eta(Q)"] & & 0 \\
(P_0)^{\vee\vee} \arrow[rr, "(d_0^P)^{\vee\vee}"] \arrow[dr, "(\psi_0)^{\vee\vee}"'] & & \widehat{\widehat{M}} \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & 0 & \\
& (Q_0)^{\vee\vee} \arrow[rr, "(d_0^Q)^{\vee\vee}"] & & \widehat{\widehat{M}} \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

dont tous les carrés à part éventuellement celui de droite commutent. Il suffit ensuite de chasser dans le diagramme pour démontrer le résultat. □

DÉFINITION 3.3.3. — *Soit A un anneau régulier local de dimension n et M un module de longueur finie. On définit*

$$\varpi : M \longrightarrow \widehat{\widehat{M}}$$

par $\varpi = \varpi(P)$ pour n'importe quelle résolution projective

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0^P} M \longrightarrow 0$$

de M.

Considérons la catégorie abélienne $\mathcal{M}_{lf}(A)$ des A-modules de longueur finie. Le foncteur contravariant

$$\mathrm{Ext}^n_A(\_, A) : \mathcal{M}_{lf}(A) \longrightarrow \mathcal{M}_{lf}(A)$$

est exact et on a un isomorphisme de foncteur

$$\varpi : 1 \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(\mathrm{Ext}^n_A(\_, A), A).$$

On voit que $(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Ext}^n_A(\_, A), \varpi)$ est une catégorie exacte avec dualité au sens de l'annexe C. On obtient ainsi le groupe de Witt $W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A), \varpi)$ de cette catégorie (annexe C, définition C.1.7).

Définition 3.3.4. — *On définit le groupe de Witt des modules de longueur finie de A comme étant le groupe $W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A), \varpi)$. On le note $W^{lf}(A)$.*

Soit $D^b(M_{lf}(A))$ la catégorie dérivée de $M_{lf}(A)$. Notons aussi $\mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A)$ le foncteur dérivé de $\mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A)$ et ϖ l'isomorphisme canonique dérivé de ϖ. On a alors :

Théorème 3.3.5. — *On a un isomorphisme*

$$W^{lf}(A) \longrightarrow W^0(D^b(M_{lf}(A)), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A), 1, \varpi).$$

Démonstration. — C'est un théorème classique. Voir [**Bal01**, théorème 4.3, p. 17]. □

Identifions maintenant plus précisément le groupe

$$W^0(D^b(M_{lf}(A)), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A), 1, \varpi).$$

Soit $M_{tf}(A)$ la catégorie des A-modules de type fini. Il est connu (voir par exemple [**BW02**, p. 15]) que l'inclusion $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{M}_{tf}(A)$ donne une équivalence de catégories

$$D^b_{lf}(\mathcal{P}(A)) \longrightarrow D^b_{lf}(\mathcal{M}_{tf}(A))$$

où $D^b_{lf}(\mathcal{P}(A))$ désigne la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{P}(A))$ des complexes dont l'homologie est de longueur finie et $D^b_{lf}(\mathcal{M}_{tf}(A))$ son analogue dans $D^b(\mathcal{M}_{tf}(A))$. De plus, l'inclusion $\mathcal{M}_{lf}(A) \to \mathcal{M}_{tf}(A)$ donne une équivalence

$$D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)) \longrightarrow D^b_{lf}(\mathcal{M}_{tf}(A)).$$

Composant les deux équivalences, on obtient une équivalence de catégories

$$D^b_{lf}(\mathcal{P}(A)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)).$$

On voit que la dualité $\sharp$ sur $D^b(\mathcal{P}(A))$ induit une dualité sur $D^b_{lf}(\mathcal{P}(A))$. On vérifie encore que les inclusions ci-dessus préservent les dualités et donc l'équivalence ci-dessus induit un isomorphisme au niveau des groupes de Witt (annexe D, proposition D.1.13). On a donc :

THÉORÈME 3.3.6. — *L'équivalence ci-dessus induit un isomorphisme*

$$W^n(D^b_{lf}(\mathcal{P}(A))) \longrightarrow W^0(D^b(M_{lf}(A)), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, A), 1, \varpi).$$

Démonstration. — Voir [**BW02**, lemme 6.4, p. 15]. □

3.4. Le complexe de Gersten-Witt

DÉFINITION 3.4.1. — *Soit X un schéma régulier et $P_\bullet \in D^b(\mathcal{P}(X))$. On définit le support* $\mathrm{Supp}(H(P_\bullet))$ *de $P_\bullet$ comme étant la réunion des supports des groupes d'homologie $H_i(P_\bullet)$ de $P_\bullet$:*

$$\mathrm{Supp}(H(P_\bullet)) = \cup_i \mathrm{Supp}(H_i(P_\bullet)).$$

DÉFINITION 3.4.2. — *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit*

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} = \{P_\bullet \in D^b(\mathcal{P}(X)) \mid \mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(H(P_\bullet))) \geq p\}.$$

Si $\dim(X) = n$, on a la filtration suivante :

$$0 = D^b(\mathcal{P}(X))^{(n+1)} \subset D^b(\mathcal{P}(X))^{(n)} \subset \cdots \subset D^b(\mathcal{P}(X))^{(0)} = D^b(\mathcal{P}(X)).$$

Pour tout i, $D^b(\mathcal{P}(X))^{(i)}$ est une sous-catégorie épaisse de $D^b(\mathcal{P}(X))$ (définition D.2.1) et on obtient des suites exactes de catégories triangulées (définition D.2.3) :

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \xrightarrow{\ i\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} \xrightarrow{\ q\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}.$$

La dualité sur $D^b(\mathcal{P}(X))$ induit des dualités sur $D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}$ pour tout p et la suite ci-dessus est une suite exacte de catégories triangulées avec dualités (définition D.2.7) :

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \xrightarrow{\ i\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} \xrightarrow{\ q\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}.$$

En particulier, on a des homomorphismes pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$q : W^p(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}) \longrightarrow W^p(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}).$$

Soit $D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x}))$ la catégorie triangulée des complexes bornés de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules localement libres (cohérents) dont l'homologie est de longueur finie. La dualité sur $D^b(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x}))$ induit une dualité sur $D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x}))$. On a :

PROPOSITION 3.4.3. — *La localisation induit une équivalence de catégories triangulées avec dualités*

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \simeq \coprod_{x \in X^{(p)}} D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x})).$$

Démonstration. — Voir [**BW02**, proposition 7.1, p. 18]. □

Corollaire 3.4.4. — *On a pour tout $j \in \mathbb{N}$ des isomorphismes*

$$W^j(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^j(D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x}))).$$

Rappelons qu'on dispose pour tout $j \in \mathbb{N}$ d'un homomorphisme

$$\partial : W^j(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}) \longrightarrow W^{j+1}(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)})$$

défini de la manière suivante :

Soit $(P_\bullet, \phi) \in (D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}, T^j\circ^\sharp, (-1)^j, (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\varpi)$ une paire symétrique. Alors il existe un objet $Q_\bullet$ dans $D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}$ et un morphisme symétrique dans la catégorie triangulée avec dualité $(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}, T^j\circ^\sharp, (-1)^j, (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\varpi)$

$$\eta : Q_\bullet \longrightarrow T^jQ^\sharp$$

tels que la localisation de $(Q_\bullet, \eta)$ soit isométrique à $(P_\bullet, \phi)$ (lemme D.2.8). Cela signifie en particulier que le cône R de η est dans $D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}$. Il existe un isomorphisme symétrique (voir annexe D)

$$\psi : R \longrightarrow T^{j+1}R^\sharp$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(-1)^j\varpi_{P_\bullet}"'] & T^jP_\bullet^\sharp \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & TP_\bullet \arrow[d, "(-1)^jT\varpi_{P_\bullet}"] \\
P_\bullet^{\sharp\sharp} \arrow[r, "T^j\phi^\sharp"'] & T^jP_\bullet^\sharp \arrow[r, "T^{j+1}\beta^\sharp"'] & T^{j+1}R^\sharp \arrow[r, "(-1)^{j+1}T^{j+1}\alpha^\sharp"'] & TP_\bullet^{\sharp\sharp}.
\end{tikzcd}$$

La paire symétrique (R, ψ) est unique à isométrie près (lemme D.2.9). On pose $\partial(P, \phi) = (R, \psi)$. *A priori*, $\partial(P, \phi)$ dépend du choix du morphisme symétrique $\eta : Q_\bullet \to T^jQ^\sharp$, mais on peut démontrer que ce n'est pas le cas ([**Bal00**, théorème 4.8, p. 30]).

On tire ainsi des suites exactes de catégories triangulées avec dualités

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \xrightarrow{\ i\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} \xrightarrow{\ q\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}$$

et

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+2)} \xrightarrow{\ i\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \xrightarrow{\ q\ } D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+2)}$$

un homomorphisme

$$d : W^p(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}) \longrightarrow W^{p+1}(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+2)})$$

défini par $d = q \circ \partial$.

On obtient finalement à l'aide de la filtration

$$0 = D^b(\mathcal{P}(X))^{(n+1)} \subset D^b(\mathcal{P}(X))^{(n)} \subset \cdots \subset D^b(\mathcal{P}(X))^{(0)} = D^b(\mathcal{P}(X))$$

et de la proposition 3.4.3 un complexe ([**BW02**, théorème 7.2, p. 18]) :

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x}))) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,y}))) \longrightarrow \cdots$$

Utilisant les théorèmes 3.3.5 et 3.3.6 on trouve un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

DÉFINITION 3.4.5. — *Soit X un schéma régulier de dimension finie. Le complexe*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

est appelé complexe de Gersten-Witt du schéma X. On le note $C(X,W)$.

Examinons le comportement de $C(X,W)$ relativement aux morphismes plats. Montrons tout d'abord un lemme utile :

LEMME 3.4.6. — *Soient X, Y des schémas de dimension finie et $f : Y \to X$ un morphisme plat de dimension relative q. Soit M un $\mathcal{O}_X$-module cohérent tel que* $\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(M)) \geq p$. *Alors* $\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(f^*(M))) \geq p$.

Démonstration. — La question est locale. On suppose donc que $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ où B est une A-algèbre plate de type fini. Comme M est de type fini sur A, il existe une filtration de M

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

dont les quotients successifs sont de la forme $M_i/M_{i-1} \simeq A/x_i$ pour des x_i dans $\mathrm{Spec}(A)$. La clôture des premiers x_i apparaissant dans cette filtration donne le support de M. Par hypothèse, les premiers minimaux x_i de cette liste satisfont la condition $\mathrm{codim}(A/x_i) \geq p$. Tensorisant cette filtration par B, on obtient

$$0 = M_0 \otimes B \subset M_1 \otimes B \subset \cdots \subset M_{n-1} \otimes B \subset M_n \otimes B = M \otimes B.$$

Les quotients successifs de cette filtration sont de la forme

$$(M_i \otimes B)/(M_{i-1} \otimes B) \simeq A/x_i \otimes B$$

puisque B est plate sur A. Les premiers du support de $M\otimes B$ sont ceux qui contiennent $x_i \otimes B$. Or les premiers minimaux y_i au dessus de x_i satisfont $\mathrm{codim}(y_i) = \mathrm{codim}(x_i)$ puisque B est plate sur A ([**Har77**, proposition 9.5, p. 256]). Cela conclut la preuve. □

THÉORÈME 3.4.7. — *Soient X et Y deux schémas réguliers et $f : Y \to X$ un morphisme plat. Alors*

$$f^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

induit un morphisme de complexes

$$f^* : C(X, W) \longrightarrow C(Y, W).$$

Démonstration. — Par le lemme précédent, on sait que f^* induit pour tout p des morphismes

$$D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} \xrightarrow{f^*} D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)} .$$

Il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)} \end{array}$$

commute. Alors f^* induit un foncteur

$$f^* : D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \longrightarrow D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)}$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)} & \longrightarrow & D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)} \end{array}$$

commute. On obtient ainsi pour tout p un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W^p(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}) & \longrightarrow & W^{p+1}(D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+2)}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ W^p(D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)}) & \longrightarrow & W^{p+1}(D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)}/D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+2)}). \end{array}$$

La proposition D.2.12 montre que f^* induit un morphisme de complexes

$$f^* : C(X, W) \longrightarrow C(Y, W). \quad \square$$

Remarque 3.4.8. — Soit $x \in X^{(p)}$ et $y \in Y^{(p)}$ un point générique de la fibre de x dans Y. Alors f^* induit un foncteur

$$(f^*)^y_x : D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x})) \longrightarrow D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{Y,y})).$$

De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{P}(X))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(X))^{(p+1)} \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & \coprod_{x\in X^{(p)}} D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{X,x})) \arrow[d, "\coprod \sum_{x|y}(f^*)^y_x"] \\ D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p)}/D^b(\mathcal{P}(Y))^{(p+1)} \arrow[r] & \coprod_{y\in Y^{(p)}} D^b_{lf}(\mathcal{P}(\mathcal{O}_{Y,y})). \end{tikzcd}$$

Cela montre que le morphisme de complexes f^* commute avec les localisations.

Proposition 3.4.9. — *Soit X, Y et Z trois schémas réguliers. Soit $f : Y \to X$ et $g : Z \to Y$ des morphismes plats. Alors les morphismes de complexes $(fg)^*$ et g^*f^* sont égaux.*

Démonstration. — C'est un exercice facile. □

Supposons maintenant que L soit un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_\,, L)$ donne une dualité sur $D^b(\mathcal{P}(X))$. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour un anneau régulier local, on voit en répétant la même construction que ci-dessus qu'il existe pour tout $M \in \mathcal{M}_{lf}(A)$ un isomorphisme (indépendant de la résolution projective de M)

$$\varpi_L : M \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(\mathrm{Ext}^n_A(M, L), L).$$

Définition 3.4.10. — *On appelle groupe de Witt des modules de longueur finie à valeurs dans L le groupe $W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Ext}^n_A(\_\,, L), \varpi_L)$. On le note $W^{lf}(A, L)$.*

En utilisant la même procédure que ci-dessus, on peut construire un complexe

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}, L_x) \xrightarrow{d^p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}, L_y) \longrightarrow \dots.$$

Définition 3.4.11. — *Soit X un schéma régulier de dimension finie et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On note $C(X, W, L)$ le complexe*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}, L_x) \xrightarrow{d^p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}, L_y) \longrightarrow \dots.$$

Remarque 3.4.12. — Les groupes apparaissant dans les complexes $C(X, W)$ et $C(X, W, L)$ sont isomorphes (non canoniquement).

Le résultat suivant est évident au vu du théorème 3.4.7.

Théorème 3.4.13. — *Soit X, Y deux schémas réguliers de dimension finie, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $f : Y \to X$ un morphisme plat. Alors f induit un morphisme de complexes*

$$f^* : C(X, W, L) \longrightarrow C(Y, W, f^*L).$$

3.5. Un calcul des différentielles du complexe

Soit $x \in X^{(p)}$ et $y \in X^{(p+1)}$. Nous allons calculer la composante

$$d_x^y : W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y})$$

de la différentielle d du complexe $C(X,W)$. On a un morphisme plat de schémas

$$j_y : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow X.$$

Ce morphisme induit un morphisme de complexes

$$j_y^* : C(X,W) \longrightarrow C(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}), W).$$

Ainsi $d_x^y = 0$ si $y \notin \overline{\{x\}}$. On peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$ et x est un idéal de hauteur p de $\mathcal{O}_{X,y}$. Posons $A = \mathcal{O}_{X,y}$ et $\omega_x = \mathrm{Ext}_A^p(A/x, A)$. Alors on a un isomorphisme canonique $\tilde{\varpi} : A/x \to \mathrm{Ext}_A^p(\omega_x, A)$. Un couple symétrique $(M,\phi) \in W^{lf}(A_x)$ est Witt-équivalent à un isomorphisme diagonal (proposition E.2.1)

$$\psi : k(x)^r \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{A_x}(k(x), A_x)^r.$$

Pour calculer d_x^y, il suffit donc de calculer l'image d'un isomorphisme

$$\mu : k(x) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{A_x}(k(x), A_x)$$

par d_x^y. Multipliant éventuellement μ par un carré, on peut supposer que $\mu(1) \in \omega_x$. On a donc un morphisme symétrique

$$f : A/x \longrightarrow \omega_x$$

dont la localisation en x est μ. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A/x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(-1)^{p(p-1)/2}\tilde{\varpi}"'] & \omega_x \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^p(\omega_x, A) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_A^p(f,A)"'] & \omega_x \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^{p+1}(N, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où N est un A-module de longueur finie et η est un isomorphisme symétrique.

PROPOSITION 3.5.1. — *La différentielle*

$$d_x^y : W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y})$$

du complexe $C(X,W)$ est donné par $d_x^y(k(x),\mu) = (N,\eta)$ si $y \in \overline{\{x\}}$ et $d_x^y(k(x),\mu) = 0$ sinon.

Démonstration. — Voir [**BW02**, proposition 8.5, p. 23]. □

CHAPITRE 4

LE COMPLEXE DE GERSTEN-WITT D'UN SCHÉMA DE GORENSTEIN

4.1. Résumé

Le but des prochains chapitres est de définir pour tout morphisme propre

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}).$$

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler la définition des groupes de Witt de modules cohérents d'un schéma de Gorenstein due à S. Gille (voir [**Gil02**]). Cette définition dépend d'une résolution injective finie de $\mathcal{O}_X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0.$$

Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau de Gorenstein local, une telle résolution injective permet de munir la catégorie $\mathcal{M}_{lf}(A)$ des modules de longueur finie sur A d'une structure de catégorie abélienne avec dualité (voir l'annexe C). Nous vérifions ensuite que deux résolutions injectives différentes de A donnent la même structure sur $\mathcal{M}_{lf}(A)$. Utilisant les mêmes techniques que dans le chapitre précédent, nous obtenons pour tout schéma de Gorenstein X un complexe de Gersten-Witt $C(X, \tilde{W})$

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_p} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

indépendant de la résolution de $\mathcal{O}_X$ choisie. Lorsque X est régulier, nous montrons que le complexe

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_p} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

coïncide avec le complexe

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_p} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

obtenu au chapitre précédent.

4.2. Les groupes de Witt des modules cohérents

Soit X un schéma, $\mathcal{M}(X)$ la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents et $D(\mathcal{M}(X))$ la catégorie dérivée de cette catégorie abélienne. La catégorie $D(\mathcal{M}(X))$ possède une structure de catégorie triangulée (annexe B, théorème B.2.3) et il en est de même pour la sous-catégorie des complexes bornés de modules quasi-cohérents (annexe B, remarque B.2.4). Considérons la sous-catégorie $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ de $D^b(\mathcal{M}(X))$ des complexes dont l'homologie est cohérente. On voit que la structure de catégorie triangulée de $D^b(\mathcal{M}(X))$ induit une structure de catégorie triangulée sur $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ (voir par exemple la définition D.2.1 et la remarque D.2.2).

Soit

$$I_\bullet : \qquad \dots \longrightarrow I_r \xrightarrow{d^I_r} I_{r-1} \longrightarrow \dots$$

un complexe borné de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents injectifs dont l'homologie est cohérente. Notons

$$\chi^I : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$$

le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_\,, I_\bullet)$. Pour un complexe $M_\bullet \in D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$

$$M_\bullet : \qquad \dots \longrightarrow M_r \xrightarrow{d^M_r} M_{r-1} \longrightarrow \dots,$$

on a

$$\chi^I(M_\bullet)_s = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_{-s-r}, I_{-r}),$$

et les bords sont donnés par $f \mapsto f d^M + (-1)^{s+1} d^I f$. Il y a un homomorphisme naturel de foncteurs

$$\varpi^I : id_{D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))} \longrightarrow \chi^I \chi^I$$

qui est donné par la formule

$$M_l \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\Big(\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_{l+s-r}, I_{-r}), I_{-s} \Big)$$

$$m \longmapsto \begin{cases} (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} ev_I(m) & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r \neq s \end{cases}$$

où $ev_I(m)$ est l'évaluation en m.

DÉFINITION 4.2.1. — *Soit X un schéma et $I_\bullet \in D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents injectifs. On dit que $I_\bullet$ est un complexe dualisant si ϖ^I est un isomorphisme.*

DÉFINITION 4.2.2. — *Soient X un schéma. On dit que X est un schéma de Gorenstein si $\mathcal{O}_X$ possède une résolution finie par un complexe $I_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents injectifs*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0.$$

On dit que $I_\bullet$ est une résolution injective finie de $\mathcal{O}_X$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2.3. — *Soit X un schéma de Gorenstein et $I_\bullet$ une résolution injective finie de $\mathcal{O}_X$. Alors $I_\bullet$ est un complexe dualisant.*

Démonstration. — Voir [**Gil02**, théorème 2.6.4, p. 23]. □

On obtient ainsi une catégorie triangulée $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$, une dualité exacte χ^I et un isomorphisme naturel ϖ^I. Ces données munissent $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ d'une structure de catégorie triangulée avec dualité au sens de la définition D.1.3 :

COROLLAIRE 4.2.4. — *Soit X un schéma et $I_\bullet$ un complexe dualisant. Alors*

$$(D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)), \chi^I, 1, \varpi^I)$$

est une catégorie triangulée avec dualité.

Démonstration. — Voir [**Gil02**, théorème 2.6.4, p. 23]. □

On peut donc définir les groupes de Witt de la catégorie triangulée avec dualité $(D^b_{tf}(\mathcal{M}_X), \chi^I, 1, \varpi^I)$ (annexe D, définition D.1.10) :

DÉFINITION 4.2.5. — *Soit X un schéma avec complexe dualisant $I_\bullet$. Le i-ème groupe de Witt cohérent de X (dépendant de $I_\bullet$) est défini par*

$$\tilde{W}^i(X, I_\bullet) = W^i(D^b_{tf}(\mathcal{M}_X), \chi^I, 1, \varpi^I).$$

REMARQUE 4.2.6. — Les groupes $\tilde{W}^i(X, I_\bullet)$ dépendent de la résolution injective finie $I_\bullet$ choisie. Si $J_\bullet$ est une autre résolution injective finie, on a un isomorphisme (dans la catégorie dérivée) $\eta : I_\bullet \to J_\bullet$ qui induit des isomorphismes $\tilde{W}^i(X, I_\bullet) \to \tilde{W}^i(X, J_\bullet)$.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Si I est un $\mathcal{O}_Y$-module injectif, alors f^*I n'est pas forcément un $\mathcal{O}_X$-module injectif même lorsque f est plat. On ne peut donc pas définir directement un homomorphisme

$$f^* : \tilde{W}^i(Y, I_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^i(X, f^*I_\bullet).$$

Dans ce qui suit, nous n'aurons néanmoins pas besoin d'un tel homomorphisme dans le cas général, mais seulement dans deux cas particuliers où $f^*I_\bullet$ est encore un complexe de modules injectifs.

THÉORÈME 4.2.7. — *Soit X un schéma et $I_\bullet$ un complexe dualisant. Supposons que $i : U \to X$ soit un ouvert de X. Alors*

$$i^* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(U)$$

induit un homomorphisme

$$i^* : \tilde{W}^i(X, I_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^i(U, I_{\bullet|U}).$$

Démonstration. — Pour tout $M \in D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$, on a un isomorphisme

$$\eta_M : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, I_\bullet)_{|U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(M_{|U}, I_{\bullet|U}).$$

De plus, $I_{\bullet|U}$ est une résolution injective de $\mathcal{O}_U$. On vérifie ensuite que le couple (i^*, η) préserve la dualité au sens de la définition D.1.12. Ce couple induit donc les homomorphismes annoncés. □

THÉORÈME 4.2.8. — *Soit X un schéma, $x \in X$ et $I_\bullet$ un complexe dualisant. Alors*

$$j_x^* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

induit un homomorphisme

$$j_x^* : \tilde{W}^i(X, I_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^i(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), (I_\bullet)_x).$$

Démonstration. — C'est la même que la démonstration du théorème précédent. □

4.3. Le groupe de Witt cohérent d'un anneau de Gorenstein local

Soit A un anneau de Gorenstein local de dimension n. Comme d'habitude, notons $\widehat{M}$ le module $\mathrm{Ext}^n_A(M, A)$ pour tout A-module M de longueur finie.

DÉFINITION 4.3.1. — *Soit A un anneau noethérien et M un A-module.*

1°) *Un module N tel que $M \subset N$ est appelé une extension essentielle de M si pour tout sous-module $U \subset N$ on a $U \cap M \neq 0$ ou $U = 0$.*

2°) *Un module injectif I tel que $M \subset I$ est une extension essentielle est appelé enveloppe injective de M.*

3°) *Une résolution injective $I_\bullet$ de M*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I_0 \xrightarrow{d_0} I_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} I_{-2} \longrightarrow \dots$$

est appelée minimale si I_0 est une enveloppe injective de M, I_{-1} est une enveloppe injective de $\mathrm{Coker}(i)$ *et I_{-r} est une enveloppe injective de* $\mathrm{Coker}(d_{-r+1})$ *pour tout $r \geq 1$.*

Théorème 4.3.2. — *Soit A un anneau de Gorenstein et $I_\bullet$ une résolution injective minimale de A. Si $x \in \operatorname{Spec}(A)$, on note $E(x)$ une enveloppe injective de A/x. Alors*

$$I_{-r} \simeq \bigoplus_{x \in \operatorname{Spec}(A)^{(r)}} E(x).$$

Démonstration. — Voir [**BH93**, théorème 3.2.6]. □

Lemme 4.3.3. — *Soit A un anneau de Gorenstein local de dimension n et*

$$I_\bullet : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{d_0} I_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} I_{-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution minimale de A. Posons $I = I_{-n}$. Alors

1°) *Si M est de longueur finie, alors $\operatorname{Hom}_A(M, I)$ est de longueur finie.*
2°) *L'homomorphisme naturel $ev_I : M \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, I), I)$ est un isomorphisme pour tout A-module M de longueur finie.*
3°) *Pour tout $0 \leq j \leq n-1$ et tout $M \in \mathcal{M}_{lf}(A)$ on a l'égalité $\operatorname{Hom}_A(M, I_{-j}) = 0$. Donc $\widehat{M} \simeq \operatorname{Hom}_A(M, I)$.*

Démonstration. — Pour les preuves, voir [**Gil02**, lemme 3.1.3, p. 30]. Remarquons juste une chose en ce qui concerne l'isomorphisme $\widehat{M} \simeq \operatorname{Hom}_A(M, I)$ de 3°). Si

$$j_0 : A \longrightarrow J_\bullet$$

est une résolution injective de A, alors on a un isomorphisme

$$\varphi(j_0, J_\bullet) : H_n(\operatorname{Hom}_A(M, J_\bullet)) \longrightarrow \widehat{M}$$

dépendant uniquement de j_0 et J. Dans le cas de la résolution $I_\bullet$ ci-dessus, on a $H_n(\operatorname{Hom}_A(M, I_\bullet)) = \operatorname{Hom}_A(M, I)$. On a ainsi un isomorphisme

$$\varphi(i_0, I_\bullet) : \operatorname{Hom}_A(M, I) \longrightarrow \widehat{M}. \quad \square$$

Le lemme ci-dessus montre que le foncteur $\operatorname{Hom}_A(\_\,, I)$ et l'homomorphisme naturel $ev_I : M \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, I), I)$ dotent la catégorie abélienne $\mathcal{M}_{lf}(A)$ d'une dualité (voir annexe C).

Définition 4.3.4. — *On définit $\tilde{\varpi}(I) : M \to \widehat{\widehat{M}}$ à l'aide du diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "ev_I", "\simeq"'] \arrow[d, "\tilde{\varpi}(I)"', "\simeq"] & \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, I), I) \arrow[d, "\varphi_{\operatorname{Hom}_A(M,I)}", "\simeq"'] \\ \widehat{\widehat{M}} \arrow[r, "\simeq", "\operatorname{Ext}^n_A(\varphi, A)"'] & \widehat{\operatorname{Hom}_A(M, I)} \end{tikzcd}$$

Remarque 4.3.5. — Le foncteur $\operatorname{Ext}^n_A(\_\,, A)$ et $\tilde{\varpi}(I)$ munissent $\mathcal{M}_{lf}(A)$ d'une structure de catégorie abélienne avec dualité. Par définition, l'isomorphisme de foncteurs

$$\varphi(i_0, I) : \operatorname{Hom}_A(\_\,, I) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(\_\,, A)$$

donne un isomorphisme

$$W(\mathcal{M}_{lf}(A), \operatorname{Hom}_A(\_\,, I), ev_I) \longrightarrow W(\mathcal{M}_{lf}(A), \operatorname{Ext}^n_A(\_\,, A), \tilde{\varpi}(I)).$$

THÉORÈME 4.3.6. — *Soient $i_0 : A \to I_\bullet$ et $j_0 : A \to J_\bullet$ deux résolutions injectives minimales d'un anneau de Gorenstein A. Notons $I = I_{-n}$ et $J = J_{-n}$. Alors on a $\tilde{\varpi}(I) = \tilde{\varpi}(J)$.*

Démonstration. — Rappelons tout d'abord les définitions de $\varphi(i_0, I)$ et $\varphi(j_0, J)$ (voir aussi [**Bou80**, paragraphe 5, p. 81]). Soit

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{e} E_0 \longrightarrow E_{-1} \longrightarrow \dots$$

la résolution injective canonique de A (voir [**Bou80**, p. 52]). On a un morphisme de complexe $\psi : I_\bullet \to E_\bullet$ et un isomorphisme $\phi : J_\bullet \to I_\bullet$. Les morphismes $\psi : I_\bullet \to E_\bullet$ et $\psi\phi : J_\bullet \to E_\bullet$ induisent pour tout $M \in \mathcal{M}_{tf}(A)$ des morphismes

$$\alpha_M : \operatorname{Hom}_A(M, I_\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, E_\bullet)$$

et

$$\beta_M : \operatorname{Hom}_A(M, J_\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, E_\bullet)$$

donnés par $\alpha_M(\eta) = \psi\eta$ et $\beta_M(\mu) = \psi\phi\mu$. Par définition $\varphi(i_0, I) = H_{-n}(\alpha)$ et $\varphi(j_0, J) = H_{-n}(\beta)$. Notons $\overline{\alpha}_M$ l'isomorphisme $H_{-n}(\alpha_M)$ et $\overline{\beta}_M$ l'isomorphisme $H_{-n}(\beta_M)$. Il est clair que $\phi_{-n} : J \to I$ induit un isomorphisme

$$\gamma_M : \operatorname{Hom}_A(M, J) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, I).$$

et que $\gamma_M = (\overline{\alpha}_M)^{-1}\overline{\beta}_M$. Pour simplifier l'écriture dans ce qui suit, on va noter $M^\sharp$ le module $\operatorname{Hom}_A(M, I)$ et $M^\vee$ le module $\operatorname{Hom}_A(M, J)$. On a ainsi

$$\gamma_M : M^\vee \longrightarrow M^\sharp.$$

On vérifie facilement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "ev_I"] \arrow[d, "ev_J"'] & (M^\sharp)^\sharp \arrow[d, "(\gamma_M)^\sharp"] \\ (M^\vee)^\vee \arrow[r, "\gamma_{(M^\vee)}"'] & (M^\vee)^\sharp. \end{tikzcd}$$

Ainsi $ev_I = (\gamma_M^{-1})^\sharp \circ \gamma_{M^\vee} \circ ev_J$. Par définition, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{\varpi}(I)"] \arrow[d, "ev_I"'] & \widehat{\widehat{M}} \arrow[d, "\widehat{\overline{\alpha}_M}"] \\ (M^\sharp)^\sharp \arrow[r, "\overline{\alpha}_{M^\sharp}"'] & \widehat{(M^\sharp)} \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{\varpi}(J)"] \arrow[d, "ev_J"'] & \widehat{\widehat{M}} \arrow[d, "\widehat{\overline{\beta}_M}"] \\ (M^\vee)^\vee \arrow[r, "\overline{\beta}_{M^\vee}"'] & \widehat{(M^\vee)}. \end{tikzcd}$$

On en tire facilement que $\widehat{\overline{\alpha}_M}\overline{\alpha}_{\widehat{M}} = \overline{\alpha}_{M^\sharp}(\overline{\alpha}_M)^\sharp$ et $\widehat{\overline{\beta}_M}\overline{\beta}_{\widehat{M}} = \overline{\beta}_{M^\vee}(\overline{\beta}_M)^\vee$. Calculons :

$$\tilde{\varpi}(I) = (\widehat{\overline{\alpha}_M})^{-1}\overline{\alpha}_{M^\sharp}ev_I = (\widehat{\overline{\alpha}_M})^{-1}\overline{\alpha}_{M^\sharp}(\gamma_M^{-1})^\sharp\gamma_{M^\vee}ev_J.$$

Or $\gamma_M^{-1} = ((\overline{\alpha}_M)^{-1}\overline{\beta}_M)^{-1} = (\overline{\beta}_M)^{-1}\overline{\alpha}_M$ et ainsi

$$(\widehat{\overline{\alpha}_M})^{-1}\overline{\alpha}_{M^\sharp}(\gamma_M^{-1})^\sharp\gamma_{M^\vee}ev_J = (\widehat{\overline{\alpha}_M})^{-1}\overline{\alpha}_{M^\sharp}(\overline{\alpha}_M)^\sharp(\overline{\beta}_M^{-1})^\sharp\gamma_{M^\vee}ev_J.$$

Comme $\widehat{\overline{\alpha}_M}\overline{\alpha}_{\widehat{M}} = \overline{\alpha}_{M^\sharp}(\overline{\alpha}_M)^\sharp$, on en déduit que $\tilde{\varpi}(I) = \overline{\alpha}_{\widehat{M}}(\overline{\beta}_M^{-1})^\sharp\gamma_{M^\vee}ev_J$. Par ailleurs, $\gamma_{M^\vee} = (\overline{\alpha}_{M^\vee})^{-1}\overline{\beta}_{M^\vee}$. Donc

$$\tilde{\varpi}(I) = \overline{\alpha}_{\widehat{M}}(\overline{\beta}_M^{-1})^\sharp(\overline{\alpha}_{M^\vee})^{-1}\overline{\beta}_{M^\vee}ev_J.$$

Par définition, $\tilde{\varpi}(J) = (\widehat{\overline{\beta}_M})^{-1}\overline{\beta}_{M^\vee}ev_J$. Il suffit donc de vérifier que

$$\overline{\alpha}_{\widehat{M}}(\overline{\beta}_M^{-1})^\sharp(\overline{\alpha}_{M^\vee})^{-1} = (\widehat{\overline{\beta}_M})^{-1}$$

pour prouver que $\tilde{\varpi}(I) = \tilde{\varpi}(J)$. Montrons donc que $\widehat{\overline{\beta}_M}\overline{\alpha}_{\widehat{M}} = \overline{\alpha}_{M^\vee}(\overline{\beta}_M)^\sharp$. Soit η dans $(\widehat{M})^\sharp$. On a $(\overline{\beta}_M)^\sharp(\eta) = \eta\circ\overline{\beta}_M$ et $\overline{\alpha}_{M^\vee}(\eta\circ\overline{\beta}_M) = \psi\circ\eta\circ\overline{\beta}_M$. D'un autre côté, on a $\overline{\alpha}_{\widehat{M}}(\eta) = \psi\circ\eta$ et $\widehat{\overline{\beta}_M}(\psi\circ\eta) = \psi\circ\eta\circ\overline{\beta}_M$. Cela conclut la preuve. □

Définition 4.3.7. — *Soit A un anneau de Gorenstein local de dimension n. On définit*

$$\tilde{\varpi} : Id \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(\mathrm{Ext}^n_A(\_\ , A), A)$$

par $\tilde{\varpi} = \tilde{\varpi}(I)$ pour n'importe quelle résolution injective minimale $I_\bullet$ de A.

Définition 4.3.8. — *On définit le groupe de Witt des modules de longueur finie de A comme étant le groupe $W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Ext}^n_A(\_\ , A), \tilde{\varpi})$. On le note $\tilde{W}^{lf}(A)$.*

Remarque 4.3.9. — On démontrera plus tard (voir le théorème 4.4.8) que si A est régulier local de dimension n alors $\tilde{W}^{lf}(A) = W^{lf}(A)$.

Remarque 4.3.10. — Supposons que $I_\bullet$ soit une résolution injective minimale d'un anneau de Gorenstein local de dimension n. Si x est l'idéal maximal de A, on sait que $I = I_{-n}$ est une enveloppe injective de A/x. Le choix d'un homomorphisme $i : A/x \to I$ donne un isomorphisme $W(A/x) \simeq \tilde{W}^{lf}(A)$.

Revenons-en aux groupes de Witt des modules de longueur finie. Soit donc A un anneau de Gorenstein local de dimension n et

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_0} I_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de A. Comme ci-dessus, notons $I = I_{-n}$. On a vu que $\mathrm{Hom}_A(\_\,, I)$ et ev_I munissaient $\mathcal{M}_{lf}(A)$ d'une structure de catégorie abélienne avec dualité (Lemme 4.3.3) et qu'on avait un isomorphisme (Remarque 4.3.5)

$$W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Hom}_A(\_\,, I), ev_I) \longrightarrow \tilde{W}^{lf}(A).$$

Considérons maintenant la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M}_{lf}(A))$ de $\mathcal{M}_{lf}(A)$, le foncteur dérivé χ^I_{lf} de $\mathrm{Hom}_A(\_\,, I)$ et l'isomorphisme dérivé $\tilde{\varpi}^I_{lf}$ de ev_I. On obtient ainsi une catégorie triangulée avec dualité $D^b(\mathcal{M}_{lf}(A), \chi^I_{lf}, 1, \tilde{\varpi}^I_{lf})$.

Théorème 4.3.11. — *On a un isomorphisme*

$$W(\mathcal{M}_{lf}(A), \mathrm{Hom}_A(\_\,, I), ev_I) \longrightarrow W^0(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I_{lf}, 1, \tilde{\varpi}^I_{lf}).$$

Démonstration. — Ce résultat est encore un avatar de [**Bal01**, théorème 4.3, p. 17]. □

Le fait que I se trouve en degré $-n$ se lit dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.12. — *Le foncteur identité $Id_{\mathcal{M}_{lf}(A)}$ induit pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un isomorphisme*

$$W^{i-n}(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I_{lf}, 1, \tilde{\varpi}^I_{lf}) \longrightarrow W^i(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I, 1, \varpi^I).$$

En particulier, on a un isomorphisme

$$W^0(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I_{lf}, 1, \tilde{\varpi}^I_{lf}) \longrightarrow W^n(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I, 1, \varpi^I).$$

Démonstration. — Voir [**Gil02**, théorème 3.2.5, p. 35]. □

Corollaire 4.3.13. — *Soit A un anneau de Gorenstein local de dimension n. Alors on a un isomorphisme*

$$\tilde{W}^{lf}(A) \longrightarrow W^n(D^b(\mathcal{M}_{lf}(A)), \chi^I, 1, \varpi^I)$$

pour toute résolution injective minimale $I_\bullet$ de A.

4.4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein

Soit X un schéma de Gorenstein et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow I_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_X$ (pour l'existence d'une telle résolution, voir [**Har66**, chapitre II, paragraphe 7, p. 120]). On voit directement que pour tout point $x \in X$ la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow (I_0)_x \longrightarrow \ldots \longrightarrow (I_{-n})_x \longrightarrow 0$$

est également une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_{X,x}$ (en particulier $(I_{-m})_x = 0$ si $m > \operatorname{codim}(x, X)$). Pour tout $p \geq 0$, on définit

$$D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p)} = \{K_\bullet \in D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)) | \operatorname{codim}(\operatorname{Supp}(H(K_\bullet))) \geq p\}.$$

Il est clair que la dualité χ^I sur $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ induit une dualité sur $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p)}$. La localisation de $I_\bullet$ en $x \in X^{(p)}$ donne une dualité $\chi^{(I_x)}$ sur $D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))$. Le théorème 4.2.8 montre que le foncteur

$$\gamma_p : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p)} \longrightarrow \coprod_{x \in X^{(p)}} D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

donné par $\gamma_p(K_\bullet) = \sum (K_\bullet)_x$ préserve les dualités. Ainsi les foncteurs ci-dessous

$$D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p+1)} \xrightarrow{\ i\ } D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p)} \xrightarrow{\ \gamma_p\ } \textstyle\coprod_{x \in X^{(p)}} D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

préservent les dualités et on obtient une suite exacte de catégories triangulées avec dualités (définition D.2.7). Répétant la construction du chapitre précédent (voir la définition 3.4.5), on construit un complexe

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))) \xrightarrow{d^I_p} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))) \longrightarrow \ldots$$

L'inclusion naturelle

$$\iota : D^b(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_{X,y})) \longrightarrow D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))$$

étant une équivalence, on obtient en utilisant les théorèmes 4.3.11 et 4.3.12 un complexe

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d^I_p} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \ldots$$

Remarque 4.4.1. — La différentielle d^I de ce complexe dépend à première vue de la résolution injective minimale $I_\bullet$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le prochain théorème est destiné à prouver qu'il n'en est rien.

Théorème 4.4.2. — *Soient*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow I_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow J_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow J_{-n} \longrightarrow 0$$

deux résolutions injectives minimales de $\mathcal{O}_X$. On dispose de deux complexes construits à l'aide de $I_\bullet$ et $J_\bullet$:

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_p^I} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_p^J} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

Alors $d^I = d^J$.

Démonstration. — Les résolutions $I_\bullet$ et $J_\bullet$ étant injectives minimales, il existe un isomorphisme $\phi : J_\bullet \to I_\bullet$. Cet isomorphisme donne un isomorphisme de foncteurs $\gamma : \chi^J \to \chi^I$. On en déduit un isomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))) \arrow[r, "d_p^J"] \arrow[d, "\sum \gamma_x"'] & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))) \longrightarrow \cdots \arrow[d, "\sum \gamma_y"] \\
\longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))) \arrow[r, "d_p^I"] & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))) \longrightarrow \cdots
\end{tikzcd}$$

Si $x \in X^{(p)}$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
W(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(_\,, J_x), \varpi^{J_x}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma_x"'] & W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \\
W(\mathcal{M}_{lf}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(_\,, I_x), \varpi^{I_x}). \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

On termine en utilisant les théorèmes 4.3.11 et 4.3.12. □

Remarque 4.4.3. — On peut aussi vérifier que deux isomorphismes (dans la catégorie dérivée) $\phi_1 : J_\bullet \to I_\bullet$ et $\phi_2 : J_\bullet \to I_\bullet$ donnent le même morphisme de complexe.

Corollaire 4.4.4. — *Soit X un schéma de Gorenstein de dimension finie. Alors on dispose d'un complexe*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\tilde{d}_p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

indépendant de la résolution injective minimale de $\mathcal{O}_X$ choisie.

Remarque 4.4.5. — On obtient en fait un complexe comme ci-dessus pour toute résolution injective finie $I_\bullet$ (non forcément minimale) de $\mathcal{O}_X$. La même preuve que ci-dessus montre que le complexe obtenu est indépendant de la résolution.

Remarque 4.4.6. — Soit A un anneau de Gorenstein de dimension n. Alors la résolution injective canonique de A (voir [**Bou80**]) peut être tronquée pour obtenir une résolution injective canonique finie

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E_\bullet \longrightarrow 0$$

de A. On vérifie que le complexe de Gersten-Witt

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\tilde{d}_p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

obtenu dans le corollaire 4.4.4 n'est autre que le complexe obtenu à l'aide de la résolution injective finie $E_\bullet$ de A.

Définition 4.4.7. — *Soit X un schéma de Gorenstein de dimension finie. Le complexe*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\tilde{d}_p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

est appelé complexe de Gersten-Witt de X. On le note $C(X,\tilde{W})$.

Théorème 4.4.8. — *Soit X un schéma régulier de dimension n. Alors il existe un isomorphisme de complexes*

$$F : C(X,W) \longrightarrow C(X,\tilde{W}).$$

Démonstration. — Choisissons une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{(d^I)_0} I_{-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0 .$$

Il est connu que le quasi-isomorphisme $i_0 : \mathcal{O}_X \to I_\bullet$ induit un isomorphisme de foncteurs ([**Gil03**, paragraphe 3])

$$k_I : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_\,, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\_\,, I_\bullet)$$

qui fait de l'inclusion $\iota : D^b(\mathcal{P}(\mathcal{O}_X)) \to D^b(\mathcal{M}_{tf}(\mathcal{O}_X))$ (qui est une équivalence puisque X est régulier) un foncteur préservant la dualité. Comme ι préserve les filtrations et qu'il se comporte bien par rapport à la localisation, on obtient un isomorphisme de complexes dépendant de i_0

$$\begin{array}{ccccc}
\dots \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) & \longrightarrow \dots \\
& \downarrow{\scriptstyle F_{i_0}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{i_0}} & \\
\longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))) & \xrightarrow{d_p^I} & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))) & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Nous allons maintenant calculer F_{i_0}. On peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour un anneau A régulier. Soit $x \in \mathrm{Spec}(A)^{(p)}$, M un A_x-module de longueur finie et $\varphi : M \to \widehat{M}$ un isomorphisme symétrique. Le dual de M dans $D^b_{lf}(\mathcal{M}(A_x))$ est le complexe

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m}) \xrightarrow{D_{-m}} \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m-1}) \longrightarrow \dots$$

où D_{-m} est donné par $D_{-m}(f) = (-1)^{m+1}(d^I)_{-m}f$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m})$. Le calcul de $\mathrm{Ext}^p_A(M, A)$ se fait à partir du complexe

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m}) \xrightarrow{D'_{-m}} \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m-1}) \longrightarrow \dots$$

où D'_{-m} est donné par $D'_{-m}(f) = (d^I)_{-m}f$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m})$. Choisissons l'isomorphisme de complexe défini en degré $-j$ par la multiplication par $(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}$

$$\begin{array}{ccccc}
\dots \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m}) & \xrightarrow{D_{-m}} & \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m-1}) & \longrightarrow \dots \\
& \downarrow{\scriptstyle (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}} & \\
\dots \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m}) & \xrightarrow{D'_{-m}} & \mathrm{Hom}_A(M, I_{-m-1}) & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

On voit ainsi que si $x \in \mathrm{Spec}(A)^{(p)}$, le foncteur

$$F_{i_0} : W^{lf}(A_x) \longrightarrow \tilde{W}^{lf}(A_x)$$

est donné par

$$F_{i_0}(M, \varphi) = (M, (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\varphi).$$

Le choix d'une autre résolution injective minimale

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j_0} J_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow J_{-n} \longrightarrow 0$$

donne un autre isomorphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow F_{j_0} & & \downarrow F_{j_0} & \\
\cdots \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,x}))) & \xrightarrow{d_p^J} & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} W^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,y}))) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

qu'on calcule de la même manière. On obtient ainsi par définition du complexe $C(X,\tilde{W})$ un isomorphisme (voir le théorème 4.4.2)

$$F : C(X,W) \longrightarrow C(X,\tilde{W}). \quad \square$$

Remarque 4.4.9. — La preuve du théorème ci-dessus montre en fait qu'on a

$$\tilde{d}_p = (-1)^{p+1} d_p.$$

Supposons maintenant que L soit un A-module inversible sur un anneau de Gorenstein de dimension n. Soit

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i_0} I_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de L. Alors le complexe $I_\bullet$ est dualisant. En répétant les constructions du paragraphe 3, on voit qu'on peut définir un isomorphisme naturel

$$\tilde{\varpi}_L : M \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(\operatorname{Ext}^n_A(M,L),L).$$

pour tout $M \in \mathcal{M}_{lf}(A)$.

Définition 4.4.10. — *On appelle groupe de Witt des modules de longueur finie à valeur dans L le groupe $W(\mathcal{M}_{lf}(A), \operatorname{Ext}^n_A(\_\,,L), \varpi_L)$. On le note $\tilde{W}^{lf}(A,L)$.*

Répétant la même construction qu'au début du paragraphe 4, on obtient pour tout schéma de Gorenstein de dimension finie un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x},L_x) \xrightarrow{\tilde{d}_p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y},L_y) \longrightarrow \cdots.$$

Définition 4.4.11. — *Soit X un schéma de Gorenstein de dimension finie et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On note $C(X,\tilde{W},L)$ le complexe*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,x},L_x) \xrightarrow{\tilde{d}_p} \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{lf}(\mathcal{O}_{X,y},L_y) \longrightarrow \cdots.$$

La même procédure que ci-dessus donne le résultat suivant :

THÉORÈME 4.4.12. — *Soit X un schéma régulier et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Alors*

$$C(X, W, L) \simeq C(X, \tilde{W}, L).$$

REMARQUE 4.4.13. — Les groupes apparaissant dans les complexes $C(X, \tilde{W})$ et $C(X, \tilde{W}, L)$ sont isomorphes (non canoniquement).

CHAPITRE 5

LE MORPHISME DE TRANSFERT

5.1. Résumé

Si X est un schéma régulier, Y est un schéma de Gorenstein et

$$f : X \longrightarrow Y$$

est un morphisme fini, on peut définir des homomorphismes ([**Gil03**]) :

$$f_* : \tilde{W}^i(X, L) \longrightarrow \tilde{W}^{i+l}(Y)$$

où $L = \overline{f}^* \mathrm{Ext}^l_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$ est inversible et $l = \dim(Y) - \dim(X)$. Ces homomorphismes dépendent de la résolution injective de $\mathcal{O}_Y$ choisie. Ils permettent néanmoins de définir un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, \tilde{W}, L) \longrightarrow C(Y, \tilde{W})$$

indépendant de tout choix.

5.2. Transferts

Soient X et Y des schémas et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Notons

$$\overline{f} : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, f_*\mathcal{O}_X)$$

le morphisme d'espaces localement annelés déduit de f et $\mathcal{M}(f_*\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $f_*\mathcal{O}_X$-modules sur Y. Remarquons que le morphisme $\overline{f}$ est plat ([**Har66**, chapitre 3, § 6, p. 168]). Si M est un $\mathcal{O}_Y$-module, le faisceau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, M)$ possède une structure naturelle de $f_*\mathcal{O}_X$-module définie de la manière suivante :

Pour tout ouvert $U \subset Y$ et toute section $s \in f_*\mathcal{O}_X(U)$, on a un homomorphisme

$$\mu_s : f_*\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(U)$$

donné par $\mu_s(t) = st$ pour toute section $t \in f_*\mathcal{O}_X(U)$. Pour tout homomorphisme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y(U)}}(f_*\mathcal{O}_X(U), M)(U)$, on pose $s \cdot \psi = \psi \circ \mu_s$ et on vérifie que cette multiplication munit le faisceau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, M)$ d'une structure de $f_*\mathcal{O}_X$-module.

Supposons que Y possède un complexe dualisant $I_\bullet$

$$I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0.$$

Rappelons que $\chi^I(f_*\mathcal{O}_X) \in D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)$ est le complexe

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_0) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-n}) \longrightarrow 0.$$

avec la graduation $\chi^I(f_*\mathcal{O}_X)_{-s} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-s})$.

On a les résultats suivants :

Lemme 5.2.1. — *Si N est un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent injectif,* $\overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, N)$ *est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent injectif.*

Démonstration. — Voir [**Gil07a**, corollaire 1.4, p. 2] □

Par ailleurs, le complexe obtenu a des groupes d'homologie cohérents.

Lemme 5.2.2. — *Le complexe $\overline{f}^*(\chi^I(f_*\mathcal{O}_X)) \in D^b_{tf}(\mathcal{O}_X)$.*

Démonstration. — C'est clair. □

Proposition 5.2.3. — *Le complexe $\overline{f}^*(\chi^I(f_*\mathcal{O}_X))$ est un complexe dualisant pour X.*

Démonstration. — Notons $J_\bullet$ le complexe $\overline{f}^*(\chi^I(f_*\mathcal{O}_X))$. On dispose d'un morphisme de complexes de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$\epsilon : \chi^I(f_*\mathcal{O}_X) \longrightarrow I_\bullet$$

défini de la manière suivante : si $U \subset Y$ est un ouvert et $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-s})(U)$, on pose $\epsilon(\beta) = (-1)^s\beta(U)(1)$ où $\beta(U) : f_*\mathcal{O}_X(U) \to I_{-s}(U)$. On obtient de cette manière pour tout complexe $M_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-modules un morphisme de complexes

$$\eta_{M_\bullet} : f_*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_\bullet, J_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*M_\bullet, I_\bullet).$$

Il se trouve que $\eta_{M_\bullet}$ est un isomorphisme ([**Gil07a**, paragraphe 1.6, p. 3]). On vérifie aisément que η est un isomorphisme de foncteurs

$$f_*\chi^J \longrightarrow \chi^I f_*.$$

Le diagramme suivant commute pour tout complexe $M_\bullet$ (voir [**Gil03**, théorème 4.1, p. 222]) :

$$\begin{tikzcd}
f_*(M_\bullet) \arrow[r, "f_*(\varpi^J_{M_\bullet})"] \arrow[d, "\varpi^I_{f_*(M_\bullet)}"'] & f_*(\chi^J\chi^J(M_\bullet)) \arrow[d, "\eta^{-1}_{\chi^J(M_\bullet)}"] \\
\chi^I\chi^I f_*(M_\bullet) \arrow[r, "\chi^I\eta^{-1}_{M_\bullet}"'] & \chi^I f_*\chi^J(M_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Cela montre que ϖ^J est un isomorphisme. Donc $J_\bullet = \overline{f}^*\chi^I(f_*\mathcal{O}_X)$ est un complexe dualisant. □

Comme $J_\bullet = \overline{f}^*\chi^I(f_*\mathcal{O}_X)$ est un complexe dualisant, on obtient une catégorie triangulée avec dualité $(D^b_{tf}(\mathcal{M}_X), \chi^J, 1, \varpi^J)$. Par ailleurs, le foncteur f_* induit un foncteur de catégories triangulées

$$f_* : D^b_{tf}(\mathcal{M}_X) \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y).$$

Le diagramme commutatif de la preuve ci-dessus

$$\begin{tikzcd}
f_*(M_\bullet) \arrow[r, "f_*(\varpi^J_{M_\bullet})"] \arrow[d, "\varpi^I_{f_*(M_\bullet)}"'] & f_*(\chi^J\chi^J(M_\bullet)) \arrow[d, "\eta^{-1}_{\chi^J(M_\bullet)}"] \\
\chi^I\chi^I f_*(M_\bullet) \arrow[r, "\chi^I\eta^{-1}_{M_\bullet}"'] & \chi^I f_*\chi^J(M_\bullet)
\end{tikzcd}$$

montre que le couple (f_*, η) préserve la dualité (annexe D, définition D.1.12). On en déduit le théorème suivant :

Théorème 5.2.4. — *Notons $J_\bullet$ le complexe $\overline{f}^*(\chi^I(f_*\mathcal{O}_X))$. Le couple*

$$(f_*, \eta) : (D^b_{tf}(\mathcal{M}_X), \chi^J, 1, \varpi^J) \longrightarrow (D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y), \chi^I, 1, \varpi^I)$$

préserve la dualité. Il induit donc un homomorphisme pour tout i

$$f_* : \tilde{W}^i(X, J_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^i(Y, I_\bullet).$$

Définition 5.2.5. — *L'homomorphisme f_* est appelé homomorphisme de transfert (ou simplement transfert) pour le morphisme fini $f : X \to Y$.*

Soient X, Y, Z des schémas. Supposons que $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ soient des morphismes finis. Soit $I_\bullet$ un complexe dualisant pour Z. On note $J_\bullet$ le complexe $\overline{g}^*\chi^I(g_*\mathcal{O}_Y)$ et $N_\bullet$ le complexe $\overline{f}^*\chi^J(f_*\mathcal{O}_X)$. Alors $N_\bullet$ est naturellement isomorphe à $\overline{(gf)}^*\chi^I((gf)_*\mathcal{O}_X)$ ([**Har66**, proposition 6.2, p. 166]). En utilisant cet isomorphisme, on peut comparer les morphismes de transfert f_*, g_* et $(gf)_*$.

Proposition 5.2.6. — *Soient X, Y, Z des schémas, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes finis.*

$$(gf)_* = g_* f_*.$$

5.3. Le morphisme de complexes

Le but des résultats suivants est de démontrer que si $f : X \to Y$ est fini, X et Y sont réguliers, il existe un morphisme de transfert

$$f_* : C(X, W, L) \longrightarrow C(Y, W)$$

où L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible bien choisi. Rappelons que $D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p)}$ (respectivement $D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p)}$) est la sous-catégorie triangulée de $D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)$ (respectivement

$D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y))$ des objets dont le support de l'homologie est de codimension supérieure ou égale à p. On a :

Proposition 5.3.1. — *Soient X et Y des schémas connexes de dimension respectives n et m. Soit encore $f : X \to Y$ un morphisme fini. Alors*

$$f_* : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}(Y))$$

induit pour tout $p \in \mathbb{N}$ un foncteur

$$f_* : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))^{(p)} \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}(Y))^{(p+m-n)}.$$

Comme f est fini, il est en particulier affine. En conséquence, $f_* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_Y$ est exact. Il suffit ainsi de démontrer le lemme suivant pour prouver la proposition :

Lemme 5.3.2. — *Soient A et B des anneaux et $f : A \to B$ un homomorphisme de k-algèbres tel que B soit une A-algèbre finie. Supposons que les premiers minimaux contenant* $\mathrm{Ker}(f)$ *soient tous de hauteur l. Soit M un B-module de type fini dont le support est de codimension $\geq p$. Alors* $\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(f_*(M))) \geq p + l$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si N est un $A/\mathrm{Ker}(f)$-module alors

$$\mathrm{codim}_A(\mathrm{Supp}(N)) = \mathrm{codim}_{A/\mathrm{Ker}(f)}(\mathrm{Supp}(N)) + l.$$

On peut donc supposer que $A \subset B$ et que B est un A-module de type fini. Ainsi B est entier sur A. De plus on a pour tout B-module M l'égalité :

$$\mathrm{Ann}_B(M) \cap A = \mathrm{Ann}_A(f_*(M))$$

Comme B est entier sur A, ces deux idéaux ont la même cohauteur et donc la même hauteur. On conclut en remarquant que $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann} M)$ si M est de type fini (voir [**Mat86**, p. 26]). □

Corollaire 5.3.3. — *Soient X et Y deux schémas de dimensions respectives n et m. Posons $l = m - n$. Soit encore $f : X \to Y$ un morphisme fini. Considérons les suites exactes de catégories triangulées*

$$D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p+1)} \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p)} \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p)}/D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p+1)}$$

et

$$D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+1+l)} \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+l)} \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+l)}/D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+1+l)}.$$

Alors f_* induit pour tout p des morphismes de suites exactes de catégories triangulées

$$\begin{tikzcd}
D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p+1)} \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p)} \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p)}/D^b_{tf}(\mathcal{M}_X)^{(p+1)} \arrow[d, "f_*"'] \\
D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+1+l)} \arrow[r] & D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+l)} \arrow[r] & D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+l)}/D^b_{tf}(\mathcal{M}_Y)^{(p+1+l)}.
\end{tikzcd}$$

Nous aurons besoin des résultats suivants :

Proposition 5.3.4. — *Soit Y un schéma de Gorenstein, X un schéma régulier, $I_\bullet$ une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$ et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Comme ci-dessus, notons $l = \dim(Y) - \dim(X)$. Alors le complexe*

$$0 \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-l}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-n}) \longrightarrow 0$$

est une résolution injective de $\overline{f}^*\mathrm{Ext}^l_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$. On a de plus que le module $\overline{f}^*\mathrm{Ext}^l_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$ est inversible.

Démonstration. — Il suffit de vérifier localement que ce complexe est une résolution injective de $\overline{f}^*\mathrm{Ext}^l_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$. C'est fait dans [**Gil03**, corollaire 6.3, p. 226]. □

Corollaire 5.3.5. — *Soit Y un schéma de Gorenstein, X un schéma régulier, $I_\bullet$ une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$ et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Notons $l = \dim(Y) - \dim(X)$ et $L = \overline{f}^*\mathrm{Ext}^l_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$ un homomorphisme*

$$f_* : \tilde{W}^i(X, L) \longrightarrow \tilde{W}^{i+l}(Y).$$

Démonstration. — Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$. Notons $J_\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-n}) \longrightarrow 0.$$

On sait par la proposition 5.3.4 que le complexe

$$0 \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-l}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-n}) \longrightarrow 0$$

est quasi-isomorphe à L (*via* l'inclusion de L dans $\overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-l})$). Notons-le $E_\bullet$. On voit ([**Gil03**, théorème 6.4, p. 227]) qu'on a pour tout $M_\bullet \in D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$ un isomorphisme de complexes

$$\xi_M : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_\bullet, E_\bullet) \longrightarrow T^l\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_\bullet, J_\bullet).$$

Ces isomorphismes induisent des homomorphismes de groupes de Witt ([**Gil03**, théorème 6.4, p. 227]) :

$$\tilde{W}^i(X, E_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^{i+l}(X, J_\bullet).$$

Par ailleurs, le théorème 5.3.4 montre que f_* induit des homomorphismes

$$\tilde{W}^{i+l}(X, J_\bullet) \longrightarrow \tilde{W}^{i+l}(Y, I_\bullet).$$

Cela conclut la preuve. □

Corollaire 5.3.6. — *Soient X, Y, $f : X \to Y$, L et l comme ci-dessus. Alors le foncteur*

$$f_* : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}(Y))$$

induit un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, \tilde{W}, L) \longrightarrow C(Y, \tilde{W}).$$

Démonstration. — Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$. On sait par la proposition 5.3.4 que le complexe

$$\overline{f}^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-l}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \overline{f}^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-n}) \longrightarrow 0$$

est une résolution injective finie de L. Notons-le $E_\bullet$. La proposition 5.2.3 montre que ce complexe est dualisant pour X. En utilisant le théorème 5.2.4, la proposition 5.3.1 et le corollaire 5.3.5, on voit que le couple (f_*, η) préserve les filtrations et les dualités. On obtient donc un morphisme de complexes (proposition D.2.12) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) & \xrightarrow{d^p_J} & \displaystyle\bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_y)), L_y) & \longrightarrow \ldots \\
& \Big\downarrow (f_*)_I & & \Big\downarrow (f_*)_I & \\
\ldots \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{z \in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z))) & \xrightarrow{d^{p+l}_I} & \displaystyle\bigoplus_{t \in Y^{(p+l+1)}} \tilde{W}^{p+l+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_t))) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

Si maintenant $I'_\bullet$ est une autre résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$ et $J'_\bullet$ est le complexe $\overline{f}^* \chi^{I'}(f_*\mathcal{O}_X)$, on obtient un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) & \xrightarrow{d^p_{J'}} & \displaystyle\bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_y)), L_y) & \longrightarrow \ldots \\
& \Big\downarrow (f_*)_{I'} & & \Big\downarrow (f_*)_{I'} & \\
\ldots \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{z \in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z))) & \xrightarrow{d^{p+l}_{I'}} & \displaystyle\bigoplus_{t \in Y^{(p+l+1)}} \tilde{W}^{p+l+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_t))) & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

Le choix d'un isomorphisme $\mu : I_\bullet \to I'_\bullet$ donne des isomorphismes de complexes

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) \arrow[r, "d^p_J"] \arrow[d, "\mu"'] & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_y)), L_y) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) \arrow[r, "d^p_{J'}"] & \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} \tilde{W}^{p+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_y)), L_y) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \bigoplus_{z\in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z))) \arrow[r, "d^{p+l}_I"] \arrow[d, "\mu"'] & \bigoplus_{t\in Y^{(p+l+1)}} \tilde{W}^{p+l+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_t))) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \bigoplus_{z\in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z))) \arrow[r, "d^{p+l}_{I'}"] & \bigoplus_{t\in Y^{(p+l+1)}} \tilde{W}^{p+l+1}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_t))) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On voit que les carrés

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(f_*)_I"'] & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}^p(D^b_{lf}(\mathcal{M}(X_x)), L_x) \arrow[d, "(f_*)_{I'}"'] \\
\bigoplus_{z\in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z))) \arrow[r, "\mu"] & \bigoplus_{z\in Y^{(p+l)}} \tilde{W}^{p+l}(D^b_{lf}(\mathcal{M}(Y_z)))
\end{tikzcd}$$

commutent. Par définition des complexes $C(X, \tilde{W}, L)$ et $C(Y, \tilde{W})$ (voir le théorème 4.4.2 et le corollaire 4.4.4), on obtient donc un morphisme de complexe indépendant de la résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$ choisie. □

Corollaire 5.3.7. — *Soient Y un schéma de Gorenstein de dimension m, X un schéma régulier de dimension n, P un $\mathcal{O}_Y$-module inversible et $f : Y \to X$ un morphisme fini. Alors le foncteur*

$$f_* : D^b_{tf}(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow D^b_{tf}(\mathcal{M}(Y))$$

induit un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, \tilde{W}, \overline{f}^* \mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, P)) \longrightarrow C(Y, \tilde{W}, P).$$

Démonstration. — Cela découle directement du théorème ci-dessus et de la proposition 5.3.4. □

Nous avons de plus :

Proposition 5.3.8. — *Soient X, Y, Z des schémas réguliers de dimensions respectives n, m, k, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes finis et P un $\mathcal{O}_Z$-module inversible. Notons Q le $\mathcal{O}_Y$-module $\overline{g}^* \mathrm{Ext}^{k-m}_{\mathcal{O}_Z}(g_* \mathcal{O}_Y, P)$ et R le $\mathcal{O}_X$-module $\overline{f}^* \mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_X, Q)$. Alors on a*

$$R = \overline{(gf)}^* \mathrm{Ext}^{k-n}_{\mathcal{O}_Z}((gf)_* \mathcal{O}_X, P).$$

De plus, les morphismes

$$f_* : C(X, \tilde{W}, R) \longrightarrow C(Y, \tilde{W}, Q),$$
$$g_* : C(Y, \tilde{W}, Q) \longrightarrow C(Z, \tilde{W}, P)$$

et

$$(gf)_* : C(X, \tilde{W}, \overline{(gf)}^* \mathrm{Ext}^{k-n}_{\mathcal{O}_Z}((gf)_* \mathcal{O}_X, P)) \longrightarrow C(Z, \tilde{W}, P)$$

satisfont $g_* f_* = (gf)_*$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la proposition 5.2.6 □

CHAPITRE 6

LE CALCUL DU MORPHISME DE TRANSFERT

6.1. Résumé

Dans ce chapitre, nous montrons que si X et Y sont des schémas lisses et

$$f : X \longrightarrow Y$$

est un morphisme fini, alors le morphisme de transfert

$$f_* : C(X, W, L) \longrightarrow C(Y, W)$$

défini dans le chapitre précédent peut être tordu de manière à obtenir un morphisme

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}).$$

Or les complexes $C(X, W, \omega_{X/k})$ et $C(Y, W, \omega_{Y/k})$ sont de la forme

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in Y^{(p+1)}} W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \longrightarrow \ldots$$

et

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{z \in Y^{(p+n-m)}} W(k(z), \omega_{k(z)/k}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{u \in Y^{(p+n-m+1)}} W(k(u), \omega_{k(u)/k}) \longrightarrow \ldots$$

Nous montrons que si $x \in X^{(p)}$ et $y = f(x) \in Y^{(p+m-n)}$ et $k(x)/k(y)$ est séparable le morphisme de transfert

$$(f_*)_x^y : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k})$$

est en fait le morphisme usuel induit par la forme trace

$$tr : k(x) \longrightarrow k(y).$$

Dans le cas où $k(x)/k(y)$ n'est pas séparable, nous construisons un homomorphisme canonique (voir [**Sch97**])

$$\theta_x^y : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k})$$

et montrons également que le morphisme de transfert coïncide avec cet homomorphisme. Cette description explicite nous permettra de définir plus tard un morphisme de complexes associé à un morphisme propre.

6.2. Le complexe tordu par le faisceau canonique

Commençons par rappeler quelques résultats sur les faisceaux de formes différentielles (voir [**Har77**, chapitre II, paragraphe 8, p. 172]). Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On considère le morphisme diagonal

$$\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X.$$

L'image de X par Δ est localement fermée dans $X \times_Y X$, donc il existe un ouvert $W \subset X \times_Y X$ tel que $\Delta(X)$ soit fermé dans W.

Définition 6.2.1. — *Soit J le faisceau d'idéaux de $\Delta(X)$ dans W. Le faisceau des formes différentielles relatives de X sur Y est le faisceau*

$$\Omega_{X/Y} = \Delta^*(J/J^2).$$

Proposition 6.2.2. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes. Alors on a une suite exacte de faisceaux sur X*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Définition 6.2.3. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse de dimension relative n. On définit $\omega_{X/Y} = \bigwedge^n \Omega_{X/Y}$. Si X est lisse sur k, on appelle $\omega_{X/k}$ le faisceau canonique de X.*

Proposition 6.2.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme et Z un fermé de X. Notons J le faisceau d'idéaux de Z. Alors on a une suite exacte de faisceaux sur Z*

$$J/J^2 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

Corollaire 6.2.5. — *Soit X un schéma lisse sur k et $x \in X^{(p)}$. Alors on a un isomorphisme canonique de $k(x)$-espaces vectoriels*

$$\omega_{k(x)/k} \simeq (\omega_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \bigwedge^p (x/x^2)^*.$$

Démonstration. — Soit $U = \mathrm{Spec}(B)$ un ouvert affine contenant x. La proposition 6.2.4 ci-dessus dit qu'on a une suite exacte de B/x-modules

$$x/x^2 \longrightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B B/x \longrightarrow \Omega_{(B/x)/k} \longrightarrow 0.$$

Localisant en x et posant $A = B_x$, on obtient une suite exacte de $k(x)$-espaces vectoriels

$$x/x^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A k(x) \longrightarrow \Omega_{k(x)/k} \longrightarrow 0.$$

Comme x est régulier, on a que $\dim_{k(x)}(x/x^2) = p$. De plus, $k(x)/k$ est séparable de degré de transcendance $\dim(A/x) = \dim(X) - p$. On obtient donc que $\dim_{k(x)}(\Omega_{k(x)/k}) = \dim(X) - p$ et que la suite ci-dessus est aussi exacte à gauche. Prenant les puissances extérieures maximales, on a un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^p (x/x^2) \otimes_{k(x)} \omega_{k(x)/k} \simeq \omega_{A/k} \otimes_A k(x).$$

Tensorisant à gauche et à droite par $\mathrm{Hom}_{k(x)}(\bigwedge^p(x/x^2), k(x)) = (\bigwedge^p(x/x^2))^*$ et remarquant que $(\bigwedge^p(x/x^2))^* = \bigwedge^p(x/x^2)^*$ on obtient finalement

$$\omega_{k(x)/k} \simeq \omega_{A/k} \otimes_A \bigwedge^p (x/x^2)^*. \quad \square$$

Lemme 6.2.6. — *Soit A un anneau local régulier de dimension n et x l'idéal maximal de A. Soit $k(x)$ le corps résiduel de A. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\bigwedge^n (x/x^2)^* \simeq \mathrm{Ext}^n_A(k(x), A).$$

Démonstration. — Soit $x_1, \ldots, x_n$ une suite régulière engendrant x. On obtient un isomorphisme

$$\alpha_{x_1,\ldots,x_n} : k(x) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(k(x), A)$$

défini par $\alpha_{x_1,\ldots,x_n}(a) = a \cdot \mathit{Kos}(x_1, \ldots, x_n)$ où $\mathit{Kos}(x_1, \ldots, x_n)$ est le complexe de Koszul associé à la suite régulière $x_1, \ldots, x_n$. Notons $\overline{x_i}$ la classe de x_i dans x/x^2. Soit $\phi_1, \ldots, \phi_n \in (x/x^2)^*$ la base duale de $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. On a également un isomorphisme

$$\beta_{x_1,\ldots,x_n} : k(x) \longrightarrow \bigwedge^n (x/x^2)^*$$

défini par $\beta_{x_1,\ldots,x_n}(a) = a \cdot \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$. Finalement, on obtient un isomorphisme

$$\gamma_{x_1,\ldots,x_n} : \bigwedge^n (x/x^2)^* \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(k(x), A)$$

donné par $\gamma_{x_1,\ldots,x_n} = \alpha_{x_1,\ldots,x_n}(\beta_{x_1,\ldots,x_n})^{-1}$. Si $y_1, \ldots, y_n$ est une autre suite régulière engendrant x, on a une matrice $A = (a_{ij})$ telle que $y_i = \sum a_{ij} x_j$. On voit que $\alpha_{y_1,\ldots,y_n} = \det A \cdot \alpha_{x_1,\ldots,x_n}$ et $\beta_{y_1,\ldots,y_n} = \det A \cdot \beta_{x_1,\ldots,x_n}$. Ainsi $\gamma_{x_1,\ldots,x_n} = \gamma_{y_1,\ldots,y_n}$ et on a bien un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^n (x/x^2)^* \simeq \mathrm{Ext}^n_A(k(x), A). \quad \square$$

Corollaire 6.2.7. — *Soit X un schéma lisse sur k et $x \in X^{(p)}$. Alors on a un isomorphisme canonique de $k(x)$-espaces vectoriels*

$$\omega_{k(x)/k} \simeq \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x), (\omega_{X/k})_x).$$

Démonstration. — Le corollaire 6.2.5 dit qu'on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{k(x)/k} \simeq (\omega_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \bigwedge^p (x/x^2)^*.$$

Le corollaire ci-dessus montre qu'on a un isomorphisme canonique
$$\bigwedge^p (x/x^2)^* \simeq \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x), \mathcal{O}_{X,x}).$$
On obtient ainsi l'isomorphisme annoncé
$$\omega_{k(x)/k} \simeq \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x), (\omega_{X/k})_x). \qquad \square$$

Rappelons que si k est un corps et L est un k-espace vectoriel de dimension 1, le foncteur $\mathrm{Hom}_k(\_\,, L)$ et l'isomorphisme canonique
$$(ev_L)_V : V \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(V, L), L)$$
permettent de définir le groupe de Witt $W(k, L)$ (annexe E).

Corollaire 6.2.8. — *Soit X un schéma lisse sur k et $x \in X^{(p)}$. Alors on a un isomorphisme canonique*
$$\delta_x : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}, (\omega_{X/k})_x).$$

Démonstration. — Le corollaire 6.2.7 montre qu'on a un isomorphisme canonique
$$W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \simeq W(k(x), \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x), (\omega_{X/k})_x)).$$
Or par l'annexe E on a un isomorphisme canonique
$$W(k(x), \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x), (\omega_{X/k})_x)) \simeq W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}, (\omega_{X/k})_x). \qquad \square$$

Corollaire 6.2.9. — *Soit X un schéma de dimension n lisse sur un corps k. Alors on dispose d'un complexe*
$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \xrightarrow{\ d\ } \bigoplus_{y \in X^{(1)}} W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(n-1)}} W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \xrightarrow{\ d\ } \bigoplus_{z \in X^{(n)}} W(k(z), \omega_{k(z)/k}) \longrightarrow 0.$$

Les groupes apparaissant dans ce complexe sont les mêmes que ceux qui apparaissent dans le complexe défini par Schmid (voir [**Sch97**]). On démontrera par la suite que les différentielles coïncident également.

6.3. Le morphisme de transfert tordu par les faisceaux canoniques

Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre des schémas lisses sur k. Le but de cette section est dans un premier temps de démontrer que le transfert défini dans le chapitre précédent
$$f_* : C(X, W, \mathrm{Ext}^{n-m}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \omega_{Y/k})) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k})$$
est en fait un transfert
$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k})$$

puis de calculer explicitement ce morphisme. Pour ce faire, nous aurons besoin des quelques résultats et définitions suivantes qui se trouvent dans Hartshorne (voir [**Har66**]).

Soient X et Y des schémas et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Rappelons que dans le chapitre précédent, on avait noté

$$\overline{f} : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, f_*\mathcal{O}_X)$$

le morphisme d'espaces annelés déduit de f.

Définition 6.3.1. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse de dimension relative n. On définit le foncteur*

$$f^\sharp : D^b(\mathcal{M}(Y)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}(X))$$

par

$$f^\sharp(G_\bullet) = T^n(f^*(G_\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}).$$

Définition 6.3.2. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini. Alors on définit le foncteur*

$$f^\flat : D^b(\mathcal{M}(Y)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}(X))$$

par

$$f^\flat(G_\bullet) = \overline{f}^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, G_\bullet)$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, G_\bullet)$ *est muni de sa structure de $f_*\mathcal{O}_X$-module évidente (voir chapitre 5).*

Remarque 6.3.3. — Il faudrait en fait écrire $f^\flat = \overline{f}^* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \_\,)$ puisqu'on considère le foncteur dérivé à droite du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \_\,)$. Pour des raisons d'écriture, on omettra néanmoins le R dans cette expression.

Remarque 6.3.4. — Par [**Har66**, proposition 2.3, proposition 6.1], les foncteurs $f^\sharp$ et $f^\flat$ induisent des foncteurs $D^b_{tf}(\mathcal{M}(Y)) \to D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$.

Nous avons déjà utilisé le résultat suivant dans un cas particulier (proposition 5.2.6).

Lemme 6.3.5. — *Soient $f : X \to Y$ et $Y \to Z$ des morphismes finis. On a un isomorphisme naturel de foncteurs de $D^b_{tf}(\mathcal{M}(Z))$ dans $D^b_{tf}(\mathcal{M}(X))$*

$$(gf)^\flat \longrightarrow f^\flat g^\flat.$$

Démonstration. — Voir [**Har66**, proposition 6.2, p. 166]. □

Théorème 6.3.6. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes tels que f soit fini, g lisse et gf lisse. Alors on a un isomorphisme de foncteurs*

$$\psi : (gf)^\sharp \longrightarrow f^\flat g^\sharp.$$

défini sur $D^b_{tf}(\mathcal{M}(Z))$.

Démonstration. — Voir [**Har66**, proposition 8.4, p187]. □

COROLLAIRE 6.3.7. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schéma fini et lisse. Alors on a un isomorphisme de foncteurs*

$$\psi : f^\sharp \longrightarrow f^\flat.$$

Démonstration. — Il suffit de remplacer g par l'identité dans le théorème 6.3.6. □

REMARQUE 6.3.8. — En particulier, si K est un corps et L est une extension finie séparable de K, le corollaire ci-dessus dit qu'on dispose d'un isomorphisme

$$L \simeq \mathrm{Hom}_K(L, K).$$

Par ailleurs, on sait que la trace induit un isomorphisme

$$Tr : L \simeq \mathrm{Hom}_K(L, K)$$

donné par $Tr(l)(l') = tr_{L/K}(ll')$. Ces deux isomorphismes coïncident (voir [**Har66**, p. 187]).

COROLLAIRE 6.3.9. — *Soient X et Y deux schémas lisses sur k et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Supposons $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$. Soit encore*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{i_0} I_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{-m} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de $\mathcal{O}_Y$. Alors

$$0 \to \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-m+n} \otimes \omega_{Y/k}) \to \dots \to \overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-m} \otimes \omega_{Y/k}) \to 0$$

est canoniquement quasi-isomorphe à $\omega_{X/k}$.

Démonstration. — Soit $g : Y \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structurel. On applique le théorème 6.3.6 ci-dessus au complexe $(k[-m])$ donné par

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en degré $-m$. On a donc un isomorphisme

$$\psi : (gf)^\sharp(k[-m]) \longrightarrow f^\flat g^\sharp(k[-m]).$$

Or $(gf)^\sharp(k[-m])$ est le complexe

$$\dots \longrightarrow \omega_{X/k} \longrightarrow \dots$$

concentré en degré $-m+n$, et $g^\sharp(k[-m])$ est le complexe

$$\dots \longrightarrow \omega_{Y/k} \longrightarrow \dots$$

concentré en degré 0. De plus,

$$i_0 \otimes 1 : \mathcal{O}_Y \otimes \omega_{Y/k} \longrightarrow I_\bullet \otimes \omega_{Y/k}$$

est un quasi-isomorphisme et donc $I_\bullet \otimes \omega_{Y/k}$ est une résolution injective de $\omega_{Y/k}$. On obtient ainsi un isomorphisme (dans la catégorie dérivée)

$$\psi : (gf)^\sharp(k[-m]) \longrightarrow f^\flat(I_\bullet \otimes \omega_{Y/k}).$$

On sait par le chapitre précédent que $f^\flat(I_\bullet \otimes \omega_{Y/k})$ est le complexe

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-m+n} \otimes \omega_{Y/k}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_{-m} \otimes \omega_{Y/k}) \longrightarrow 0.$$

Le résultat est donc démontré. $\square$

Corollaire 6.3.10. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre schémas lisses sur un corps k. Alors on a un morphisme de transfert*

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}).$$

Démonstration. — Par le corollaire 5.3.7, on a un morphisme de transfert

$$f_* : C(X, W, \overline{f}^* \mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \omega_{Y/k})) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}).$$

Le corollaire ci-dessus montre qu'on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/k} \simeq \overline{f}^* \mathrm{Ext}^{m-n}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \omega_{Y/k}).$$

On obtient donc un morphisme de transfert

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}). \quad \square$$

6.4. Le calcul explicite du transfert

Lemme 6.4.1. — *Soit $k \subset K \subset L$ des extensions séparables de corps telles que L/K soit finie. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\omega_{K/k} \otimes_K L \simeq \omega_{L/k}.$$

Démonstration. — Par la proposition 6.2.2 on a une suite exacte

$$\Omega_{K/k} \otimes_K L \longrightarrow \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/K} \longrightarrow 0.$$

L'extension L/K étant finie et séparable, on a $\Omega_{L/K} = 0$ (voir [**Har77**, théorème 8.6A, p. 174]). Comme le degré de transcendance de K sur k et de L sur k sont les mêmes, cette suite est aussi exacte à gauche. Ainsi

$$\omega_{K/k} \otimes_K L \simeq \omega_{L/k}. \quad \square$$

Lemme 6.4.2. — *Soit k un corps, K et L des extensions séparables de k et $\phi : K \to L$ un homomorphisme fini et séparable. Soit encore V un L-espace vectoriel de dimension finie. Alors on a un isomorphisme K-linéaire canonique*

$$\psi_V : \phi_*\mathrm{Hom}_L(V, \omega_{L/k}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\phi_*V, \omega_{K/k}).$$

Démonstration. — Le lemme ci-dessus montre qu'on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{L/k} \simeq \omega_{K/k} \otimes_K L.$$

Utilisant la trace, on a un isomorphisme

$$L \otimes_K \omega_{K/k} \simeq \mathrm{Hom}_K(L, K) \otimes_K \omega_{K/k}.$$

Composant les précédents isomorphismes avec l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_K(L,K)\otimes_K \omega_{K/k}\simeq \mathrm{Hom}_K(L,\omega_{K/k})$$

on obtient un isomorphisme L-linéaire

$$\beta:\omega_{L/k}\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L,\omega_{K/k}).$$

On obtient donc pour tout L-espace vectoriel V un isomorphisme

$$\gamma_V:\mathrm{Hom}_L(V,\omega_{L/k})\longrightarrow \mathrm{Hom}_L(V,\mathrm{Hom}_K(L,\omega_{K/k}))$$

donné par $\gamma_V(f)=\beta f$. On dispose par ailleurs de l'isomorphisme habituel

$$\mathrm{Hom}_L(V,\mathrm{Hom}_K(L,\omega_{K/k}))\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,\omega_{K/k})$$

donné par $f(v)\mapsto\{v\mapsto f(v)(1)\}$ pour tout $v\in V$. On obtient finalement un isomorphisme

$$\psi_V:\phi_*\mathrm{Hom}_L(V,\omega_{L/k})\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\phi_*V,\omega_{K/k}).\qquad\square$$

Le prochain corollaire donne un calcul explicite du transfert dans un cas simple.

Corollaire 6.4.3. — *Soit k un corps, K et L des extensions séparables de k et $\phi:K\to L$ un homomorphisme fini et séparable. Notons*

$$f:\mathrm{Spec}(L)\longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$$

le morphisme donné par ϕ. Alors les homomorphismes

$$\psi_V:\phi_*\mathrm{Hom}_L(V,\omega_{L/k})\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\phi_*V,\omega_{K/k})$$

induisent un homomorphisme

$$\theta:W(L,\omega_{L/k})\longrightarrow W(K,\omega_{K/k})$$

qui coïncide avec

$$f_*:W(L,\omega_{L/k})\longrightarrow W(K,\omega_{K/k}).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la remarque 6.3.8, du corollaire 6.3.10 et du lemme 6.4.2. $\square$

Nous allons maintenant traiter le cas où $K\subset L$ est une extension inséparable finie. Notons E la clôture séparable de K dans E. Alors $E\subset L$ est une extension finie purement inséparable. Rappelons tout d'abord un lemme dû à Scharlau :

Lemme 6.4.4. — *Soient $L=K(\xi)/K$ une extension de degré impair et*

$$s:L\longrightarrow K$$

l'homomorphisme K-linéaire défini par $s(1)=1, s(\xi^j)=0$ pour $2\le j\le n-1$. Notons

$$s_*:W(L)\longrightarrow W(K)$$

l'homomorphisme induit par s. Alors $s_*(\langle 1\rangle)=\langle 1\rangle$.

Démonstration. — Voir [**Sch85**, lemme 5.8, p. 49]. $\square$

Corollaire 6.4.5. — *Soit L/K une extension impaire et*

$$r^* : W(K) \longrightarrow W(L)$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion $K \subset L$. Alors r^* est injective.

Démonstration. — Supposons que $L = K(\xi)$. Cette extension est évidemment impaire puisque L/K est impaire. On a de plus que $s_* r^*(\phi) = \phi \otimes s_*(\langle 1 \rangle)$ pour tout $\phi \in W(K)$ (voir [**Sch85**, théorème 5.6, p. 48]). Le lemme ci-dessus montre que

$$r^* : W(K) \longrightarrow W(L)$$

scinde s_* et par conséquent est injective. Si L/K n'est pas monogène, il existe une filtration

$$K \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = L$$

telle que K_i/K_{i-1} soit monogène et de degré impair. On conclut facilement en utilisant le cas précédent. □

Réinterprétons ces résultats d'une manière un peu différente. Soit L/E une extension finie purement inséparable. Comme ces corps sont de caractéristique $p \neq 2$, l'extension est de degré impaire. Soit

$$\mathcal{F} : E \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = L$$

une filtration telle que E_i/E_{i-1} soit monogène. Utilisant les homomorphismes du lemme 6.4.4

$$s_i : E_i \longrightarrow E_{i-1}$$

on obtient un homomorphisme E-linéaire

$$s_{\mathcal{F}} : L \longrightarrow E.$$

Lemme 6.4.6. — *Soit L/E une extension purement inséparable. Alors l'homomorphisme $s_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Hom}_E(L, E)$ induit un isomorphisme*

$$(s_{\mathcal{F}})_* : W(L) \longrightarrow W(E)$$

inverse de $r^* : W(E) \to W(L)$. En particulier, si $\mathcal{G}$ est une autre filtration de L satisfaisant les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$, alors $(s_{\mathcal{F}})_* = (s_{\mathcal{G}})_*$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $(s_{\mathcal{F}})_*$ est un isomorphisme. On sait déjà que pour tout i

$$r_i^* : W(E_{i-1}) \longrightarrow W(E_i)$$

est injectif. Montrons qu'il est également surjectif. Comme $E_i = E_{i-1}(\theta)$, il existe p^k tel que $E_i^{p^k} \subset E_{i-1}$. Comme $p = \mathrm{car}(k)$ est impair, on voit que r_i^* est surjectif. En effet, si $e \in E_i$ alors $e^{p^k} \in E_{i-1}$ et ces deux éléments donnent la même forme quadratique. L'inverse de r_i^* est $(s_i)_*$ par [**Sch85**, théorème 5.6, p. 48]. Ainsi $(s_{\mathcal{F}})_*$ est un isomorphisme. Si $\mathcal{G}$ est une autre filtration de L, on voit que $(s_{\mathcal{F}})_* = (s_{\mathcal{G}})_*$ puisque ces deux isomorphismes sont inverses de r^*. □

Corollaire 6.4.7. — *Soit* $f : \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(E)$ *un morphisme fini purement inséparable. Soit*

$$s : L \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(L, E)$$

défini par $s(1) = s_{\mathcal{F}}$ *pour n'importe quelle filtration* $\mathcal{F}$. *Soit encore*

$$\varphi : W(L) \longrightarrow W(L, \mathrm{Hom}_E(L, E))$$

l'isomorphisme induit par s. *Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} W(L) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "(s_{\mathcal{F}})_*"'] & W(L, \mathrm{Hom}_E(L, E)) \arrow[d, "f_*"] \\ & W(E). \end{tikzcd}$$

En particulier, φ *ne dépend pas de la filtration choisie.*

Démonstration. — Ce diagramme commute par définition des homomorphismes de transfert. □

Il faut maintenant travailler avec les faisceaux canoniques $\omega_{L/k}$ et $\omega_{E/k}$ pour obtenir un transfert canonique

$$W(L, \omega_{L/k}) \longrightarrow W(E, \omega_{E/k}).$$

Commençons par un lemme :

Lemme 6.4.8. — *Soit* $F \subset E$ *une extension finie purement inséparable telle que* $E^p \subset F$ *(où* p *est la caractéristique de* F*). Alors on a des suites exactes*

$$0 \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} F \longrightarrow \Omega_{F/F^p} \longrightarrow \Omega_{F/E^p} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \Omega_{F/E^p} \otimes_F E \longrightarrow \Omega_{E/E^p} \longrightarrow \Omega_{E/F} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Comme $E^p \subset F$, on a $E = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ avec des θ_i dans $E \backslash F$ tels que $\theta_i^p \in F$. Dans ces conditions, on a $\dim(\Omega_{E/F}) = n$ (voir [**Kun86**, proposition 5.6, p. 76]). On obtient également $E^p = F^p(\theta_1^p, \ldots, \theta_n^p)$ et $\dim(\Omega_{E^p/F^p}) = n$. De même, on trouve $F = F^p(\theta_1^p, \ldots, \theta_n^p, b_1, \ldots, b_m)$ pour des $b_j \in F \setminus F^p$. Utilisant ceci dans la suite usuelle

$$\Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} F \longrightarrow \Omega_{F/F^p} \longrightarrow \Omega_{F/E^p} \longrightarrow 0,$$

on voit qu'elle est aussi exacte à gauche. On procède de même pour la deuxième suite exacte. □

Corollaire 6.4.9. — *Soit* $k \subset F \subset E$ *des extensions. Supposons que* k *soit de caractéristique* p *et* $F \subset E$ *soit une extension finie purement inséparable telle* *que $E^p \subset F$. On a alors des isomorphismes canoniques*

$$\omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} \omega_{F/E^p} \simeq \omega_{F/k}$$

et

$$\omega_{F/E^p} \otimes_F \omega_{E/F} \simeq \omega_{E/k}.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'on a des isomorphismes canoniques $\omega_{F/F^p} \simeq \omega_{F/k}$ et $\omega_{E/E^p} \simeq \omega_{E/k}$. En effet, on dispose d'un homomorphisme canonique $\Omega_{F/k} \to \Omega_{F/F^p}$. On définit ensuite une dérivation $D : F \to \Omega_{F/k}$ par $D(f) = df$. Comme k est de caractéristique p, on remarque que c'est une F^p-dérivation de F. Ainsi, on obtient un homomorphisme $\Omega_{F/F^p} \to \Omega_{F/k}$ et on vérifie immédiatement qu'il est l'inverse de l'homomorphisme canonique $\Omega_{F/k} \to \Omega_{F/F^p}$. On procède de la même manière pour montrer que $\omega_{E/E^p} \simeq \omega_{E/k}$.

Il suffit ensuite de prendre les puissances extérieures maximales dans les suites exactes du lemme 6.4.8 ci-dessus pour terminer la preuve. □

Lemme 6.4.10. — *Soit $F \subset E$ une extension purement inséparable de corps de caractéristique p telle que $E^p \subset F$. Alors l'homomorphisme de Frobenius*

$$Fr : E \longrightarrow E^p$$

induit un homomorphisme de groupes

$$Fr_\Omega : \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E$$

défini par $Fr_\Omega(e \cdot d_E e') = d_{E^p} e^p \otimes (e')^p$.

Démonstration. — Munissons Ω_{E^p/F^p} de la structure de E-espace vectoriel induite par l'homomorphisme de Frobenius. Avec cette structure de E-espace vectoriel, on voit que Ω_{E^p/F^p} muni de la dérivation

$$E \xrightarrow{Fr} E^p \xrightarrow{d_{E^p}} \Omega_{E^p/F^p}$$

est un module de différentielles de E sur F. On obtient ainsi un homomorphisme de E-espaces vectoriels

$$Fr \circ d_{E^p} : \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p}.$$

On dispose par ailleurs d'un homomorphisme de E^p-espaces vectoriels

$$\Omega_{E^p/F^p} \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E.$$

On obtient donc bien un homomorphisme de groupes

$$Fr_\Omega : \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E. \quad \square$$

Lemme 6.4.11. — *L'homomorphisme de Frobenius*

$$Fr_\Omega : \Omega_{E/F} \longrightarrow \Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E$$

induit un isomorphisme canonique

$$W(E, \omega_{E/F}) \longrightarrow W(E, \omega_{E^p/F^p} \otimes E).$$

Démonstration. — Soit ξ un générateur de $\omega_{E/F}$. Alors $\xi = d_E e_1 \wedge \cdots \wedge d_E e_n$ pour des e_i dans E. Comme $\Omega_{E/F}$ et $\Omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E$ sont des espaces vectoriels de même dimension (voir par exemple la preuve du lemme 6.4.8), on remarque que $Fr_\Omega(\xi) = (d_{E^p} e_1^p \wedge \cdots \wedge d_{E^p} e_n^p) \otimes 1$ est un générateur de $\omega_{E^p/F^p} \otimes E$. Ces deux générateurs induisent des isomorphismes

$$W(E) \longrightarrow W(E, \omega_{E/F})$$

et

$$W(E) \longrightarrow W(E, \omega_{E^p/F^p} \otimes E).$$

On a donc un isomorphisme de groupes

$$W(E, \omega_{E/F}) \longrightarrow W(E, \omega_{E^p/F^p} \otimes E)$$

dépendant à première vue de ξ. Supposons maintenant que $d_E k_1, \ldots, d_E k_n$ engendre aussi $\Omega_{E/F}$ et posons $\eta = d_E k_1 \wedge \cdots \wedge d_E k_n$. Alors $\eta = a\xi$ et $Fr_\Omega(\eta) = a^p Fr_\Omega(\xi)$. Comme p est impair, on voit que l'isomorphisme

$$W(E, \omega_{E/F}) \longrightarrow W(E, \omega_{E^p/F^p} \otimes E)$$

défini à l'aide de η coïncide avec celui défini par ξ. L'isomorphisme ci-dessus ne dépend donc pas du choix du générateur ξ de $\Omega_{E/F}$. □

Corollaire 6.4.12. — *L'homomorphisme de Frobenius induit un isomorphisme canonique*

$$W(E, \omega_{E/k}) \longrightarrow W(E, \omega_{F/k} \otimes E).$$

Démonstration. — On a des isomorphismes canoniques (lemmes 6.4.9 et 6.4.11)

$$W(E, \omega_{E/F}) \longrightarrow W(E, \omega_{E^p/F^p} \otimes E),$$

$$\omega_{E^p/F^p} \otimes \omega_{F/E^p} \simeq \omega_{F/k}$$

et

$$\omega_{F/E^p} \otimes \omega_{E/F} \simeq \omega_{E/k}. \quad \square$$

Nous obtenons finalement :

Théorème 6.4.13. — *Soient $k \subset E \subset L$ des extensions de corps telles que l'extension $E \subset L$ soit finie et purement inséparable. On a alors un isomorphisme*

$$s : L \otimes \omega_{E/k} \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(L, \omega_{E/k})$$

induisant un isomorphisme canonique

$$\theta : W(L, \omega_{L/k}) \longrightarrow W(E, \omega_{E/k}).$$

Démonstration. — On sait qu'on peut obtenir un homomorphisme

$$s \otimes 1 : L \otimes \omega_{E/k} \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(L, \omega_{E/k})$$

à l'aide de n'importe quelle filtration

$$\mathcal{F} : E \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = L$$

telle que E_i/E_{i-1} soit monogène. On peut supposer que $E_i^p \subset E_{i-1}$. Par le corollaire 6.4.12, on a un isomorphisme $W(L, \omega_{L/k}) \to W(L, \omega_{E/k} \otimes L)$. Appliquant le corollaire 6.4.7, on voit que $s \otimes 1$ donne un isomorphisme $W(L, \omega_{E/k} \otimes L) \to W(E, \omega_{E/k})$. Cet isomorphisme est indépendant de s. Cela clôt la preuve. □

Corollaire 6.4.14. — *Soient $k \subset K \subset L$ des extensions de corps telles que $K \subset L$ soit finie. Alors il existe un isomorphisme*

$$s : L \otimes \omega_{K/k} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L, \omega_{K/k})$$

induisant un homomorphisme canonique

$$\theta : W(L, \omega_{L/k}) \longrightarrow W(K, \omega_{K/k}).$$

Démonstration. — On considère la clôture séparable E de K dans L. On applique ensuite le corollaire 6.4.3 à $K \subset E$ et le théorème 6.4.13 à $E \subset L$. □

Supposons maintenant que $f : A \to B$ soit un homomorphisme fini de k-algèbres lisses de dimensions respectives $p+l$ et p telles que A soit locale et B soit semi-locale. Notons K le corps résiduel de A. Soit y un idéal maximal de B et L le corps B/y. Notons $\phi : K \to L$ l'homomorphisme induit par f. Soit encore

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \longrightarrow 0$$

une résolution injective minimale de A. Alors

$$0 \longrightarrow \omega_{A/k} \xrightarrow{i_0} I_0 \otimes \omega_{A/k} \longrightarrow I_{-1} \otimes \omega_{A/k} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{-n} \otimes \omega_{A/k} \longrightarrow 0$$

est une résolution injective minimale de $\omega_{A/k}$. Le corollaire 6.2.5 montre qu'on dispose d'un isomorphisme

$$\omega_{K/k} \longrightarrow T^{p+l}(\mathrm{Hom}_A(K, I_\bullet \otimes \omega_{A/k}))$$

et donc d'un isomorphisme (voir la proposition 5.3.4)

$$\omega_{K/k} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(K, I_{-p-l} \otimes \omega_{A/k}).$$

On sait également que

$$0 \longrightarrow \omega_{B/k} \xrightarrow{j_0} \mathrm{Hom}_A(B, I_{-l} \otimes \omega_{A/k}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B, I_{-p-l} \otimes \omega_{A/k}) \longrightarrow 0$$

est une résolution injective de $\omega_{B/k}$. Appliquant le corollaire 6.2.7, on obtient un isomorphisme

$$\omega_{L/k} \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_B(L, \omega_{B/k}).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant (où tous les morphismes sont finis)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(L) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "\pi'"'] & \mathrm{Spec}(A). \end{tikzcd}$$

Alors on sait par la proposition 5.3.8 que

$$f_*\pi_* = \pi'_*\phi_*.$$

On obtient ainsi le diagramme commutatif (avec les identifications canoniques)

$$\begin{tikzcd} C(\mathrm{Spec}(L), W, \omega_{L/k}) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\phi_*"'] & C(\mathrm{Spec}(B), W, \omega_{B/k}) \arrow[d, "f_*"] \\ C(\mathrm{Spec}(K), W, \omega_{K/k}) \arrow[r, "\pi'_*"'] & C(\mathrm{Spec}(A), W, \omega_{A/k}). \end{tikzcd}$$

Les complexes $C(\mathrm{Spec}(K), W, \omega_{K/k})$ et $C(\mathrm{Spec}(L), W, \omega_{L/k})$ n'ont chacun qu'une composante non nulle qui est égale respectivement à $W(K, \omega_{K/k})$ et $W(L, \omega_{L/k})$. Nous pouvons donc démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6.4.15. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre des schémas lisses. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Soit*

$$\theta_x^{f(x)} : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k})$$

l'homomorphisme du corollaire 6.4.14. Alors

$$(f_*)_x^{f(y)} : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k})$$

satisfait $(f_*)_x^{f(y)} = \theta_x^{f(x)}$.

Démonstration. — On peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et l'homomorphisme $f : A \to B$ est fini. Localisant en y, on obtient un morphisme fini $f : A_y \to B_y$ avec B_y semi-locale. On utilise alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} C(\mathrm{Spec}(L), W, \omega_{L/k}) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\phi_*"'] & C(\mathrm{Spec}(B), W, \omega_{B/k}) \arrow[d, "f_*"] \\ C(\mathrm{Spec}(K), W, \omega_{K/k}) \arrow[r, "\pi'_*"'] & C(\mathrm{Spec}(A), W, \omega_{A/k}) \end{tikzcd}$$

pour conclure. □

Corollaire 6.4.16. — *Soient X et Y des schémas lisses de dimension m et n sur un corps k. Soit encore $f : X \to Y$ un morphisme fini. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{y\in Y^{(p+1)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k}) & \longrightarrow \cdots \\ & \Big\downarrow \sum \theta_x^{f(x)} & & \Big\downarrow \sum \theta_y^{f(y)} & \\ \cdots \longrightarrow & \bigoplus_{z\in Y^{(p+n-m)}} W(k(z),\omega_{k(z)/k}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{u\in Y^{(p+n-m+1)}} W(k(u),\omega_{k(u)/k}) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

est un morphisme de complexes.

Démonstration. — Le corollaire ci-dessus montre que pour chaque $x \in X^{(i)}$ l'homomorphisme $\theta_x^{f(x)}$ coïncide avec $(f_*)_x^{f(x)}$. Or f_* est un morphisme de complexes, d'où la conclusion. □

CHAPITRE 7

UN AUTRE CALCUL DES DIFFÉRENTIELLES DU COMPLEXE

7.1. Résumé

Ce chapitre est destiné au calcul explicite des différentielles du complexe $C(X, W, L)$ associé à un schéma régulier X et un $\mathcal{O}_X$-module inversible L. Ce calcul, rendu possible par le chapitre précédent, permet de démontrer que le complexe $C(X, W, \omega_{X/k})$ obtenu plus haut coïncide avec le complexe obtenu par M. Schmid dans sa thèse (voir [**Sch97**]).

7.2. Le cas facile

Soient B un anneau régulier de dimension 1 de corps des fractions K et L un B-module inversible. On va calculer les différentielles du complexe de Gersten-Witt

$$0 \longrightarrow W^{lf}(K, L_{(0)}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in B^{(1)}} W^{lf}(B_x, L_x) \longrightarrow 0$$

associé à B. Supposons dans un premier temps que $L = B$. Notons

$$\gamma : K \longrightarrow K^\sharp$$

la forme définie par $\gamma(1) = id_K$. Tout isomorphisme

$$\varphi : K \longrightarrow K^\sharp$$

est de la forme $\varphi = f\gamma$ pour un $f \in K\backslash\{0\}$. On note γ_f la forme $f\gamma$. Quitte à multiplier par un carré, on peut supposer que $f \in B$. Comme B est régulier de dimension 1, tous les localisés de B en un maximal $x \subset B$ sont des anneaux de valuation discrète. Notons v_x la valuation de B_x et π_x une uniformisante pour cette valuation. Il n'existe qu'un nombre fini de maximaux $x \subset B$ tels que $v_x(f) \neq 0$.

Lemme 7.2.1. — *Supposons que B soit régulier local d'idéal maximal x et de corps résiduel F. Soit $f \in B\backslash\{0\}$ tel que $v_x(f) \neq 0$. Alors $f = \lambda\pi^n$ pour une uniformisante π*

de B et $\lambda \in B^*$. Notons $\overline{\lambda}$ la classe de λ dans F et $\rho : F \to \mathrm{Ext}^1_B(F,B)$ l'isomorphisme défini par $\rho(1) = Kos(\pi)$ où $Kos(\pi)$ est le complexe de Koszul associé à la suite régulière (π). On a :

$$d([K,\gamma_f]) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ [F, \overline{\lambda}\rho] & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. — Comme $f \in B$, il est clair que γ_f induit un homomorphisme

$$\gamma_f : B \longrightarrow B^\sharp.$$

L'image de $[K,\gamma_f]$ par d est déterminée par le morphisme de triangles exacts suivant (voir le lemme D.2.9) :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\gamma_f"] \arrow[d, "\varpi"'] & B^\sharp \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & T(B) \arrow[d, "T(\varpi)"'] \\ (B^\sharp)^\sharp \arrow[r, "\gamma_f^\sharp"] & B^\sharp \arrow[r] & TC^\sharp \arrow[r] & T((B^\sharp)^\sharp) \end{tikzcd}$$

où C est le cône de γ_f. Explicitement C est le complexe

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow B \xrightarrow{-\gamma_f} B^\sharp \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

et φ peut être choisi comme étant le morphisme

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "-\gamma_f"] \arrow[d, "-ev"'] & B^\sharp \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & (B^\sharp)^\sharp \arrow[r, "\gamma_f^\sharp"] & B^\sharp \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

En utilisant l'isomorphisme $\gamma : B \to B^\sharp$, on voit que φ est isométrique à

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "-\gamma"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \arrow[r] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B^\sharp \arrow[r, "f^\sharp"] & B^\sharp \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Si $Kos(f)$ est le complexe de Koszul associé à la suite régulière (f) et

$$\rho_f : B/f \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(B/f, B)$$

est défini par $\rho_f(1) = Kos(f)$, on voit que

$$d([K,\gamma_f]) = [B/f, \rho_f] \in W^{lf}(B).$$

Or $f = \lambda\pi^n$. Si $n = 2m$, on vérifie que le sous-module

$$0 \longrightarrow B/\pi^m \xrightarrow{\cdot\pi^m} B/\lambda\pi^n$$

est un Lagrangien (voir la définition C.1.4). Ainsi $d([K,\gamma_f]) = 0$ si $f = \lambda\pi^{2m}$. Supposons maintenant que $n = 2m+1$. On voit que l'orthogonal du sous-module

$$0 \longrightarrow B/\pi^m \xrightarrow{\cdot\pi^{m+1}} B/\lambda\pi^{2m+1}$$

est le sous-module

$$0 \longrightarrow B/\pi^{m+1} \xrightarrow{\cdot\pi^{m}} B/\pi^{2m+1}.$$

On obtient donc une forme sur $(B/\pi^{m+1})/(\pi/\pi^{m+1})$ Witt-équivalente à la forme $[B/f,\rho_f]$ (annexe C, théorème C.2.3). Un calcul direct montre que $[B/\pi,\overline{\lambda}\rho] = [F,\overline{\lambda}\rho]$. □

Ce calcul montre que la différentielle du complexe $C(B,W)$ ressemble fortement à la différentielle définie par Springer et Knebusch (voir [**MH73**, lemme 1.2, p. 85]). Rappelons que si K est un corps, v est une valuation discrète sur K et F est le corps résiduel de K pour v, on a le lemme suivant :

LEMME 7.2.2. — *Fixons une uniformisante π de v. Il existe un unique homomorphisme $\psi^\pi : W(K) \to W(F)$ (dépendant de π) tel que*

$$\psi^\pi([K,\lambda\pi^n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ [F,\overline{\lambda}] & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. — Voir [**MH73**, *loc. cit.*]. □

Soit π une uniformisante pour v. Pour tout F-espace vectoriel V de dimension finie on a un isomorphisme

$$\alpha_V^\pi : \mathrm{Hom}_F(V,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(V,B)$$

défini de la manière suivante : si $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V,F)$, alors $\alpha^\pi(\varphi)$ est le pull-back du complexe de Koszul $Kos(\pi)$ par φ

$$\begin{tikzcd}
\alpha^\pi(\varphi) : & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \\
Kos(\pi) : & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & k \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On vérifie que α^π induit un isomorphisme

$$\phi^\pi : W(F) \longrightarrow W^{lf}(B).$$

LEMME 7.2.3. — *Le diagramme suivant commute pour tout choix d'une uniformisante π pour v*

$$\begin{tikzcd}
W(K) \arrow[r, "\psi^\pi"] \arrow[d, equal] & W(F) \arrow[d, "\phi^\pi"] \\
W^{lf}(K) \arrow[r, "d"'] & W^{lf}(B)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Utilisant les lemmes 7.2.1 et 7.2.2, il suffit de démontrer que $\phi^{\pi}(1) = \rho$. Cela provient du fait que $\alpha^{\pi}(1) = Kos(\pi)$. ☐

Supposons maintenant que L soit un B-module inversible quelconque sur un anneau B local régulier de dimension 1. Notons comme ci-dessus F le corps résiduel de B et K son corps des fractions. Tout choix d'un générateur l de L donne un isomorphisme de foncteurs

$$\eta_l : \mathrm{Hom}_B(\_\,, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\_\,, L).$$

On obtient donc un isomorphisme de complexes (avec les mêmes notations que ci-dessus)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W(K) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & W^{lf}(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W(K, L \otimes K) \arrow[r, "d"] & W^{lf}(B, L) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Si B est la localisation d'une algèbre lisse sur un corps k, on obtient en particulier pour $L = \omega_{B/k}$ et le choix d'un générateur ξ de $\omega_{B/k}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W(K) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & W^{lf}(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W(K, \omega_{K/k}) \arrow[r, "d"] & W^{lf}(B, \omega_{B/k}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On sait de plus qu'on dispose d'un isomorphisme (proposition E.2.1)

$$W(F, \omega_{F/k}) \longrightarrow W^{lf}(B, \omega_{B/k}).$$

On peut ainsi calculer la différentielle

$$d' : W(K, \omega_{K/k}) \longrightarrow W(F, \omega_{F/k}).$$

Soit $\varphi : K \to \mathrm{Hom}_K(K, \omega_{K/k})$ un isomorphisme. Supposons $\varphi(1)(1) = f\xi$. Comme ci-dessus, on peut supposer que $f \in B$ et $f = \lambda\pi^n$ pour une uniformisante π de x (où x est l'idéal maximal de B). Si n est pair, on sait que $d([K, \varphi]) = 0$. Si n est impair, le lemme 7.2.1 et le diagramme ci-dessus montrent que $d([K, \varphi])$ est l'isomorphisme

$$\rho : F \longrightarrow \omega_{F/k} \simeq \omega_{B/k} \otimes (x/x^2)^*$$

défini par $\rho(1) = \overline{\lambda}(\xi \otimes \pi^*)$. Utilisant l'isomorphisme

$$W(F, \omega_{F/k}) \longrightarrow W^{lf}(B, \omega_{B/k})$$

on voit que $d([K, \varphi])$ est l'isomorphisme

$$\phi : F \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(F, \omega_{F/k})$$

défini par $\phi(1)(1) = \overline{\lambda}(\xi \otimes \pi^*)$.

7.3. Le cas général

Supposons maintenant que X soit un schéma lisse sur un corps k. Soit $x \in X^{(p)}$ et $y \in X^{(p+1)}$. On va calculer

$$d : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k}).$$

Localisant en y et utilisant le fait que cette localisation donne un morphisme de complexes (théorème 3.4.7), on voit que si $y \notin \overline{\{x\}}$ alors $d = 0$. Supposons donc que $y \in \overline{\{x\}}$. On peut supposer que X est le spectre d'un anneau local d'idéal maximal y tel que $x \in \operatorname{Spec}(A)_{(1)}$. La projection usuelle

$$\pi : A \longrightarrow A/x$$

induit un morphisme fini

$$p : \operatorname{Spec}(A/x) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A).$$

Supposons dans un premier temps que A/x est régulier. Puisque p est fini entre deux schémas réguliers qui sont des localisations de schémas lisses, on obtient un morphisme (de complexes) entre le complexe de Gersten-Witt associé à A et celui associé à A/x.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{z \in \operatorname{Spec}(A)^{(1)}} W(k(z), \omega_{k(z)/k}) \arrow[r] & W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[r] \arrow[u] & W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0.
\end{tikzcd}$$

Or A/x est régulier local de dimension 1. Choisissant un générateur ξ de $\omega_{(A/x)/k}$ on sait que tout isomorphisme

$$\varphi : k(x) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{k(x)}(k(x), \omega_{k(x)/k})$$

est de la forme

$$\varphi(1)(1) = f\xi$$

pour un certain $f \in A/x$. On a vu plus haut (lemme 7.2.1) que

$$d([k(x), \varphi]) = 0$$

si la valuation de f est paire et

$$d([k(x), \varphi]) = [k(y), \phi]$$

si la valuation de f est impaire, où ϕ donné par $\phi(1)(1) = \overline{\lambda}(\xi \otimes \pi^*)$.

Supposons maintenant que A/x ne soit pas régulier. On considère alors la clôture intégrale B de A/x dans $k(x)$. On a alors que l'inclusion

$$i : A/x \longrightarrow B$$

est un homomorphisme fini. La composition

$$A \longrightarrow A/x \longrightarrow B$$

donne un morphisme fini

$$p' : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

Par ailleurs, B est un anneau semi-local de dimension 1 régulier sur k. Il est facile de voir que B est la (semi-)localisation d'une algèbre lisse sur k de corps des fractions $k(x)$. On a donc un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{z\in \mathrm{Spec}(A)^{(1)}} W(k(z),\omega_{k(z)/k}) & \xrightarrow{\ d\ } & W(k(y),\omega_{k(y)/k}) & \longrightarrow & 0 \\
& \uparrow & & \uparrow \scriptstyle{\sum \theta_{k(u)}^{k(y)}} & & \\
0 \longrightarrow & W(k(x),\omega_{k(x)/k}) & \xrightarrow{\ d_B\ } & \displaystyle\bigoplus_{u\in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} W(k(u),\omega_{k(u)/k}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Choisissons un générateur ξ de $\omega_{B/k}$. On sait que tout isomorphisme

$$\varphi : k(x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k(x)}(k(x),\omega_{k(x)/k})$$

est de la forme

$$\varphi(1)(1) = f\xi$$

pour un $f \in B$. Notons $v_u(f)$ la valuation u-adique de f pour tout u dans $\mathrm{Spec}(B)^{(1)}$. Choisissons pour tout u une uniformisante $\pi(u)$. On sait que pour tout u, on peut écrire

$$f = \lambda(u)\pi(u)^{v_u(f)}$$

avec $\lambda(u) \in B_u^*$. On a donc

$$d_B([k(x),\varphi]) = \sum_{\{u\in \mathrm{Spec}(B)^{(1)} | v_u(f) \text{ impaire}\}} [k(u),\phi(u)]$$

où

$$\phi(u) : k(u) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k(u)}(k(u),\omega_{k(u)/k})$$

est définie par

$$\phi(u)(1)(1) = \overline{\lambda(u)}(\xi \otimes \pi(u)^*).$$

Comme $k(u)$ est finie sur $k(y)$ pour tout u, on a

$$d([k(x),\varphi]) = \sum \theta_{k(u)}^{k(y)} d_B([k(x),\varphi]) = \sum_{v_u(f) \text{ impaire}} \theta_{k(u)}^{k(y)}([k(u),\phi(u)]).$$

Remarque 7.3.1. — Dans [**Sch97**], l'auteur définit un complexe de Gersten-Witt associé à un schéma noethérien grâce à des homomorphismes résidus

$$d : W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y),\omega_{k(y)/k})$$

pour tout $x \in X^{(p)}$ et $y \in X^{(p+1)}$ qui coïncident avec ceux calculés ci-dessus.

CHAPITRE 8

LE MORPHISME DE TRANSFERT POUR LES MORPHISMES PROPRES

8.1. Résumé

Soient X, Y des schémas lisses et

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme propre. Nous définissons tout d'abord en chaque degré un homomorphisme

$$f_* : C^i(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C^i(Y, W, \omega_{Y/k})$$

qui coïncide avec le morphisme de transfert défini dans le chapitre 6 lorsque f est fini. Nous montrons ensuite que lorsque $X = \mathbb{P}^1_F$ et $Y = \mathrm{Spec}(F)$, le morphisme

$$f_* : C(\mathbb{P}^1_F, W, \omega_{\mathbb{P}^1_F/k}) \longrightarrow C(\mathrm{Spec}(F), W, \omega_{F/k})$$

est un morphisme de complexes. Ce premier pas nous permet finalement de démontrer que

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k})$$

est un morphisme de complexes pour tout X et tout Y.

8.2. Définition

Soient X et Y des schémas lisses sur un corps k et

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme propre. Supposons que $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$. On définit une application

$$f_* : C^i(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C^{i+m-n}(Y, W, \omega_{Y/k})$$

de la manière suivante.

Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Si $k(y) \subset k(x)$ est une extension finie, rappelons qu'on dispose d'un homomorphisme canonique (théorème 6.4.13)

$$\theta_x^{f(x)} : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(y), \omega_{k(y)/k}).$$

On pose alors

$$f_* = \theta_x^{f(x)}.$$

Si $k(y) \subset k(x)$ est une extension infinie, on pose

$$f_* = 0.$$

REMARQUE 8.2.1. — Si $f : X \to Y$ est un morphisme fini, alors on voit que la définition de f_* donnée ci-dessus coïncide avec la définition donnée dans le chapitre 6.

8.3. Le morphisme de complexes

On va tout d'abord démontrer que si $X = \mathbb{P}^1_F$, $Y = \mathrm{Spec}(F)$ et

$$f : \mathbb{P}^1_F \longrightarrow \mathrm{Spec}(F)$$

est la projection usuelle, l'application f_* est un morphisme de complexes. Il faut donc démontrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} W(F(t), \omega_{F(t)/k}) \arrow[r, "d_{\mathbb{P}^1_F}"] \arrow[d] & \bigoplus_{x \in {\mathbb{P}^1_F}^{(1)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[d, "\sum \theta_x"] \\ 0 \arrow[r] & W(F, \omega_{F/k}). \end{tikzcd}$$

Cela revient évidemment à démontrer que $(\sum \theta_x) d_{\mathbb{P}^1_F} = 0$.

Choisissons un générateur ξ de $\omega_{F/k}$. On voit alors que $\xi \wedge dt$ engendre $\omega_{F(t)/k}$. Considérons un isomorphisme

$$\varphi : F(t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F(t)}(F(t), \omega_{F(t)/k}).$$

À un carré près, on peut supposer que $\varphi(1)(1) = g \cdot \xi \wedge dt$ pour un polynôme $g \in F[t]$ de degré n tel que $g = g_1 \dots g_m$ pour des $g_i \in F[t]$ irréductibles et premiers entre eux. Supposons que l'un des g_i soit inséparable sur F et posons $L = F[X]/g_i$. On a alors le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_L \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_F \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(L) \arrow[r, "f"'] & \mathrm{Spec}(F). \end{tikzcd}$$

Comme f et h sont finis, ils induisent des morphismes de complexes
$$h_* : C(\mathbb{P}^1_L, W, \omega_{\mathbb{P}^1_L/k}) \longrightarrow C(\mathbb{P}^1_F, W, \omega_{\mathbb{P}^1_F/k})$$
et
$$f_* : W(L, \omega_{L/k}) \longrightarrow W(F, \omega_{F/k}).$$
Comme l'extension L/F est purement inséparable, le théorème 6.4.13 montre que f_* est un isomorphisme. Pour les mêmes raisons, la première composante de h_*
$$h_* : W(L(t), \omega_{L(t)/k}) \longrightarrow W(F(t), \omega_{F(t)/k})$$
est un isomorphisme. Utilisant ceci, on en déduit que si $(\sum \theta_x)d_{\mathbb{P}^1_L} = 0$ alors on a aussi $(\sum \theta_x)d_{\mathbb{P}^1_F} = 0$. On peut ainsi supposer dans la suite que chaque polynôme g_i est séparable sur F. Dans ces conditions, un générateur ξ de $\omega_{F/k}$ est aussi un générateur de $\omega_{k(g_i)/k}$. Par la section 7.2, on sait que
$$d_{\mathbb{P}^1_F|g_1} : W(F(t), \omega_{F(t)/k}) \longrightarrow W(k(g_1), \omega_{k(g_1)/k})$$
est donné par
$$d_{\mathbb{P}^1_F|g_1}([F(t), \varphi]) = [k(g_1), \phi]$$
avec $\phi : k(g_1) \to \mathrm{Hom}_{k(g_1)}(k(g_1), \omega_{k(g_1)/k})$ défini par
$$\phi(1)(1) = \overline{g_2}\dots\overline{g_m} \cdot (\xi \wedge dt) \otimes (g_1)^*.$$
Comme $dt = \frac{1}{g_1'}dg_1$, on obtient
$$\phi(1)(1) = \frac{1}{g_1'} \cdot \overline{g_2}\dots\overline{g_m} \cdot \xi.$$
Pour calculer
$$d_{\mathbb{P}^1_F|\infty} : W(F(t), \omega_{F(t)/k}) \longrightarrow W(F, \omega_{F/k})$$
il suffit de remarquer que si $x = 1/t$, alors $x^n g = 1$ (où n est le degré de g) dans le corps résiduel de l'infini. On trouve donc
$$d_{\mathbb{P}^1_F|\infty}([F(t), \varphi]) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ [F, \psi] & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
avec
$$\psi(1)(1) = 1 \cdot (\xi \wedge dt) \otimes (x)^*.$$
Comme $dt = \frac{-1}{x^2}dx$, on trouve
$$\psi(1)(1) = -1 \cdot \xi.$$
Avec le choix des générateurs ξ et $\xi \wedge dt$, on obtient ainsi le diagramme suivant :
$$\begin{array}{ccc} W(F(t)) & \xrightarrow{d_{\mathbb{P}^1_F}} & \bigoplus_{x \in {\mathbb{P}^1_F}^{(1)}} W(k(x)) \\ & & \Big\downarrow \sum \theta_x \\ & & W(F) \end{array}$$

où

$$d_{\mathbb{P}^1_F}([F(t),g]) = \sum_i \left[k(g_i), \frac{1}{g_i'} \cdot \overline{g_1} \dots \overline{g_i}^{\vee} \dots \overline{g_m}\right] + [F,-1]$$

si n est impair et

$$d_{\mathbb{P}^1_F}([F(t),g]) = \sum_i \left[k(g_i), \frac{1}{g_i'} \cdot \overline{g_1} \dots \overline{g_i}^{\vee} \dots \overline{g_m}\right]$$

sinon. Par ailleurs, on a

$$\left[k(g_i), \frac{1}{g_i'} \cdot \overline{g_1} \dots \overline{g_i}^{\vee} \dots \overline{g_m}\right] = \left[k(g_i), \frac{1}{\overline{g_i'} \cdot \overline{g_1} \dots \overline{g_i}^{\vee} \dots \overline{g_m}}\right].$$

et

$$\frac{1}{\overline{g'}} = \frac{1}{\overline{g_i'} \cdot \overline{g_1} \dots \overline{g_i}^{\vee} \dots \overline{g_m}}$$

dans $k(g_i)$. Ainsi

$$d_{\mathbb{P}^1_F}([F(t),g]) = \sum_i \left[k(g_i), \frac{1}{\overline{g'}}\right] + [F,-1]$$

si n est impair et

$$d_{\mathbb{P}^1_F}([F(t),g]) = \sum_i \left[k(g_i), \frac{1}{\overline{g'}}\right]$$

si n est pair. On aura besoin du lemme suivant (voir [**Ser68**, lemme 2, p. 65]) :

Lemme 8.3.1. — *Soit K un corps et $g \in K[x]$ un polynôme unitaire de degré n dont toutes les racines sont distinctes dans un corps de rupture de g. Alors*

$$tr_{K[x]/K}\left(\frac{x^i}{g'(x)}\right) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq i \leq n-2 \\ 1 & si\ i = n-1 \end{cases}$$

Démonstration. — Soient $x_1, \dots, x_n$ les racines de g dans un de ses corps de rupture L. Comme

$$L[x]/g \simeq L \times \dots \times L$$

admet une base orthogonale, il suffit de calculer

$$\sum_k \frac{(x_k)^i}{f'(x_k)}$$

pour obtenir la trace de $x^i/g'(x)$. Soit T un transcendant sur L. Comme les $(T - x_k)$ sont premiers entre eux dans $L[T]$, on peut écrire $1/g(T)$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{g(T)} = \sum_k \frac{1}{g'(x_k)(T - x_k)}.$$

Par ailleurs, le développement de $1/g(T)$ en puissances de $1/T$ donne

$$\frac{1}{g(T)} = \frac{1}{T^n} + \frac{a_1}{T^{n+1}} + \dots.$$

Les développements des $1/g'(x_k)(T-x_k)$ donnent

$$\frac{1}{g'(x_k)(T-x_k)} = \frac{1}{g'(x_k)T} + \frac{x_k}{g'(x_k)T^2} + \cdots + \frac{(x_k)^{n-1}}{g'(x_k)T^n} + \cdots.$$

Il suffit de comparer dans la première équation les termes de même degré donnés par les deuxièmes et troisièmes équations pour conclure. □

Ce lemme permet de calculer

$$\sum \theta_{g_i}\Big(\sum [k(g_i), \frac{1}{g'}]\Big).$$

En effet, $\theta_{g_i}([k(g_i), \frac{1}{g'}])$ est la forme bilinéaire symétrique

$$\mu_i : k(g_i) \times k(g_i) \longrightarrow F$$

définie par $\mu_i(a,b) = tr_{k(g_i)/k}(\frac{1}{g'}ab)$ pour tous $a, b \in k(g_i)$. En choisissant une bonne base de $k(g_1) \times \cdots \times k(g_m)$, on voit que la forme bilinéaire symétrique $\sum \theta_{g_i}(\sum [k(g_i), \frac{1}{g'}])$ est définie par

$$\mu : (k(g_1) \times \cdots \times k(g_m)) \times (k(g_1) \times \cdots \times k(g_m)) \longrightarrow L$$

avec $\mu((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) = \sum tr_{k(g_i)/k}(\frac{1}{g'}a_i b_i)$. Or

$$k(g_1) \times \cdots \times k(g_m) \simeq F[t]/g$$

et donc la base $1, t, \ldots, t^{n-1}$ de $F[t]/g$ est aussi une base de $k(g_1) \times \cdots \times k(g_m)$. Au vu du lemme ci-dessus, la forme μ est donnée dans cette base par la matrice

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & * \\ \vdots & 0 & \iddots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que cette forme est triviale dans le groupe de Witt si g est de degré pair, et équivalente à $[F, 1]$ si g est de degré impair. On obtient ainsi

$$\sum \theta_{g_i}\Big(\sum [k(g_i), \frac{1}{g'}]\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ est de degré pair} \\ \text{[F,1]} & \text{si } g \text{ est de degré impair.} \end{cases}$$

Rappelons qu'on avait calculé que

$$d_{\mathbb{P}^1_F}([F(t), g]) = \begin{cases} \sum [k(g_i), \frac{1}{g'}] & \text{si } g \text{ est de degré pair} \\ \\ \sum [k(g_i), \frac{1}{g'}] + [F, -1] & \text{si } g \text{ est de degré impair.} \end{cases}$$

On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 8.3.2. — *Soit F un corps et $f : \mathbb{P}^1_F \to \mathrm{Spec}(F)$ la projection usuelle. Alors*

$$f_* : C(\mathbb{P}^1_F, W, \omega_{\mathbb{P}^1_F/k}) \longrightarrow C(\mathrm{Spec}(F), W, \omega_{F/k})$$

est un morphisme de complexes.

COROLLAIRE 8.3.3. — *Soient X et Y des schémas lisses de dimensions respectives n et m. Supposons $n = m + 1$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et surjectif. Notons ξ et η les points génériques de X et Y. Alors la composition*

$$\begin{tikzcd} W(k(\xi), \omega_{k(\xi)/k}) \arrow[r, "d_X"] & \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(1)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[d, "f_*"] \\ & W(k(\eta), \omega_{k(\eta)/k}) \end{tikzcd}$$

est nulle.

Démonstration. — Considérons le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Spec}(k(\eta)) \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Comme f est propre et cette propriété est stable par changement de base, g est également propre. Alors X_η est de dimension 1, intègre de corps des fractions $k(\xi)$. De plus, X_η est régulier. En effet, cette propriété étant locale on peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $X_\eta = \mathrm{Spec}(B \otimes_A k(\eta))$. Comme f est surjectif, on voit que le morphisme $\phi : A \to B$ induit par f est injectif. Ainsi, $\phi(A) \setminus 0$ est une partie multiplicative et $B \otimes_A k(\eta) \simeq (\phi(A) \setminus 0)^{-1}B$.

On voit que le complexe de Gersten-Witt associé à X_η :

$$0 \longrightarrow W(k(\xi), \omega_{k(\xi)/k}) \xrightarrow{d_{X_\eta}} \bigoplus_{x \in X_\eta^{(1)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow 0$$

coïncide avec le début du complexe de Gersten-Witt associé à X. Pour montrer le lemme, on est donc ramené au cas où X est une courbe régulière sur $Y = \mathrm{Spec}(F)$ et $f : X \to \mathrm{Spec}(F)$ est propre. Dans ces conditions, il existe un morphisme fini

$$g : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_F.$$

En effet, comme X et Y sont de type fini sur un corps k, on peut supposer que $F = k(t_1, \ldots, t_d, t_{d+1}, \ldots, t_n)$ où $t_1, \ldots, t_d$ forment une base de transcendance de F

sur k. Soit $U = \mathrm{Spec}(C)$ un ouvert affine de X. Par hypothèse, $\dim(X) = \dim(Y) + 1$. On peut donc supposer que $C = F[t, x_1, \dots, x_m]/I$ et C est entier sur $F[t]$. On a ainsi un morphisme fini

$$h : U \longrightarrow \mathrm{Spec}(F[t]) \subset \mathbb{P}^1_F.$$

Comme X est de dimension 1, $X \setminus U$ est constitué d'un nombre fini de points. Si $x \in X$, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. De plus $F(t) \subset k(\xi)$ et on a la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k(\xi)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_F \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(F).
\end{tikzcd}$$

Par le critère de propreté, il existe un unique morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \mathbb{P}^1_F$$

tel que le diagramme commute. On peut ainsi étendre le morphisme

$$h : U \longrightarrow \mathbb{P}^1_F$$

à $U \cup x$. Procédant de même pour tout $x \in X \setminus U$, on voit qu'il existe un morphisme

$$g : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_F.$$

Par construction, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^1_F \arrow[d, "p"] \\
& \mathrm{Spec}(F)
\end{tikzcd}$$

Comme p et f sont propres, g est propre ([**Gro67a**, corollaire 5.4.3, p. 101]). De plus, la fibre au-dessus de chaque point $y \in \mathbb{P}^1_F$ est le spectre d'une $k(y)$-algèbre finie. Il s'ensuit que g est fini ([**Gro67b**, proposition 4.4.2, p. 137]). On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
W(k(\xi), \omega_{k(\xi)/k}) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "g_*"'] & \displaystyle\bigoplus_{x \in X^{(1)}} W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[d, "g_*"] \\
W(F(t), \omega_{F(t)/k}) \arrow[r, "d_{\mathbb{P}^1_F}"] & \displaystyle\bigoplus_{y \in {\mathbb{P}^1_F}^{(1)}} W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \arrow[d, "p_*"] \\
& W(F, \omega_{F/k}).
\end{tikzcd}$$

La composition $p_*d_{\mathbb{P}^1_F}$ est nulle par le théorème précédent. Donc $p_*g_*d_X = 0$. Or $p_*g_* = f_*$. D'où le résultat. $\square$

Ce corollaire et le fait que si $f : X \to Y$ est fini alors f_* est un morphisme de complexes (voir le corollaire 4.4.4) nous permet de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 8.3.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre des schémas lisses sur un corps k. Alors*

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k})$$

est un morphisme de complexes.

Démonstration. — Posons $n = \dim(X)$ et $m = \dim(Y)$. On doit démontrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f_*"'] & \bigoplus_{v\in X^{(p+1)}} W(k(v),\omega_{k(v)/k}) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \bigoplus_{y\in Y^{(p+m-n)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k}) \arrow[r, "d_Y"] & \bigoplus_{z\in Y^{(p+m-n+1)}} W(k(z),\omega_{k(z)/k}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pour ce faire, il suffit de démontrer que pour tout $z \in Y^{(p+m-n+1)}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in X^{(p)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f_*"'] & \bigoplus_{v\in X^{(p+1)}} W(k(v),\omega_{k(v)/k}) \arrow[d, "f_*"] \\
\bigoplus_{y\in Y^{(p+m-n)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k}) \arrow[r, "d_Y"] & W(k(z),\omega_{k(z)/k}).
\end{tikzcd}$$

Considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z}) \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Comme f est propre et que cette propriété est stable par changement de base, g est propre. On voit de plus que dans ce cas on a pour tout $q \leq p$ et tout $\alpha \in \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k})$ l'égalité

$$j^*f_* = g_*i^*$$

dans $\bigoplus_{y\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z})^{(q+m-n)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k})$. Pour montrer que

$$d_Y f_* - f_* d_X : \bigoplus_{x\in X^{(p)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(z),\omega_{k(z)/k})$$

est nulle, il suffit de démontrer que

$$j^*(d_Y f_* - f_* d_X) = 0.$$

Or

$$j^* d_Y f_* = d_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z})} j^* f_* = d_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z})} g_* i^*.$$

Si on arrive à démontrer que g_* est un morphisme de complexes, alors

$$d_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z})} g_* i^* = g_* d_{X'} i^* = g_* i^* d_X = j^* f_* d_X.$$

Il suffit donc de démontrer que dans la situation où X est régulier, Y régulier local et $g : X \to Y$ est propre, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in X^{(q)}} W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "g_*"'] & \bigoplus_{v\in X^{(q+1)}} W(k(v),\omega_{k(v)/k}) \arrow[d, "g_*"] \\
\bigoplus_{y\in Y_{(1)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k}) \arrow[r, "d_Y"] & W(k(z),\omega_{k(z)/k})
\end{tikzcd}$$

commute. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $x \in X^{(q)}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
W(k(x),\omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "g_*"'] & \bigoplus_{v\in X^{(q+1)}} W(k(v),\omega_{k(v)/k}) \arrow[d, "g_*"] \\
\bigoplus_{y\in Y_{(1)}} W(k(y),\omega_{k(y)/k}) \arrow[r, "d_Y"] & W(k(z),\omega_{k(z)/k}).
\end{tikzcd}$$

Soit donc $x \in X^{(q)}$ tel que $\dim(\overline{\{x\}}) = 1$ et $y = f(x)$. Par définition de X', on voit que $z \in \overline{\{y\}}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\{x\}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \overline{\{y\}} \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Remarquons que g est propre et que i et j sont finis. On distingue alors plusieurs cas.

Supposons que $z = y$. Alors le diagramme ci-dessus est

$$\begin{tikzcd} \overline{\{x\}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \operatorname{Spec}(k(z)) \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{X}$ la normalisation de $\overline{\{x\}}$ dans son corps des fractions. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "l"'] & \operatorname{Spec}(k(z)) \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

où $\tilde{X}$ est régulier, h est propre, l et j sont finis. Par le chapitre 3, on sait que l_* et j_* sont des morphismes de complexes. Par le corollaire 8.3.3, on a $h_* d_{\tilde{X}} = 0$. Montrons que

$$f_* d_X - d_Y f_* : W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \longrightarrow W(k(z), \omega_{k(z)/k})$$

est nulle. Comme $\tilde{X}$ et X ont le même corps des fractions, on a $d_X = l_* d_{\tilde{X}}$. Donc

$$f_* d_X = f_* l_* d_{\tilde{X}} = j_* h_* d_{\tilde{X}} = 0.$$

Par définition, $d_Y f_* = 0$. Cela clôt le cas où $f(x) = z$.

Supposons maintenant que $z \neq y$. On considère le même diagramme que ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} \overline{\{x\}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \overline{\{y\}} \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ les normalisations de $\overline{\{x\}}$ et $\overline{\{y\}}$ dans leurs corps des fractions. Le morphisme g se relève en un morphisme $\tilde{g}$, qui est également propre (voir [**Ful84**, proposition 1.4, p. 13]). On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "l"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "r"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec l et r finis et f et $\tilde{g}$ propres. Comme les fibres de $\tilde{g}$ sont finies, on voit que $\tilde{g}$ est fini. Donc l_*, r_* et $\tilde{g}_*$ sont des morphismes de complexes. On obtient donc

$$f_* d_X = f_* l_* d_{\tilde{X}} = r_* \tilde{g}_* d_{\tilde{X}} = r_* d_{\tilde{Y}} \tilde{g}_* = d_Y r_* \tilde{g}_* = d_Y f_* l_*.$$

Or $\tilde{X}$ et X ont le même corps des fractions. Donc $d_Y f_* l_* = d_Y f_*$. $\square$

On démontre facilement la proposition suivante :

Proposition 8.3.5. — *Soient* X, Y, Z *des schémas lisses sur* k *de dimensions respectives* n, m, k , $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *des morphismes propres. Alors les morphismes*

$$f_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, W, \omega_{Y/k}),$$
$$g_* : C(Y, W, \omega_{Y/k}) \longrightarrow C(Z, W, \omega_{Z/k})$$

et

$$(gf)_* : C(X, W, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Z, W, \omega_{Z/k})$$

satisfont $(gf)_* = g_* f_*$.

CHAPITRE 9

COMPLEXE DE GERSTEN-WITT ET IDÉAUX FONDAMENTAUX

9.1. Résumé

Dans ce chapitre, nous commençons par définir l'idéal fondamental de $W^{lf}(B)$ pour un anneau local régulier B. Nous montrons ensuite que si X est régulier, les différentielles du complexes $C(X, W)$ se comportent bien avec les puissances de cet idéal. Nous obtenons ainsi pour tout $j \in \mathbb{Z}$ un complexe

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} I^{j-p}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} I^{j-(p+1)}(\mathcal{O}_{X,z}) \longrightarrow \ldots$$

noté $C(X, I^j)$ et un complexe

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} I^{j-p}/I^{j-p+1}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} I^{j-(p+1)}/I^{j-p}(\mathcal{O}_{X,z}) \longrightarrow \ldots$$

noté $C(X, I^j/I^{j+1})$. Utilisant les résultats des chapitres précédents, nous montrons ensuite que ces complexes satisfont de bonnes propriétés fonctorielles. Si

$$f : Y \longrightarrow X$$

est plat, nous obtenons des morphismes de complexes

$$f^* : C(X, I^j) \longrightarrow C(Y, I^j)$$

et

$$f^* : C(X, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow C(Y, I^j/I^{j+1}).$$

Si

$$f : X \longrightarrow Y$$

est propre, nous obtenons des morphismes de complexes

$$f_* : C(X, I^j) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n})$$

et

$$f_* : C(X, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n}/I^{j+m-n+1})$$

où $m = \dim(Y)$ et $n = \dim(X)$.

9.2. Différentielles et idéaux fondamentaux

Si B est un anneau régulier local de dimension n et de corps résiduel F, on sait (proposition E.2.1) que le choix d'un générateur β de $\mathrm{Ext}^n_B(F, B)$ induit un isomorphisme

$$\phi_\beta : W(F) \longrightarrow W^{lf}(B)$$

Il est facile de montrer que le sous-groupe $\phi_\beta(I^m(F))$ de $W_{lf}(B)$ ne dépend pas du choix du générateur β de $\mathrm{Ext}^n_B(F, B)$ (lemme E.1.2).

Définition 9.2.1. — *On définit le m-ième idéal fondamental $I^{lf}_m(B)$ de $W^{lf}(B)$ par*

$$I^{lf}_m(B) = \phi_\beta(I^m(F))$$

pour n'importe quel générateur β de $\mathrm{Ext}^n_B(F, B)$.

Remarque 9.2.2. — Dans ce qui suit, nous écrirons systématiquement $I(B)$ au lieu de $I^{lf}(B)$ et $I^m(B)$ au lieu de $I^{lf}_m(B)$.

Lemme 9.2.3. — *Soit B un anneau régulier local de dimension 1. Alors pour tout m on a*

$$d(I^m(B_{(0)})) \subset I^{m-1}(B).$$

Démonstration. — On sait que pour tout corps valué K de corps résiduel F et tout choix d'une uniformisante π l'homomorphisme du lemme 7.2.2

$$\psi^\pi : W(K) \longrightarrow W(F)$$

induit des surjections ([**MH73**, lemme 1.4, p. 86])

$$\psi^\pi_n : I^n(K) \longrightarrow I^{n-1}(F).$$

Le résultat découle alors directement du lemme 7.2.3. □

Théorème 9.2.4. — *Soit X un schéma noethérien régulier de dimension n et*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

son complexe de Gersten-Witt. Soit encore $x \in X^{(p)}$. On a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$d_X\left(I^m(\mathcal{O}_{X,x})\right) \subset \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} I^{m-1}(\mathcal{O}_{X,y}).$$

Démonstration. — Soit $z \in X^{(p+1)} \cap \overline{x}$. On veut calculer $(d_X)_z^x$. On peut comme d'habitude supposer que $X = \mathrm{Spec}(A_z)$ et que $x \in \mathrm{Spec}(A_z)^{(p)}$. Soient B la clôture intégrale de A_z/x dans $k(x)$, $i : A_z/x \to B$ l'inclusion et $\pi : A_z \to A_z/x$ la projection canonique. Notons f la composition de π et de i. Alors $f : A_z \to B$ est un morphisme fini et on a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[r, "(d_X)_z^x"] & W^{lf}(\mathcal{O}_{X,z}) \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}, L_x) \arrow[r, "d_B"] \arrow[u, "f_*"] & \bigoplus_{y \in B^{(1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}, L_y) \arrow[r] \arrow[u, "f_*"] & 0
\end{tikzcd}$$

pour $L = \mathrm{Ext}^p_{A_z}(B, A_z)$. À isomorphisme près ce diagramme est en fait :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "(d_X)_z^x"] & W(k(z), \omega_{k(z)/k}) \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & W(k(x), \omega_{k(x)/k}) \arrow[r, "d_B"] \arrow[u, "\Theta_{k(x)/k(x)}"'] & \bigoplus_{y \in B^{(1)}} W(k(y), \omega_{k(y)/k}) \arrow[r] \arrow[u, "\oplus\Theta_{k(y)/k(z)}"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle du lemme 9.2.3 et du fait que les homomorphismes θ préservent les idéaux fondamentaux ([**Sch85**, corollaire 14.9, p. 93]). □

REMARQUE 9.2.5. — Le fait que les différentielles du complexe de Gersten-Witt préservent les idéaux fondamentaux a récemment été démontré dans un cadre plus général par S. Gille (voir [**Gil07b**]).

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m < 0$, on pose $I^m(\mathcal{O}_{X,x}) = W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x})$. On a alors

COROLLAIRE 9.2.6. — *Soit X un schéma régulier de dimension n. On dispose pour tout $j \in \mathbb{Z}$ d'un complexe*

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} I^{j-p}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} I^{j-(p+1)}(\mathcal{O}_{X,z}) \longrightarrow \dots$$

DÉFINITION 9.2.7. — *Le complexe ci-dessus sera noté $C(X, I^j)$. Le i-ème degré de $C(X, I^j)$, noté $C^i(X, I^j)$, est le groupe abélien* $\bigoplus_{x \in X^{(i)}} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,x})$.

Si X est un schéma régulier et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors les calculs du chapitre 6 montrent qu'on a un complexe

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} I^{j-p}(\mathcal{O}_{X,x}, L_x) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} I^{j-(p+1)}(\mathcal{O}_{X,y}, L_y) \longrightarrow \dots$$

Définition 9.2.8. — *Le complexe ci-dessus sera noté $C(X, I^j, L)$. Le i-ème degré de $C(X, I^j, L)$, noté $C^i(X, I^j, L)$, est le groupe* $\bigoplus_{x \in X^{(i)}} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,x}, L_x)$.

L'inclusion $\iota : I^{m+1}(\mathcal{O}_{X,x}) \to I^m(\mathcal{O}_{X,x})$ pour tout x donne des morphismes de complexes

$$\iota : C(X, I^{j+1}) \longrightarrow C(X, I^j)$$

et

$$\iota_L : C(X, I^{j+1}, L) \longrightarrow C(X, I^j, L).$$

Remarque 9.2.9. — Le corollaire E.1.3 montre que les conoyaux de ι et ι_L sont canoniquement isomorphes.

Définition 9.2.10. — *On note $C(X, I^j/I^{j+1})$ le conoyau de ces morphismes.*

Remarque 9.2.11. — La i-ème composante $C^i(X, I^j/I^{j+1})$ de $C(X, I^j/I^{j+1})$ est le groupe abélien $\bigoplus_{x \in X^{(i)}} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,x})/I^{j-i+1}(\mathcal{O}_{X,x})$.

9.3. Fonctorialité

Rappelons que si $f : X \to Y$ est un morphisme plat entre schémas réguliers, on dispose pour tout j d'un morphisme de complexes (théorème 3.4.7)

$$f^* : C(Y, W) \longrightarrow C(X, W).$$

On va montrer que ce morphisme induit un morphisme

$$f^* : C(Y, I^j) \longrightarrow C(X, I^j).$$

Si A est un anneau de dimension n, régulier local d'idéal maximal x et de corps résiduel F alors le choix d'un générateur ρ de $\operatorname{Ext}^n_A(F, A)$ induit un isomorphisme (proposition E.2.1)

$$W(F) \simeq W^{lf}(A).$$

On obtient donc pour tout choix d'un générateur $\xi \in \operatorname{Ext}^n_A(F, A)$ une structure de $W(F)$-module sur $W^{lf}(A)$. En particulier, soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une suite régulière engendrant l'idéal maximal de A et notons $Kos(x_1, \ldots, x_n)$ le complexe de Koszul associé à cette suite. Notons encore

$$\rho : A/x \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(A/x, A)$$

la forme symétrique définie par $\rho(1) = Kos(x_1, \ldots, x_n)$. Avec ce choix de générateur, la structure de $W(F)$-module de $W^{lf}(A)$ est donnée par

$$[A/x, a] \cdot [A/x, \rho] = [A/x, a\rho].$$

Supposons maintenant que B soit une k-algèbre et $f : A \to B$ soit un homomorphisme d'anneaux obtenu par localisation d'un morphisme plat de k-algèbres de type fini. Soit y un idéal premier minimal contenant $f(x)B$. Alors B_y/xB_y est un B_y-module de longueur finie. Notons F' le corps résiduel de B_y en y et

$$\rho_{B_y} : B_y/xB_y \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{B_y}(B_y/xB_y, B_y)$$

la forme symétrique $\rho \otimes B_y$. On a le lemme suivant :

LEMME 9.3.1. — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} W(F) \arrow[r, "\cdot\rho"] \arrow[d, "\phi_*"'] & W^{lf}(A) \arrow[d, "f^*"] \\ W(F') \arrow[r, "\cdot\rho_{B_y}"'] & W^{lf}(B_y) \end{tikzcd}$$

où $\phi : k(x) \to k(y)$ est induit par f.

Démonstration. — Comme f^* préserve les sommes directes, il suffit de démontrer le résultat pour une forme $[A/x, \overline{\alpha}]$ où $\overline{\alpha}$ est la classe dans A/x d'un certain $\alpha \in A$. Considérons le complexe de Koszul $Kos(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha x_n)$ associé à la suite régulière $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha x_n)$ et l'isomorphisme symétrique

$$\rho' : A/x \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A/x, A)$$

défini par $\rho'(1) = Kos(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha x_n)$. Alors on voit que $[A/x, \overline{\alpha}] \cdot \rho = \rho'$ et que

$$(f^*)^x_y([A/x, \overline{\alpha}] \cdot \rho) = [B_y/x, \rho'_{B_y}].$$

Par ailleurs, on remarque que

$$[B_y/x, \rho'_{B_y}] = [k(y), \phi(\overline{\alpha})] \cdot [B_y/x, \rho_{B_y}]. \quad \square$$

COROLLAIRE 9.3.2. — *Soient X et Y des schémas réguliers de dimension finie et $f : X \to Y$ un morphisme plat de dimension relative constante q. Alors on a pour tout j un morphisme de complexe*

$$f^* : C(Y, I^j) \longrightarrow C(X, I^j)$$

induit par f^*.

Démonstration. — Il suffit de voir que f^* préserve les idéaux fondamentaux. Cela découle du lemme ci-dessus. $\square$

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre avec $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$. Le transfert usuel préservant les idéaux fondamentaux ([**Sch85**, corollaire 14.9, p. 93], on dispose d'un morphisme de complexes

$$f_* : C(X, I^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n}, \omega_{Y/k}).$$

Soit maintenant $U \subset X$ un ouvert et $Y = X \setminus U$ son complémentaire. Notons $\iota : U \to X$ et $\kappa : Y \to X$ les injections. On sait qu'on dispose d'un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)} \cap Y} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(p+1)} \cap Y} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

et donc pour tout j d'un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)} \cap Y} I^{j-p}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(p+1)} \cap Y} I^{j-(p+1)}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \cdots$$

Définition 9.3.3. — *On note $C(X, I^j)_Y$ le complexe ci-dessus. Le i-ème degré de $C(X, I^j)_Y$, noté $C^i(X, I^j)_Y$, est le groupe abélien $\bigoplus_{x \in X^{(i)} \cap Y} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,x})$.*

Pour tout i, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow C^i(X, I^j)_Y \longrightarrow C^i(X, I^j) \xrightarrow{\iota^*} C^i(U, I^j) \longrightarrow 0$$

et donc

Théorème 9.3.4. — *Soit X un schéma noethérien régulier de dimension n, $U \subset X$ un ouvert et $Y = X \setminus U$. On a une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow H^i(C(X, I^j)_Y) \longrightarrow H^i(C(X, I^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^i} H^i(C(U, I^j)) \xrightarrow{\partial^i}$$
$$\xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(C(X, I^j)_Y) \longrightarrow H^{i+1}(C(X, I^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^{i+1}} H^{i+1}(C(U, I^j)) \longrightarrow \cdots$$

Remarque 9.3.5. — Si Y est régulier, de codimension q alors Y est localement d'intersection complète dans X et

$$C_j(X, I^*)_Y \simeq C_{j-q}(Y, I^*, L)$$

où $L = \overline{\kappa}^* \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\kappa_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)$ pour $\kappa : Y \hookrightarrow X$ ([**Gil02**, théorème 4.1, p. 39]). La suite exacte longue ci-dessus devient donc

$$\cdots \longrightarrow H^{i-q}(C(Y, I^{j-q})) \longrightarrow H^i(C(X, I^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^i} H^i(C(U, I^j)) \xrightarrow{\partial^i}$$
$$\xrightarrow{\partial^i} H^{i-q+1}(C(Y, I^{j-q})) \longrightarrow H^{i+1}(C(X, I^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^{i+1}} H^{i+1}(C(U, I^j)) \longrightarrow \cdots$$

CHAPITRE 10

GROUPES DE CHOW-WITT D'UN SCHÉMA

10.1. Résumé

Suivant l'article de J. Barge et F. Morel (voir [**BM00**]), nous définissons les groupes de Chow-Witt d'un schéma. Pour ce faire, nous montrons tout d'abord que les homomorphismes défini par J. Milnor dans [**Mil70**]

$$s : K_n^M(F)/2K_n^M(F) \longrightarrow I^n(F)/I^{n+1}(F)$$

induisent pour tout schéma régulier X et tout $j \in \mathbb{N}$ un morphisme de complexes

$$s : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(X, I^j/I^{j+1}).$$

Nous définissons ensuite le complexe $C(X, G^j)$ comme étant le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} C(X,G^j) \arrow[r] \arrow[d] & C(X,I^j) \arrow[d, "p"] \\ C(X,K_j^M) \arrow[r, "s"'] & C(X,I^j/I^{j+1}). \end{tikzcd}$$

Le (j-ième) groupe de Chow-Witt de X est le groupe $H^j(C(X, G^j))$, noté $\widetilde{CH}^j(X)$. Nous remarquons que ces groupes satisfont les mêmes propriétés fonctorielles que les groupes de Chow usuels. Si Y est un fermé de X, nous définissons également les groupes de Chow-Witt à support dans Y, notés $\widetilde{CH}^j(X)_Y$. Si U est un ouvert de X et $Y = X \setminus U$, nous obtenons une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C(X, G^j)_Y \longrightarrow C(X, G^j) \longrightarrow C(U, G^j) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\ldots \longrightarrow H^i(C(X, G^j)_Y) \longrightarrow H^i(C(X, G^j)) \longrightarrow H^i(C(U, G^j)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{i+1}(C(X, G^j)_Y) \longrightarrow H^{i+1}(C(X, G^j)) \longrightarrow H^{i+1}(C(U, G^j)) \longrightarrow \ldots$$

Dans ce chapitre, nous donnons aussi un présentation explicite du groupe de Chow-Witt maximal $\widetilde{CH}^n(A)$ d'une k-algèbre lisse de dimension n. Cette présentation sera utilisée plus tard pour montrer qu'il existe des homomorphismes entre ce groupe de Chow-Witt et les groupes des classes d'Euler.

10.2. La définition des groupes de Chow-Witt

Soit X un schéma régulier de dimension finie. Rappelons qu'on a pour tout j les complexes suivants :

$$C(X, K_j^M): \qquad \dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(i-1)}} K_{j-i+1}^M(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{y\in X^{(i)}} K_{j-i}^M(k(y)) \longrightarrow \dots$$

$$C(X, I^j): \qquad \dots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(i-1)}} I^{j-i+1}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \bigoplus_{y\in X^{(i)}} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \dots$$

et $C(X, I^j/I^{j+1})$:

$$\dots \to \bigoplus_{x\in X^{(i-1)}} I^{j-i+1}(\mathcal{O}_{X,x})/I^{j-i+2}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \bigoplus_{y\in X^{(i)}} I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,y})/I^{j-i+1}(\mathcal{O}_{X,y}) \to \dots$$

Rappelons également qu'on dispose pour tout $j \in \mathbb{Z}$ d'un morphisme de complexes

$$C(X, I^j) \longrightarrow C(X, I^j/I^{j+1})$$

qui est en fait pour tout $z \in X^{(i)}$ la projection canonique

$$I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,z}) \longrightarrow I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,z})/I^{j-i+1}(\mathcal{O}_{X,z}).$$

Lemme 10.2.1. — *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Il existe un unique homomorphisme*

$$s_n : K_n^M(F)/2K_n^M(F) \longrightarrow I^n(F)/I^{n+1}(F)$$

tel que

$$s_n(\{a_1, \dots, a_n\}) = [1, -a_1] \otimes \dots \otimes [1, -a_n]$$

pour tous $a_1, \dots, a_n$ in $F^\times$.

Démonstration. — Voir [**Mil70**, théorème 4.1, p. 331]. □

Remarque 10.2.2. — Les travaux de Voevodsky (voir [**Voe03**]) montrent que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.

On obtient ainsi pour tout $z \in X^{(i)}$ un homomorphisme

$$K_{j-i}^M(k(z)) \longrightarrow I^{j-i}(k(z))/I^{j-i+1}(k(z)).$$

et donc une application

$$s : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(X, I^j/I^{j+1}).$$

On va montrer que s est en fait un morphisme de complexes. Considérons des extensions de corps $k \subset L \subset E$ telles que E/L soit finie. Notons comme d'habitude $\phi : L \to E$ l'inclusion. On dispose de deux homomorphismes (définition 2.2.4 et corollaire 6.4.14)

$$\phi_K^* : K_n^M(E) \longrightarrow K_n^M(L)$$

et

$$\phi_I^* : I^n(E, \omega_{E/k}) \longrightarrow I^n(L, \omega_{L/k})$$

qui induisent des homomorphismes

$$\overline{\phi}_K^* : K_n^M(E)/2K_n^M(E) \longrightarrow K_n^M(L)/2K_n^M(L)$$

et

$$\overline{\phi}_I^* : I^n(E, \omega_{E/k})/I^{n+1}(E, \omega_{E/k}) \longrightarrow I^n(L, \omega_{L/k})/I^{n+1}(L, \omega_{L/k}).$$

Les groupes $I^n(E, \omega_{E/k})/I^{n+1}(E, \omega_{E/k})$ et $I^n(L, \omega_{L/k})/I^{n+1}(L, \omega_{L/k})$ étant canoniquement isomorphes aux groupes $I^n(E)/I^{n+1}(E)$ et $I^n(L)/I^{n+1}(L)$ (voir le lemme E.1.3), le second homomorphisme est en fait un homomorphisme

$$\overline{\phi}_I^* : I^n(E)/I^{n+1}(E) \longrightarrow I^n(L)/I^{n+1}(L).$$

LEMME 10.2.3. — *Soient E et L comme ci-dessus. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
K_{n-1}^M(E)/2K_{n-1}^M(E) \arrow[r, "\overline{\phi}_K^*"] \arrow[d, "s_{n-1}"'] & K_{n-1}^M(L)/2K_{n-1}^M(L) \arrow[d, "s_{n-1}"] \\
I^{n-1}(E)/I^n(E) \arrow[r, "\overline{\phi}_I^*"'] & I^{n-1}(L)/I^n(L).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Notons $f : \mathbb{P}_L^1 \to \mathrm{Spec}(L)$ la projection usuelle. Le théorème 8.3.2 montre que la composition

$$W(L(t), \omega_{L(t)/L}) \xrightarrow{d_{\mathbb{P}_L^1}} \bigoplus_{x \in {\mathbb{P}_L^1}^{(1)}} W(L(x), \omega_{L(x)/L}) \xrightarrow{\sum (f_*)_x} W(L)$$

est nulle. Donc pour tout n la composition

$$I^n/I^{n+1}(L(t)) \xrightarrow{d_{\mathbb{P}_L^1}} \bigoplus_{x \in {\mathbb{P}_L^1}^{(1)}} I^{n-1}/I^n(L(x)) \xrightarrow{\sum (f_*)_x} I^{n-1}/I^n(L)$$

est nulle. Soit P l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $L[t]$. On dispose pour tout n d'une suite exacte scindée (voir théorème 2.2.3) :

$$0 \longrightarrow K_n^M(L) \longrightarrow K_n^M(L(t)) \xrightarrow{d_K} \bigoplus_{x \in P} K_{n-1}^M(L(x)) \longrightarrow 0$$

et donc d'une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow K_n^M/2K_n^M(L) \longrightarrow K_n^M/2K_n^M(L(t)) \xrightarrow{d_K} \bigoplus_{x\in P} K_{n-1}^M/2K_{n-1}^M(L(x)) \longrightarrow 0.$$

On vérifie tout d'abord que pour tout n le diagramme suivant commute (voir aussi [**Mil70**, corollaire 5.2, p. 334]) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n^M/2K_n^M(L) \arrow[r] \arrow[d, "s_n"'] & K_n^M/2K_n^M(L(t)) \arrow[r, "d_K"] \arrow[d, "s_n"'] & \bigoplus_{x\in P} K_{n-1}^M/2K_{n-1}^M(L(x)) \arrow[r] \arrow[d, "\sum s_{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^n/I^{n+1}(L) \arrow[r] & I^n/I^{n+1}(L(t)) \arrow[r, "d_I"] & \bigoplus_{x\in P} I^{n-1}/I^n(L(x)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, les deux suites admettent des rétractions

$$r : K_n^M/2K_n^M(L(t)) \longrightarrow K_n^M/2K_n^M(L)$$

et

$$r' : I^n/I^{n+1}(L(t)) \longrightarrow I^n/I^{n+1}(L)$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_n^M/2K_n^M(L(t)) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s_n"'] & K_n^M/2K_n^M(L) \arrow[d, "s_n"] \\
I^n/I^{n+1}(L(t)) \arrow[r, "r'"'] & I^n/I^{n+1}(L).
\end{tikzcd}$$

Construisons en effet r. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
K_n^M/2K_n^M(L) \arrow[r] & K_n^M/2K_n^M(L(t)) \arrow[d, "\{t\}"] \\
 & K_{n+1}^M/2K_{n+1}^M(L(t)) \arrow[ul, "d_t"]
\end{tikzcd}$$

où $\{t\}$ est la multiplication (à gauche) par $\{t\}$ et d_t est le résidu associé à la valuation t-adique. On définit r comme étant la composition de ces deux homomorphismes et on vérifie qu'il s'agit d'une rétraction de l'inclusion $K_n^M/2K_n^M(L) \to K_n^M/2K_n^M(L(t))$.

On définit ensuite r' de manière similaire (en utilisant la multiplication par $< t, -1 >$) et on voit que $s_n r = r' s_n$. Utilisant ces rétractions, on obtient des sections j et j' faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x \in P} K^M_{n-1}/2K^M_{n-1}(L(x)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\sum s_{n-1}"'] & K^M_n/2K^M_n(L(t)) \arrow[d, "s_n"] \\ \bigoplus_{x \in P} I^{n-1}/I^n(L(x)) \arrow[r, "j'"'] & I^n/I^{n+1}(L(t)). \end{tikzcd}$$

Comme E/L est finie, il existe une suite d'extensions

$$E \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = L$$

telle que E_i/E_{i-1} soit monogène. Il suffit donc de montrer le résultat pour $L = E(\theta)$. Dans ce cas, il existe un polynôme unitaire irréductible p tel que $E \simeq L[t]/p$. Soit $\alpha \in I^{n-1}(E)/I^n(E)$. On sait par la suite exacte ci-dessus que

$$\sum (f_*)_x d_{\mathbb{P}^1_L}(j'(\alpha)) = 0.$$

Or

$$\sum (f_*)_x d_{\mathbb{P}^1_L}(j'(\alpha)) = \overline{\phi}^*_I(\alpha) + (d_I)_\infty(j'(\alpha))$$

et donc $\overline{\phi}^*_I(\alpha) = -(d_I)_\infty(j'(\alpha))$. Ainsi $\overline{\phi}^*_I = -(d_I)_\infty \circ j'$. On a finalement

$$\overline{\phi}^*_I s_{n-1} = -(d_I)_\infty s_n j = -s_{n-1}(d_K)_\infty j = s_{n-1}\overline{\phi}^*_K. \quad \square$$

Corollaire 10.2.4. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K^M_n(E) \arrow[r, "(\phi^*_K)"] \arrow[d, "s_n"'] & K^M_n(L) \arrow[d, "s_n"] \\ I^n(E)/I^{n+1}(E) \arrow[r, "(\overline{\phi}^*_I)"'] & I^n(L)/I^{n+1}(L) \end{tikzcd}$$

commute pour tout n.

Proposition 10.2.5. — *Soit $Y = \mathrm{Spec}(B)$ où B est un anneau local régulier de dimension 1. Alors $s : C_j(Y, K^M_*) \to C_j(Y, I^*/I^{*+1})$ est un morphisme de complexes pour tout j.*

Démonstration. — Notons L le corps des fractions de B et y son idéal maximal. On désire montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C(Y,K_*^M): \arrow[d, "s"'] & 0 \arrow[r] & K_j^M(L) \arrow[r, "d_K"] \arrow[d, "s_j"'] & K_{j-1}^M(k(y)) \arrow[r] \arrow[d, "s_{j-1}"'] & 0 \\
C(Y,I^*/I^{*+1}): & 0 \arrow[r] & I^j(L)/I^{j+1}(L) \arrow[r, "d_I"'] & I^{j-1}(k(y))/I^j(k(y)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Il suffit de le montrer pour des éléments de la forme $\{\pi, u_1, \ldots, u_{j-1}\}$ pour un premier π et des unités $u_1, \ldots, u_{j-1}$. On a

$$s_{j-1}d_K(\{\pi, u_1, \ldots, u_{j-1}\}) = s_{j-1}(\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_{j-1}}\}) = [1, -\overline{u_1}] \otimes \cdots \otimes [1, -\overline{u_{j-1}}].$$

D'autre part,

$$d_I s_j(\{\pi, u_1, \ldots, u_{j-1}\}) = d_I([1, -\pi] \otimes [1, -u_1] \otimes \cdots \otimes [1, -u_{j-1}]).$$

Ainsi

$$d_I([1, -\pi] \otimes \cdots \otimes [1, -u_{j-1}]) = [1, -\overline{u_1}] \otimes \cdots \otimes [1, -\overline{u_{j-1}}]. \quad \square$$

Théorème 10.2.6. — *L'application $s : C_j(X, K_*^M) \to C_j(X, I^*/I^{*+1})$ est un morphisme de complexes pour tout schéma régulier X de dimension finie.*

Démonstration. — On veut voir que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x \in X^{(j-i)}} K_i^M(k(x)) \arrow[r, "d_K"] \arrow[d, "s_i"'] & \bigoplus_{y \in X^{(j-i+1)}} K_{i-1}^M(k(y)) \arrow[d, "s_{i-1}"'] \\
\bigoplus_{x \in X^{(j-i)}} I^i(k(x))/I^{i+1}(k(x)) \arrow[r, "d_I"'] & \bigoplus_{y \in X^{(j-i+1)}} I^{i-1}(k(y))/I^i(k(y)).
\end{tikzcd}$$

On peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour un anneau local régulier d'idéal maximal y et de dimension $j - i + 1$ et que $x \in A^{(j-i)}$. Il faut montrer que

$$\begin{tikzcd}
K_i^M(k(x)) \arrow[r, "d_K"] \arrow[d, "s_i"'] & K_{i-1}^M(k(y)) \arrow[d, "s_{j-1}"'] \\
I^i(k(x))/I^{i+1}(k(x)) \arrow[r, "d_I"] & I^{i-1}(k(y))/I^i(k(y))
\end{tikzcd}$$

commute. Notons B la clôture intégrale de A/x dans $k(x)$. Pour chaque point fermé $z_r \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}$, on note $\phi_r : k(y) \to k(z_r)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion

$A/x \subset B$. On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & \bigoplus\limits_{z_i} K^M_{i-1}(k(z_r)) \arrow[dl, "\sum(\phi_r)^K_*"] \arrow[ddd, "\sum s^{k(z_r)}_{i-1}"] \\
K_i^M(k(x)) \arrow[r, "d_K^A"'] \arrow[urr, "d_K^B"] \arrow[d, "s_i"'] & K^M_{i-1}(k(y)) \arrow[d, "s^{k(y)}_{i-1}"'] & \\
I^i/I^{i+1}(k(x)) \arrow[r, "d_I^A"] \arrow[drr, "d_I^B"'] & I^{i-1}/I^i(k(y)) & \\
& & \bigoplus\limits_{z_i} I_{i-1}/I^i(k(z_r)). \arrow[ul, "\sum(\phi_r)^I_*"']
\end{tikzcd}$$

On sait que les triangles et les trapèzes commutent (corollaire 6.4.16, corollaire 10.2.4 et proposition 10.2.5). Donc le carré commute également. $\square$

DÉFINITION 10.2.7. — *On note $C^i(X, G^j)$ le produit fibré suivant :*

$$\begin{tikzcd}
C^i(X, G^j) \arrow[r] \arrow[d] & C^i(X, I^j) \arrow[d] \\
C^i(X, K_j^M) \arrow[r] & C^i(X, I^j/I^{j+1}).
\end{tikzcd}$$

REMARQUE 10.2.8. — Comme le morphisme $C^i(X, I^j) \to C^i(X, I^j/I^{j+1})$ est surjectif, on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C^i(X, G^j) \longrightarrow C^i(X, I^j) \oplus C^i(X, K_j^M) \longrightarrow C^i(X, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow 0\,.$$

REMARQUE 10.2.9. — En particulier, $C^j(X, G^j)$ est le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
C^j(X, G^j) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{x \in X^{(j)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[d] \\
\bigoplus\limits_{x \in X^{(j)}} K_0^M(k(x)) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{x \in X^{(j)}} W(k(x))/I(k(x))
\end{tikzcd}$$

qui est en fait

$$\begin{tikzcd} C^j(X,G^j) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in X^{(j)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[d] \\ \bigoplus_{x\in X^{(j)}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(j)}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Ainsi $C^j(X,G^j)$ est isomorphe à $\bigoplus_{x\in X^{(j)}} GW(k(x), \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_{X,x}}(k(x),\mathcal{O}_{X,x}))$ (proposition E.2.1).

Remarque 10.2.10. — Si $x \in X^{(i)}$, on note $G^{j-i}(k(x))$ le produit fibré

$$\begin{tikzcd} G^{j-i}(k(x)) \arrow[r] \arrow[d] & I^{j-i}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[d] \\ K_{j-i}(k(x)) \arrow[r] & I^{j-i}(k(x))/I^{j-i+1}(k(x)). \end{tikzcd}$$

On obtient $C^i(X,G^j) \simeq \bigoplus_{x\in X^{(j-i)}} G^{j-i}(k(x))$.

Définition 10.2.11. — *Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On note $C^i(X,G^j,L)$ le produit fibré suivant :*

$$\begin{tikzcd} C^i(X,G^j,L) \arrow[r] \arrow[d] & C^i(X,I^j,L) \arrow[d] \\ C^i(X,K_j^M) \arrow[r] & C^i(X,I^j/I^{j+1}). \end{tikzcd}$$

Par définition du produit fibré, le prochain résultat est immédiat :

Lemme 10.2.12. — *Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L les différentielles*

$$d_I^i : C^i(X,I^j,L) \longrightarrow C^{i-1}(X,I^j,L)$$

et

$$d_K^i : C^i(X,K_j^M) \longrightarrow C^{i-1}(X,K_j^M)$$

induisent un homomorphisme

$$d_G^i : C^i(X,G^j,L) \longrightarrow C^{i-1}(X,G^j,L).$$

De plus, $d_G^{i-1} d_G^i = 0$.

Définition 10.2.13. — *On note $C(X,G^j,L)$ le complexe obtenu ci-dessus.*

Définition 10.2.14. — *Le groupe $H^j(C(X,G^j))$ est appelé (j-ième) groupe de Chow-Witt de X. On le note $\widetilde{CH}^j(X)$.*

Remarque 10.2.15. — On a des homomorphismes naturels

$$\widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow CH^j(X)$$

et

$$\widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow H^j(C(X,I^j)).$$

Remarque 10.2.16. — Supposons que X soit défini sur un corps algébriquement clos k. Supposons de plus que X soit de dimension n. Alors l'homomorphisme naturel

$$\widetilde{CH}^n(X) \longrightarrow CH^n(X)$$

est un isomorphisme.

Définition 10.2.17. — *Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle (j-ième) groupe de Chow-Witt à valeur dans L le groupe $H^j(C(X,G^j,L))$. On le note $\widetilde{CH}^j(X,L)$.*

10.3. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une k-algèbre

Soit A une k-algèbre régulière de dimension n. Dans cette section, nous allons donner une présentation explicite de $\widetilde{CH}^n(A)$. Pour commencer, remarquons que le complexe $C(A,G^n)$ est de la forme

$$\ldots \longrightarrow C^{n-1}(A,G^n) \xrightarrow{d_G^{n-1}} C^n(A,G^n) \longrightarrow 0.$$

On voit donc que $\widetilde{CH}^n(A)$ est donné par la suite exacte

$$C^{n-1}(A,G^n) \xrightarrow{d_G^{n-1}} C^n(A,G^n) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A) \longrightarrow 0.$$

Par la remarque 10.2.9 on sait que

$$C^n(A,G^n) = \bigoplus_{x\in X^{(n)}} GW(k(x),\operatorname{Ext}^n_{A_x}(k(x),A_x)).$$

Ainsi $\widetilde{CH}^n(A)$ est engendré par des éléments de la forme $(k(x),\mu)$ où x est un point fermé de A et $\mu : k(x) \to \operatorname{Ext}^n_A(k(x),A)$ est un isomorphisme. Nous allons maintenant calculer $d_G^{n-1} : C^{n-1}(A, G^n) \to C^n(A, G^n)$. Rappelons que d_G^{n-1} est donné par le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
C^{n-1}(A,G^n) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "d_G^{n-1}"] & & \bigoplus_{y\in X^{(n-1)}} I(\mathcal{O}_{X,y}) \arrow[dr, "d_I^{n-1}"] \arrow[dd] & \\
& C^n(A,G^n) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bigoplus_{x\in X^{(n)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[dd] \\
\bigoplus_{y\in X^{(n-1)}} K_1(k(y)) \arrow[rr] \arrow[dr, "d_K^{n-1}"] & & \bigoplus_{y\in X^{(n-1)}} I/I^2(\mathcal{O}_{X,y}) \arrow[dr] & \\
& \bigoplus_{x\in X^{(n)}} K_0(k(x)) \arrow[rr] & & \bigoplus_{x\in X^{(n)}} W^{lf}/I(\mathcal{O}_{X,x}).
\end{tikzcd}
$$

Commençons par décrire $C^{n-1}(A, G^n)$.

LEMME 10.3.1. — *Soit $y \in \mathrm{Spec}(A)^{(n-1)}$. Le groupe $G^1(k(y))$ est engendré par des éléments du type $([\alpha, -g\alpha], g)$ dans $I(A_y) \times K_1(k(y))$ pour $g \in k(y)^*$, $\alpha : k(y) \to \mathrm{Ext}_{A_y}^{n-1}(k(y), A_y)$ un isomorphisme, $[\alpha, -g\alpha]$ dans $I(A_y)$.*

Démonstration. — Soit $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r] \in I(A_y)$ et $\alpha : k(y) \to \mathrm{Ext}_{A_y}^{n-1}(k(y), A_y)$ un isomorphisme quelconque. Pour tout i, il existe $a_i \in k(y)^*$ tel que $\alpha_i = a_i\alpha$. Alors

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_r] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r] + [\alpha, \ldots, \alpha] - [\alpha, \ldots, \alpha] = \sum_{i=1}^{r} [\alpha, a_i\alpha] - \sum_{i=1}^{r/2} [\alpha, \alpha].$$

Choisissant $\alpha(1)$ comme générateur de $\mathrm{Ext}_{A_y}^{n-1}(k(y), A_y)$, on voit que l'image de $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ dans $I/I^2(A_y)$ est la forme $\sum[1, a_i] - \sum[1, 1]$. Utilisant le discriminant, on voit qu'un $h \in K_1(k(y))$ dont l'image dans $I/I^2(A_y)$ est la forme ci-dessus diffère forcément de $\prod a_i$ par un carré. Quitte à multiplier un des a_i par ce carré, on peut supposer que $h = \prod a_i$. On a alors dans $G^1(k(y))$ l'égalité suivante :

$$([\alpha_1, \ldots, \alpha_r], h) = \sum([\alpha, a_i\alpha], -a_i) - \sum([\alpha, \alpha], -1). \qquad \square$$

Pour connaître d_G^1, il suffit donc de calculer $d_G^1([\alpha, -g\alpha], g)$. Commençons par calculer $d_I^1([\alpha, -g\alpha])$. Pour ce faire, nous allons utiliser le lemme suivant qui est dû à Nori (voir [**Mur99**, théorème 5.4, p. 164]).

LEMME 10.3.2. — *Soit A un anneau régulier de dimension n, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur $n-1$ et $g \in A \setminus \mathfrak{p}$. Alors il existe une suite régulière $(p_1, \ldots, p_{n-1}) \subset \mathfrak{p}$ et des éléments $f, h \in A$ tels que*

$$l(A/(\mathfrak{p}, g)) = l(A/(p_1, \ldots, p_{n-1}, f)) - l(A/(p_1, \ldots, p_{n-1}, h))$$

où l désigne la longueur d'un module de longueur finie.

Démonstration. — Comme A est régulier, il existe une suite régulière $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ telle que $(p_1, \ldots, p_{n-1})A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Soit

$$(p_1, \ldots, p_{n-1}) = \mathfrak{p} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$$

la décomposition primaire de cette suite régulière, où les Q_i sont $\mathfrak{q}_i$-primaires pour certains premiers $\mathfrak{q}_i$ de hauteur $n-1$. Soit $S = A \setminus (\mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{q}_r)$. Alors la localisation en S donne

$$A_S/(p_1, \ldots, p_{n-1})A_S \simeq k(\mathfrak{p}) \times A_S/Q_1A_S \times \cdots \times A_S/Q_rA_S.$$

Il existe $f \in A$ et $h \in S$ tels qu'on ait dans le produit ci-dessus

$$f/h = (g, 1, \ldots, 1).$$

Pour ce choix de g et h, on a

$$l(A/(\mathfrak{p}, g)) = l(A/(p_1, \ldots, p_{n-1}, f)) - l(A/(p_1, \ldots, p_{n-1}, h)). \quad \square$$

Reprenons le calcul de $d_I^{n-1}([\alpha, -g\alpha])$. Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer, quitte à multiplier par un carré, que $g \in A$. Par le lemme, il existe une suite régulière $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ et des éléments f, h tels que

$$l(A/(y, g)) = l(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}, f)) - l(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}, h)).$$

On dispose d'un isomorphisme symétrique

$$\rho : A/(y_1, \ldots, y_{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{n-1}(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}), A)$$

défini par $\rho(1) = Kos(y_1, \ldots, y_{n-1})$ où $Kos(y_1, \ldots, y_{n-1})$ est le complexe de Koszul associé à la suite régulière $(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Notons ω le module $\mathrm{Ext}_A^{n-1}(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}), A)$. Localisant en z pour tout z de hauteur $n-1$ tel que $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \subset z$, on obtient des formes symétriques

$$\rho_z : A_z/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_z \longrightarrow \omega_z.$$

Si S est comme dans la preuve du lemme 10.3.2, on a

$$A_S/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_S \simeq k(y) \times A_{z_1}/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_{z_1} \times \cdots \times A_{z_r}/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_{z_r}$$

et il existe un isomorphisme symétrique

$$\psi : A_S/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_S \longrightarrow \omega_S$$

tel que $\psi_z = \rho_z$ pour tout $z \neq y$ et $\psi_y = \alpha$. Il existe également $q \in A$ et $t \in S$ tel que $\psi = q/t \cdot \rho_S$. On sait par ailleurs que

$$f/h = (g, 1, \ldots, 1) \in A_S/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_S.$$

Considérons la forme $(q/t \cdot \rho_S, -fq/ht \cdot \rho_S)$ définie sur $A_S/(y_1, \ldots, y_{n-1})A_S$. Par construction, on a

$$(q/t \cdot \rho_z, -fq/ht \cdot \rho_z) = 0 \text{ pour tout } z \neq y$$

et

$$(q/t \cdot \rho_y, -fq/ht \cdot \rho_y) = (\alpha, -g\alpha).$$

Multipliant par h^2t^2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 10.3.3. — *Soit $[\alpha, -g\alpha] \in I(A_y)$. Alors il existe une suite régulière $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \subset y$ et $a, b \in A \setminus (y_1, \ldots, y_{n-1})$ tels que $[a\rho_y, -b\rho_y] = [\alpha, -g\alpha]$ où*

$$\rho : A/(y_1, \ldots, y_{n-1}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n-1}(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}), A)$$

est définie par $\rho(1) = Kos(y_1, \ldots, y_{n-1})$. De plus, $b/a = g$ dans $k(y)$ et $[a\rho_z, -b\rho_z] = 0$ pour tout $z \in A^{(n-1)}$ tel que $z \neq y$.

Il est beaucoup plus facile de calculer $d_I^{n-1}([a\rho_y, -b\rho_y])$ que $d_I^{n-1}([\alpha, -g\alpha])$. En effet :

Lemme 10.3.4. — *Soit $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ une suite régulière et $a \in A$ tel que la suite $(y_1, \ldots, y_{n-1}, a)$ soit encore régulière. Soit*

$$\rho : A/(y_1, \ldots, y_{n-1}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n-1}(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}), A)$$

l'isomorphisme symétrique défini par $\rho(1) = Kos(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Alors $d_I^{n-1}(a\rho)$ est l'isomorphisme symétrique

$$\beta : A/(y_1, \ldots, y_{n-1}, a) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n}(A/(y_1, \ldots, y_{n-1}, a), A)$$

défini par $\beta(1) = Kos(y_1, \ldots, y_{n-1}, a)$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la proposition 3.5.1. □

Mettant tous les résultats de la section ensemble, nous obtenons finalement :

Théorème 10.3.5. — *Soit A une k-algèbre régulière de dimension n. Considérons le sous-groupe H de $\bigoplus_{x \in A^{(n)}} GW(k(x), \operatorname{Ext}_A^n(k(x), A))$ engendré par les classes d'éléments de la forme $(A/(p_1, \ldots, p_n), \beta)$ où $(p_1, \ldots, p_n)$ est une suite régulière et*

$$\beta : A/(p_1, \ldots, p_n) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(A/(p_1, \ldots, p_n), A)$$

est un isomorphisme symétrique défini par $\beta(1) = Kos(p_1, \ldots, p_n)$. Alors

$$\widetilde{CH}^n(A) = \bigoplus_{x \in A^{(n)}} GW(k(x), \operatorname{Ext}_A^n(k(x), A))/H.$$

Démonstration. — Montrons que les éléments de la forme $(A/(p_1,\ldots,p_n),\beta)$ sont nuls dans $\widetilde{CH}^n(A)$. Considérons la suite régulière $(p_1,\ldots,p_{n-1})$ et l'isomorphisme symétrique

$$\psi : A/(p_1,\ldots,p_{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{n-1}(A/(p_1,\ldots,p_{n-1}),A)$$

défini par $\psi(1) = Kos(p_1,\ldots,p_{n-1})$ où $Kos(p_1,\ldots,p_{n-1})$ est comme d'habitude le complexe de Koszul associé à la suite régulière $(p_1,\ldots,p_{n-1})$. Considérons l'élément $([\psi,p_n\psi],-p_n)$ dans $C^{n-1}(A,G^n)$. On voit que

$$d_G^{n-1}(([\psi,p_n\psi],-p_n)) = (A/(p_1,\ldots,p_n),\beta).$$

Par ailleurs, la proposition 10.3.3 montre que l'image par d_I^{n-1} d'un élément $[\alpha,-g\alpha]$ est de la forme

$$(A/(y_1,\ldots,y_{n-1},a),\beta) - (A/(y_1,\ldots,y_{n-1},b),\beta)$$

pour certains $a,b \in A$. Cette description étant compatible avec $d_K^{n-1}(g)$, on a que tout $d_G^{n-1}([\alpha,-g\alpha],g)$ est dans H. Cela termine la preuve. $\square$

10.4. Propriétés fonctorielles

Dans cette section, nous allons démontrer que les groupes de Chow-Witt satisfont de bonnes propriétés fonctorielles. Tous les résultats seront démontrés pour les groupes de Chow-Witt usuels, le cas des groupes tordus par un $\mathcal{O}_X$-module inversible L étant similaire.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat entre deux schémas réguliers de dimension finie. On sait qu'on a des morphismes de complexes (théorème 2.3.4 et corollaire 9.3.2)

$$f_I^* : C(Y,I^j) \longrightarrow C(X,I^j)$$

et

$$f_K^* : C(Y,K_j^M) \longrightarrow C(X,K_j^M)$$

qui induisent des morphismes

$$f_I^* : C(Y,I^j/I^{j+1}) \longrightarrow C(X,I^j/I^{j+1})$$

et

$$f_K^* : C(Y,K_j^M/2K_j^M) \longrightarrow C(X,K_j^M/2K_j^M).$$

On a vu au chapitre précédent (théorème 10.2.6) qu'on avait des morphismes de complexes (qui sont en fait des isomorphismes)

$$s_Y : C(Y,K_j^M/2K_j^M) \longrightarrow C(Y,I^j/I^{j+1})$$

et

$$s_X : C(X,K_j^M/2K_j^M) \longrightarrow C(X,I^j/I^{j+1}).$$

Proposition 10.4.1. — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} C(Y, K_j^M/2K_j^M) \arrow[r, "f_K^*"] \arrow[d, "s_Y"'] & C(X, K_j^M/2K_j^M) \arrow[d, "s_X"] \\ C(Y, I^j/I^{j+1}) \arrow[r, "f_I^*"'] & C(X, I^j/I^{j+1}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $y \in Y^{(j-i)}$, $x \in X_y^{(0)}$ et $\phi : k(y) \to k(x)$ l'homomorphisme induit par f. Il faut montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K_i^M(k(y))/2K_i^M(k(y)) \arrow[r, "f_K^*"] \arrow[d, "s_Y"'] & K_i^M(k(x))/2K_i^M(k(x)) \arrow[d, "s_X"] \\ I^i(k(y))/I^{i+1}(k(y)) \arrow[r, "f_I^*"'] & I^i(k(x))/I^{i+1}(k(x)) \end{tikzcd}$$

commute.

On peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$. Notons $l = l(B_x/y)$ et $\bar{l}$ la classe de l modulo $2\mathbb{Z}$. Rappelons qu'avec les notations du lemme 9.3.1, f_I^* est donnée par la formule :

$$f_I^*([V, \varphi] \cdot [A/y, \rho]) = \phi_*([V, \varphi]) \cdot [B_x/y, \rho_{B_x}]$$

Modulo I^{i+1}, on a en fait

$$f_I^*([V, \varphi]) = \phi_*([V, \varphi]) \cdot [k(x)^l, \rho]$$

pour une forme symétrique $\rho = [\alpha_1, \dots, \alpha_l]$ de $W(k(x))$. Soit maintenant $\{a_1, \dots, a_i\}$ dans $K_i^M(k(y))$. On a

$$f_K^*(\{a_1, \dots, a_i\}) = \bar{l} \cdot \{\phi(a_1), \dots, \phi(a_i)\}$$

et

$$s_X(\bar{l} \cdot \{\phi(a_1), \dots, \phi(a_i)\}) = \bar{l} \cdot [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)].$$

Par ailleurs

$$s_Y(\{a_1, \dots, a_i\}) = [1, -a_1] \otimes \cdots \otimes [1, -a_i]$$

et

$$f_I^*([1, -a_1] \otimes \cdots \otimes [1, -a_i]) = [k(x)^l, \rho] \otimes [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)].$$

Comme $[1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)] \in I^i(k(x))$, on a (lemme E.1.3)

$$[k(x)^l, \rho] \otimes [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)] = l[1] \cdot [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)].$$

Or

$$l[1] \cdot [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)] = \bar{l} \cdot [1, -\phi(a_1)] \otimes \cdots \otimes [1, -\phi(a_i)]. \quad \square$$

On a démontré :

Corollaire 10.4.2. — *Soient X, Y des schémas réguliers et $f : X \to Y$ un morphisme plat. Alors*
$$f_I^* : C(Y, I^j) \longrightarrow C(X, I^j)$$
et
$$f_K^* : C(Y, K_j^M) \longrightarrow C(X, K_j^M)$$
induisent un morphisme de complexes
$$f_G^* : C(Y, G^j) \longrightarrow C(X, G^j).$$

Corollaire 10.4.3. — *Soient X, Y des schémas réguliers et $f : X \to Y$ un morphisme plat. On a alors pour tout j un homomorphisme*
$$f^* : \widetilde{CH}^j(Y) \longrightarrow \widetilde{CH}^j(X)$$
tel que les diagrammes
$$\begin{tikzcd} \widetilde{CH}^j(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \widetilde{CH}^j(X) \arrow[d] \\ CH^j(Y) \arrow[r, "f^*"'] & CH^j(X) \end{tikzcd}$$
et
$$\begin{tikzcd} \widetilde{CH}^j(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \widetilde{CH}^j(X) \arrow[d] \\ H^j(C(Y, I^j)) \arrow[r, "f^*"'] & H^j(C(X, I^j)) \end{tikzcd}$$
commutent.

Supposons maintenant que $f : X \to Y$ soit un morphisme propre avec $\dim(X) = n$ et $\dim(Y) = m$. On sait alors qu'on dispose de deux homomorphismes (théorèmes 2.3.1 et 8.3.4)
$$(f_*)_K : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(Y, K_{j+m-n}^M)$$
et
$$(f_*)_I : C(X, I^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n}, \omega_{Y/k}).$$
Comme ci-dessus, ils induisent des homomorphismes
$$(f_*)_K : C(X, K_j^M/2K_j^M) \longrightarrow C(Y, K_{j+m-n}^M/2K_{j+m-n}^M)$$
et
$$(f_*)_I : C(X, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n}/I^{j+m-n+1}).$$

LEMME 10.4.4. — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} C(X, K_j^M/2K_j^M) \arrow[r, "(f_*)_K"] \arrow[d, "s_X"'] & C(Y, K_{j+m-n}^M/2K_{j+m-n}^M) \arrow[d, "s_Y"] \\ C(X, I^j/I^{j+1}) \arrow[r, "(f_*)_I"'] & C(Y, I^{j+m-n}/I^{j+m-n+1}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Cela découle immédiatement du lemme 10.2.3. □

COROLLAIRE 10.4.5. — *Soient X un schéma régulier de dimension n et Y un schéma régulier de dimension m. Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. Alors*

$$(f_*)_I : C(X, I^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, I^{j+m-n}, \omega_{Y/k})$$

et

$$(f_*)_K : C(X, K_j^M) \longrightarrow C(Y, K_{j+m-n}^M)$$

induisent un morphisme de complexes

$$(f_*)_G : C(X, G^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y, G^{j+m-n}, \omega_{Y/k})$$

tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \widetilde{CH}^j(X, \omega_{X/k}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \widetilde{CH}^{j+m-n}(Y, \omega_{Y/k}) \arrow[d] \\ CH^j(X) \arrow[r, "f_*"'] & CH^{j+m-n}(Y) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} \widetilde{CH}^j(X, \omega_{X/k}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \widetilde{CH}^{j+m-n}(Y, \omega_{Y/k}) \arrow[d] \\ H^j(C(X, I^j, \omega_{X/k})) \arrow[r, "f_*"'] & H^{j+m-n}(C(Y, I^{j+m-n}, \omega_{Y/k})) \end{tikzcd}$$

commutent.

Soit $U \subset X$ un ouvert et $Y = X \setminus U$ son complémentaire. Supposons que Y soit de (pure) codimension q dans X. Soient $\iota : U \to X$ et $\kappa : Y \to X$ les immersions. On a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow C(Y, K_{j-q}^M) \xrightarrow{\kappa_*} C(X, K_j^M) \xrightarrow{\iota^*} C(U, K_j^M) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C(X, I^j)_Y \xrightarrow{i} C(X, I^j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, I^j) \longrightarrow 0$$

qui induisent des suites exactes

$$0 \longrightarrow C(Y, K^M_{j-q}/2K^M_{j-q}) \xrightarrow{\pi_*} C(X, K^M_j/2K^M_j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, K^M_j/2K^M_j) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C(X, I^j/I^{j+1})_Y \xrightarrow{i} C(X, I^j/I^{j+1}) \xrightarrow{\iota^*} C(U, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow 0.$$

Définition 10.4.6. — *Notons $C(X, G^j)_Y$ le produit fibré du diagramme*

$$\begin{tikzcd} & C(Y, K^M_{j-q}) \arrow[d] \\ C(X, I^j)_Y \arrow[r] & C(X, I^j/I^{j+1}) \end{tikzcd}$$

Lemme 10.4.7. — *Les suites exactes*

$$0 \longrightarrow C(Y, K^M_{j-q}) \xrightarrow{\pi_*} C(X, K^M_j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, K^M_j) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C(X, I^j)_Y \xrightarrow{i} C(X, I^j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, I^j) \longrightarrow 0$$

induisent une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(X, G^j)_Y \xrightarrow{i} C(X, G^j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, G^j) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la remarque 10.2.8. □

Remarque 10.4.8. — Lorsque Y est régulier, on sait que (remarque 9.3.5)

$$C(X, G^j)_Y \simeq C(Y, G^{j-q}, L)$$

avec $L = \overline{\kappa}^* \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\kappa_* \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$. La suite exacte ci-dessus devient alors

$$0 \longrightarrow C(Y, G^{j-q}, L) \xrightarrow{\pi_*} C(X, G^j) \xrightarrow{\iota^*} C(U, G^j) \longrightarrow 0\ .$$

Corollaire 10.4.9. — *Soient $U \subset X$ un ouvert dans un schéma régulier et $Y = X \setminus U$ son complémentaire. On a une suite exacte longue en cohomologie*

$$\begin{aligned} \ldots &\longrightarrow H^i(C(X, G^j)_Y) \longrightarrow H^i(C(X, G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^i} H^i(C(U, G^j)) \xrightarrow{\partial^i} \\ &\xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(C(X, G^j)_Y) \longrightarrow H^{i+1}(C(X, G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^{i+1}} H^{i+1}(C(U, G^j)) \longrightarrow \\ \ldots &\longrightarrow H^j(C(X, G^j)_Y) \longrightarrow H^j(C(X, G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^j} H^j(C(U, G^j)) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Corollaire 10.4.10. — *Si Y est régulier, alors la suite exacte longue ci-dessus devient*

$$\begin{aligned}
\dots \longrightarrow H^{i-q}(C(Y,G^{j-q},L)) &\xrightarrow{(\pi_*)^i} H^i(C(X,G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^i} H^i(C(U,G^j)) \xrightarrow{\partial^i} \\
\xrightarrow{\partial^i} H^{i-q+1}(C(Y,G^{j-q},L)) &\xrightarrow{(\pi_*)^{i+1}} H^{i+1}(C(X,G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^{i+1}} H^{i+1}(C(U,G^j)) \longrightarrow \\
\dots \longrightarrow H^{j-q}(C(Y,G^{j-q},L)) &\xrightarrow{(\pi_*)^j} H^j(C(X,G^j)) \xrightarrow{(\iota^*)^j} H^j(C(U,G^j)) \longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

où $L = \overline{\kappa}^*\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_X}(\kappa_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$.

Corollaire 10.4.11. — *Sous les hypothèses du corollaire 10.4.10, on a une suite exacte*

$$\widetilde{CH}^{j-q}(Y,L) \xrightarrow{\pi_*} \widetilde{CH}^j(X) \xrightarrow{\iota^*} \widetilde{CH}^j(U).$$

Remarque 10.4.12. — Contrairement aux groupes de Chow classiques, la suite ci-dessus n'est en général pas exacte à droite. En fait, on obtient une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \widetilde{CH}^{j-q}(Y,L) \xrightarrow{\pi_*} \widetilde{CH}^j(X) \xrightarrow{\iota^*} \widetilde{CH}^j(U) \longrightarrow H^{j+1}(C(X,I^j)_Y) \longrightarrow \dots$$

CHAPITRE 11

INVARIANCES HOMOTOPIQUES

11.1. Résumé

Nous démontrons l'invariance homotopique des groupes de Chow-Witt. Pour ce faire, nous commençons par démontrer l'invariance homotopique de l'homologie du complexe $C(X, I^j)$ associé à un schéma régulier X. Utilisant ensuite l'invariance du complexe $C(X, K_j)$, nous montrons que l'homologie du complexe $C(X, G^j)$ est aussi invariante par homotopie. Cette importante propriété nous permettra par la suite de définir la classe d'Euler associée à un $\mathcal{O}_X$-module localement libre.

11.2. Invariance homotopique de $C(X, W)$

Démontrons l'invariance homotopique du complexe $C(X, W)$ pour un schéma régulier de dimension m :

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(m-1)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,y}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(m)}} W^{lf}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow 0 \, .$$

Supposons donc que $\pi : E \to X$ soit un fibré vectoriel de rang n sur X. Rappelons que si U est un ouvert trivialisant affine pour E et $Y = X \setminus U$ est son complémentaire, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(X, W)_Y \longrightarrow C(X, W) \longrightarrow C(U, W) \longrightarrow 0 \, .$$

Démontrons tout d'abord que $C(U, W)$ est invariant par homotopie. Comme

$$\mathbb{A}^n_U = \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{A}^1_U} = \cdots = \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^{n-1}_U}$$

on peut supposer que $E = \mathbb{A}^1_U$. Montrons pour commencer quelques résultats utiles dans ce qui va suivre.

Soit A un anneau régulier de dimension n et $x \in \mathrm{Spec}(A)^{(p)}$. Soit encore $\pi : A \to A[t]$ l'inclusion et notons $z = xA[t]$. Observons que $k(z) = k(x)(t)$. On sait que le choix d'un générateur ξ de $\operatorname{Ext}^p_{A_x}(k(x), A_x)$ donne un isomorphisme (proposition E.2.1)

$$\alpha : W(k(x)) \longrightarrow W^{lf}(A_x).$$

Le choix du générateur $\xi \otimes 1$ de $\operatorname{Ext}^p_{A_x}(k(x), A_x) \otimes A[t]_z$ induit également un isomorphisme

$$\beta : W(k(z)) \longrightarrow W^{lf}(A[t]_z).$$

Lemme 11.2.1. — *Soit $\phi : k(x) \to k(z)$ l'inclusion. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} W(k(x)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi_*"'] & W^{lf}(A_x) \arrow[d, "\pi^*"] \\ W(k(z)) \arrow[r, "\beta"'] & W^{lf}(A[t]_z) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $a \in k(x)^\times$. Alors $\phi_*([a]) = [\phi(a)]$ et $\alpha([a])$ est la classe dans $W^{lf}(A_x)$ donnée par le A_x-module de longueur finie $k(x)$ et l'isomorphisme symétrique

$$a\xi : k(x) \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_{A_x}(k(x), A_x)$$

défini par $a\xi(1) = a\xi$. Par ailleurs, $\beta([\phi(a)])$ est donnée par le $A[t]_z$-module de longueur finie $k(z)$ muni de l'isomorphisme symétrique

$$\phi(a)(\xi \otimes 1) : k(y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^p_{A[t]_z}(k(z), A[t]_z)$$

donné par $\phi(a)(\xi \otimes 1)(1) = \phi(a)(\xi \otimes 1)$. Il est évident que $\pi^*(\alpha(a))$ est représenté par la même paire symétrique. □

Rappelons que si F est un corps et I est l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $F[t]$, on a une suite exacte scindée (voir [**Mil70**, théorème 5.3, p. 335])

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_{f \in I} W(k(f)) \longrightarrow 0 .$$

Corollaire 11.2.2. — *Soit A un anneau régulier de dimension n et $x \in A^{(p)}$. Notons $\pi : A \to A[t]$ l'inclusion canonique, $z = xA[t]$ et N l'ensemble des $y \in A[t]^{(p+1)}$ tels que $y \cap A = x$. On a une suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow W^{lf}(A_x) \xrightarrow{\pi^*} W^{lf}(A[t]_z) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y \in N} W^{lf}(A[t]_y) \longrightarrow 0 .$$

Démonstration. — Le choix d'une suite régulière $(x_1, \ldots, x_n)$ de x donne un générateur ξ de $\operatorname{Ext}^n_{A_x}(k(x), A_x)$. Le choix de ce dernier induit un isomorphisme

$$\alpha : W(k(x)) \longrightarrow W^{lf}(A_x).$$

Le choix du générateur $\xi \otimes 1$ de $\operatorname{Ext}^n_{A_x}(K, A_x) \otimes A[t]_z$ donne un isomorphisme

$$\beta : W(k(x)(t)) \longrightarrow W^{lf}(A[t]_z)$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} W(k(x)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] & W(k(x)(t)) \arrow[d, "\beta"', "\simeq"] \\ W^{lf}(A_x) \arrow[r, "\pi^*"'] & W^{lf}(A[t]_z). \end{tikzcd}$$

Si f engendre l'idéal maximal de $(A[t]/xA[t])_y$, alors la suite $(x_1,\ldots,x_n,f)$ est régulière et donne un générateur η de $\mathrm{Ext}^{n+1}_{A[t]_y}(k(y),A[t]_y)$. Ce choix induit un isomorphisme

$$\gamma : W(k(y)) \longrightarrow W^{lf}(A[t]_y).$$

On sait (lemme 7.2.3) que le diagramme

$$\begin{tikzcd} W(k(x)(t)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"', "\simeq"] & W(k(y)) \arrow[d, "\gamma"', "\simeq"] \\ W^{lf}(A[t]_z) \arrow[r, "d"'] & W^{lf}(A[t]_y) \end{tikzcd}$$

commute. On obtient ainsi

$$\begin{tikzcd} W(k(x)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] & W(k(x)(t)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"', "\simeq"] & W(k(y)) \arrow[d, "\gamma"', "\simeq"] \\ W^{lf}(A_x) \arrow[r, "\pi^*"'] & W^{lf}(A[t]_z) \arrow[r, "d"'] & W^{lf}(A[t]_y). \end{tikzcd}$$

On conclut la preuve à l'aide de la suite exacte de Milnor ([**Mil70**, théorème 5.3, p. 335] à nouveau). ☐

Corollaire 11.2.3. — *Soit A un anneau régulier de dimension n et $x \in A^{(p)}$. Notons $\pi : A \to A[t]$ l'inclusion canonique, $z = xA[t]$ et N l'ensemble des $y \in A[t]^{(p+1)}$ tels que $y \cap A = x$. On a pour tout n une suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow I^n(A_x) \xrightarrow{\pi^*} I^n(A[t]_z) \xrightarrow{d} \bigoplus_{y\in N} I^{n-1}(A[t]_y) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. — La suite exacte due à Milnor

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow W(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_{f\in I} W(k(f)) \longrightarrow 0$$

préserve les idéaux fondamentaux : on a ainsi pour tout n une suite exacte scindée (voir [**Mil70**, corollaire 5.2, p. 334])

$$0 \longrightarrow I^n(F) \longrightarrow I^n(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_{f\in I} I^{n-1}(k(f)) \longrightarrow 0\ .$$

Il suffit alors de répéter la preuve du corollaire ci-dessus pour obtenir le résultat. ☐

THÉORÈME 11.2.4. — *Soit A un anneau régulier de dimension n et*

$$\pi : \mathrm{Spec}(A[t]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

la projection usuelle. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\pi^* : H_i(C(A, I^j)) \longrightarrow H_i(C(A[t], I^j))$$

est surjective.

Démonstration. — Les autres cas utilisant des arguments similaires, on fait le cas $j = 0$. Soient

$$d^p_{A[t]} : C^p(A[t], W) \longrightarrow C^{p+1}(A[t], W)$$

et $\alpha \in \mathrm{Ker}(d^p_{A[t]})$. Soient de plus

$$M^{(p)} = \{y \in \mathrm{Spec}(A[t])^{(p)} | y \cap A \in \mathrm{Spec}(A)^{(p)}\}$$

et

$$N^{(p)} = \{z \in \mathrm{Spec}(A[t])^{(p)} | z \cap A \in \mathrm{Spec}(A)^{(p-1)}\}.$$

Si $x \in \mathrm{Spec}(A)^{(p-1)}$ on pose

$$N^{(p)}_x = \{z \in \mathrm{Spec}(A[t])^{(p)} | z \cap A = x\}.$$

Remarquons que si $y \in M^{(p)}$, alors $y = (y \cap A)A[t]$. On a :

$$C^p(A[t], W) = \bigoplus_{y \in M^{(p)}} W^{lf}(A[t]_y) \oplus \bigoplus_{z \in N^{(p)}} W^{lf}(A[t]_z)$$

et $\alpha = \alpha_M + \alpha_N$ avec $\alpha_M \in \bigoplus_{y \in M^{(p)}} W^{lf}(A[t]_y)$ et $\alpha_N \in \bigoplus_{z \in N^{(p)}} W^{lf}(A[t]_z)$. Montrons tout d'abord qu'il existe $\beta \in C^{p-1}(A[t], W)$ tel que $d^{p-1}_{A[t]}\beta = \alpha_N$. On écrit

$$\alpha_N = \alpha_{N_{x_1}} + \cdots + \alpha_{N_{x_r}}$$

pour des $\alpha_{N_{x_s}} \in \bigoplus_{z \in N^{(p)}_{x_s}} W^{lf}(A[t]_z)$. Par le corollaire 11.2.2 (ou le corollaire 11.2.3 pour le cas $j > 0$), on a pour tout x_s une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow W^{lf}(A_{x_s}) \xrightarrow{\pi^*} W^{lf}(A[t]_{x_s A[t]}) \longrightarrow \bigoplus_{z \in N_{x_s}} W^{lf}(A[t]_z) \longrightarrow 0\ .$$

Il existe ainsi pour tout x_s une forme $\beta_{x_s} \in W^{lf}(A[t]_{x_s})$ telle que $\alpha_{N_{x_s}} = d(\beta_{x_s})$. Posant $\beta = \sum \beta_{x_s}$, on obtient $\alpha_N = d\beta$. On peut ainsi supposer dans ce qui suit que $\alpha \in \bigoplus_{y \in M^{(p)}} W^{lf}(A[t]_y)$. Écrivons

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$$

pour $\alpha_s \in W^{lf}(A[t]_{y_s})$. Puisque $y_s \in M$, il existe $x_s \in \mathrm{Spec}(A)^{(p)}$ tel que $y_s = x_s A[t]$. Pour tout s, on a la suite exacte (corollaire 11.2.2)

$$0 \longrightarrow W^{lf}(A_{x_s}) \xrightarrow{\pi^*} W^{lf}(A[t]_{y_s}) \longrightarrow \bigoplus_{z \in N_{x_s}^{(p+1)}} W^{lf}(A[t]_z) \longrightarrow 0 .$$

Comme $d^p_{A[t]}(\alpha) = 0$ et $N_{x_s}^{(p+1)} \cap N_{x_v}^{(p+1)} = \varnothing$ pour $v \neq s$, on a $d^p_{A[t]}(\alpha_s) = 0$ pour tout s. Il existe ainsi $\beta_s \in W^{lf}(A_{x_s})$ tel que $\pi^*(\beta_s) = \alpha_s$. Prenant la somme des β_s, on voit qu'il existe $\beta \in C^p(A, W)$ tel que

$$\pi^*(\beta) = \alpha.$$

Montrons que $\beta \in \mathrm{Ker}(d^p_A : C^p(A, W) \to C^{p+1}(A, W))$. On a pour tout s

$$0 = d^p_{A[t]}(\alpha_s) = d^p_{A[t]}(\pi^*(\beta_s)) = \pi^*(d^p_A(\beta_s)).$$

Or

$$d^p_A : W^{lf}(A_{x_s}) \longrightarrow \bigoplus_{v \in A^{(p+1)} \cap \overline{x_s}} W^{lf}(A_v)$$

et pour chaque $v \in A^{(p+1)} \cap \overline{x_s}$ on a une suite exacte (à nouveau le corollaire 11.2.2)

$$0 \longrightarrow W^{lf}(A_v) \xrightarrow{\pi^*} W^{lf}(A[t]_v) \longrightarrow \bigoplus_{z \in N_v^{(p+2)}} W^{lf}(A[t]_z) \longrightarrow 0 .$$

On tire donc de $\pi^*(d^p_A(\beta_s)) = 0$ que $d^p_A(\beta_s) = 0$. Ainsi $\beta \in \mathrm{Ker}(d^p_A)$ et la surjectivité de π^* est démontrée. □

Remarque 11.2.5. — La preuve ci-dessus montre également le résultat suivant : Si $\alpha \in \bigoplus_{z \in N^{(p)}} W^{lf}(k(z))$, alors

$$\alpha = 0 \in H^p(C(A[t], W)).$$

Corollaire 11.2.6. — *Soit A un anneau régulier de dimension n et*

$$\pi : A \longrightarrow A[t]$$

la projection usuelle. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\pi^* : H^i(C(A, I^j)) \longrightarrow H^i(C(A[t], I^j))$$

est injective.

Démonstration. — Comme ci-dessus, on ne fait que le cas $j = 0$. Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(d^i_A : C^i(A, W) \to C^{i+1}(A, W))$ tel que $\pi^*(\alpha) = 0$ dans $H^i(C(A[t], W))$. Alors il existe $\gamma \in C^{i-1}(A[t], W)$ tel que $d^{i-1}_{A[t]}(\gamma) = \pi^*(\alpha)$. La preuve de la surjectivité ci-dessus montre qu'on peut supposer que $\gamma = \pi^*(\beta)$ pour un certain $\beta \in C^{i-1}(A, W)$. Alors

$$\pi^*(\alpha) = d^{i-1}_{A[t]}(\gamma) = d^{i-1}_{A[t]}(\pi^*(\beta)) = \pi^*(d^{i-1}_A(\beta)).$$

Ainsi $\pi^*(\alpha) = \pi^*(d_A^{i-1}(\beta))$ et il découle de l'injectivité de π^* dans les suites exactes

$$0 \longrightarrow W^{lf}(A_{x_s}) \xrightarrow{\pi^*} W^{lf}(A[t]_{x_s}) \longrightarrow \bigoplus_{z \in N_{x_s}^{(p+1)}} W^{lf}(A[t]_z) \longrightarrow 0$$

que $\alpha = d_A^{i-1}(\beta)$. Donc $\alpha = 0$ dans $H^i(C(A,W))$ et π^* est injective. $\square$

On a démontré :

Théorème 11.2.7. — *Soit A un anneau régulier de dimension n. Notons*

$$\pi : \mathrm{Spec}(A[t]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

la projection usuelle. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\pi^* : H^i(C(A, I^j)) \longrightarrow H^i(C(A[t], I^j))$$

est un isomorphisme.

Corollaire 11.2.8. — *Soit A un anneau régulier de dimension n. Notons*

$$\pi : \mathrm{Spec}(A[t_1, \dots, t_m]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

la projection usuelle. Alors pour tout i et tout j

$$\pi^* : H^i(C(A, I^j)) \longrightarrow H^i(C(A[t_1, \dots, t_m], I^j))$$

est un isomorphisme.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 11.2.9. — *Soit X un schéma régulier, E un fibré vectoriel de rang n sur X et $\pi : E \to X$ la projection. Alors*

$$\pi^* : H^i(C(X, I^j)) \longrightarrow H^i(C(E, I^j))$$

est un isomorphisme pour tout i.

Démonstration. — Si U est comme ci-dessus un ouvert affine trivialisant pour E, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow C(X, I^j)_Y \longrightarrow C(X, I^j) \longrightarrow C(U, I^j) \longrightarrow 0 \ .$$

On sait par le théorème 11.2.9 ci-dessus que la cohomologie de $C(U, I^j)$ est invariante par homotopie. Il suffit donc de démontrer que celle de $C(X, I^j)_Y$ est invariante pour terminer la preuve. On choisit un ouvert affine V trivialisant E tel que $V \cap Y \neq \varnothing$. Soit $Z = Y \setminus V$. Répétant la même preuve que celles du théorème 11.2.4 et du corollaire 11.2.6 (avec support sur Y), on voit qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow C(X, I^j)_Z \longrightarrow C(X, I^j)_Y \longrightarrow C(V, I^j)_Y \longrightarrow 0$$

et que l'homologie de $C(V, I^j)_Y$ est invariante par homotopie. Comme X est noethérien, on est donc ramené à démontrer l'invariance homotopique pour $C(X, I^j)_P$ où P est un point fermé de X. Mais c'est facile dans ce cas. $\square$

11.3. Invariance homotopique des groupes de Chow-Witt

THÉORÈME 11.3.1. — *Soit X un schéma régulier, E un fibré vectoriel de rang n sur X et $\pi : E \to X$ la projection. Alors*

$$\pi^* : H^i(C(X, K_j^M)) \longrightarrow H^i(C(E, K_j^M))$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Voir [**Ros96**, proposition 8.6, p. 370]. $\square$

COROLLAIRE 11.3.2. — *Soit X un schéma régulier, E un fibré vectoriel de rang n sur X et $\pi : E \to X$ la projection. Alors*

$$\pi^* : H^i(C(X, G^j)) \longrightarrow H^i(C(E, G^j))$$

est un isomorphisme pour tout i et tout j.

Démonstration. — Considérons le produit fibré de complexes suivant :

$$\begin{tikzcd} C(X, G^j) \arrow[r] \arrow[d] & C(X, I^j) \arrow[d] \\ C(X, K_j^M) \arrow[r] & C(X, I^j/I^{j+1}). \end{tikzcd}$$

Puisque $C(X, I^j) \to C(X, I^j/I^{j+1})$ est surjective et le diagramme ci-dessus est un produit fibré, on voit qu'on a une suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow C(X, G^j) \longrightarrow C(X, I^j) \oplus C(X, K_j^M) \longrightarrow C(X, I^j/I^{j+1}) \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, on obtient également une suite exacte de complexes pour E et on s'aperçoit que π^* est un morphisme de suites exactes de complexes. On en déduit le résultat en utilisant la suite exacte longue en cohomologie, les théorèmes 11.2.9 et 11.3.1 et le lemme des 5. $\square$

COROLLAIRE 11.3.3. — *Soit X un schéma régulier, E un fibré vectoriel de rang n sur X et $\pi : E \to X$ la projection. Alors on a pour tout j des isomorphismes*

$$\pi^* : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^j(E).$$

CHAPITRE 12

PRODUITS FIBRÉS ET MORPHISMES DE COMPLEXES

12.1. Résumé

Le but de ce chapitre est de démontrer que si

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[u]{} & Y \end{array}$$

est un produit fibré de schémas lisses tel que f soit propre et u soit plat alors on a au niveau des groupes de Chow-Witt

$$u^* f_* = g_* v^*.$$

Nous commençons par utiliser des résultats de R. Hartshorne ([**Har66**]) pour démontrer que cette égalité est vraie pour les complexes de Gersten-Witt lorsque f est fini et u est plat. Le cas où f est propre découle ensuite du cas fini. Comme $u^* f_* = g_* v^*$ pour les complexes en K-théorie de Milnor (voir le théorème 2.3.8), on en déduit immédiatement le résultat cherché.

12.2. Le cas des morphismes finis

Commençons par démontrer que $u^* f_* = g_* v^*$ au niveau des complexes de Gersten-Witt lorsque f est fini et u est plat. Rappelons tout d'abord qu'on avait noté $f^\flat$ le foncteur

$$f^\flat : D^b(\mathcal{M}(Y)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}(X))$$

défini par

$$f^\flat(G_\bullet) = \overline{f}^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_X, G_\bullet).$$

On a :

PROPOSITION 12.2.1. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et $u : Y' \to Y$ un morphisme plat. Considérons le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[u]{} & Y. \end{array}$$

Alors on a un isomorphisme de foncteurs de $D^b(\mathcal{M}(X))$ vers $D^b(\mathcal{M}(Y'))$

$$u^* f_* \longrightarrow g_* v^*$$

et un isomorphisme de foncteurs de $D^b(\mathcal{M}(Y))$ vers $D^b(\mathcal{M}(X'))$

$$v^* f^\flat \longrightarrow g^\flat u^*.$$

Démonstration. — Voir [**Har66**, proposition 5.12, p. 111] et [**Har66**, proposition 6.3, p. 167]. □

PROPOSITION 12.2.2. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini. Alors on a un morphisme de foncteurs*

$$Trf_f : f_* f^\flat \longrightarrow Id.$$

Démonstration. — Voir [**Har66**, proposition 6.5, p. 168]. □

REMARQUE 12.2.3. — Pour être précis, on devrait écrire

$$Trf_f : Rf_* f^\flat \longrightarrow Id.$$

REMARQUE 12.2.4. — Il ne faut pas confondre le morphisme de foncteur Trf avec la trace utilisée plus tôt dans ce travail. La notation Trf est due à Hartshorne.

REMARQUE 12.2.5. — Si $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et M est un A-module de type fini, le morphisme ci-dessus n'est autre que l'évaluation en 1 :

$$\mathrm{Hom}_A(B, M) \longrightarrow M.$$

Ce morphisme satisfait la propriété suivante :

PROPOSITION 12.2.6. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et $u : Y' \to Y$ un morphisme plat. Considérons le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[u]{} & Y. \end{array}$$

Alors on a un diagramme commutatif de morphismes de foncteurs de $D^b(\mathcal{M}(Y))$ vers $D^b(\mathcal{M}(Y'))$:

$$\begin{tikzcd} u^*f_*f^\flat \arrow[r, "Trf_f"] & u^* \\ g_*v^*f^\flat \arrow[u] \arrow[r] & g_*g^\flat u^* \arrow[u, "Trf_g"'] \end{tikzcd}$$

où les isomorphismes $g_*v^*f^\flat \to u^*f_*f^\flat$ et $g_*v^*f^\flat \to g_*g^\flat u^*$ sont induits par les isomorphismes $g_*v^* \to u^*f_*$ et $v^*f^\flat \to g^\flat u^*$ de la proposition 12.2.1.

Démonstration. — Voir [**Har66**, proposition 6.8, p. 169]. ☐

COROLLAIRE 12.2.7. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et $u : Y' \to Y$ un morphisme plat. Considérons le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Supposons que X, Y, X', Y' soient réguliers. Posons $L = \overline{f}^*\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$ avec $n = \dim(Y) - \dim(X)$ et $L' = \overline{g}^*\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{O}_{Y'}}(g_*\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{Y'})$. Soient $I_\bullet$ et $J_\bullet$ des résolutions injectives minimales de $\mathcal{O}_Y$ et de $\mathcal{O}_{Y'}$. Notons

$$\phi_I : \tilde{W}^i(Y) \longrightarrow W^i(Y)$$
$$\psi_I : \tilde{W}^i(X, L) \longrightarrow W^i(X, L)$$
$$\phi_J : \tilde{W}^i(Y') \longrightarrow W^i(Y')$$

et

$$\psi_J : \tilde{W}(X', L') \longrightarrow W(X', L')$$

les isomorphismes induits par les quasi-isomorphismes

$$i : \mathcal{O}_Y \longrightarrow I_\bullet \quad \text{et} \quad j : \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow J_\bullet.$$

Alors pour tout p les morphismes

$$u^* : W^{p+n}(Y) \longrightarrow W^{p+n}(Y')$$
$$v^* : W^p(X, L) \longrightarrow W^p(X', v^*L)$$
$$f_* : \tilde{W}^p(X, L) \longrightarrow \tilde{W}^{p+n}(Y)$$

et

$$g_* : \tilde{W}^p(X', L') \longrightarrow \tilde{W}^{p+n}(Y')$$

satisfont l'égalité

$$u^*\phi_I f_*\psi_I^{-1} = \phi_J g_*\psi_J^{-1} v^*.$$

Démonstration. — Notons

$$D_X, D_X^I, D_Y, D_Y^I, D_{X'}, D_{X'}^J, D_{Y'}, D_{Y'}^J$$

les dualités respectives de

$$W^i(X,L), \tilde{W}^i(X,L), W^{i+n}(Y), \tilde{W}^{i+n}(Y), W^i(X',L'), \tilde{W}^i(X',L'), W^{i+n}(Y')$$

et $\tilde{W}^{i+n}(Y')$. Pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer que pour tout $P_\bullet$ dans $D^b(\mathcal{P}(X))$ les isomorphismes transformant la dualité (définition D.1.12)

$$\begin{array}{c} u^*\phi_I f_* \psi_I^{-1} D_X(P_\bullet) \xrightarrow{\alpha} u^*\phi_I f_* D_X^I(P_\bullet) \xrightarrow{\eta} u^*\phi_I D_Y^I(f_*P_\bullet) \xrightarrow{\beta} u^* D_Y(f_*P_\bullet) \\ \Big\downarrow \mu \\ D_{Y'}(u^* f_* P_\bullet) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D_{Y'}(g_* v^* P_\bullet) \\ \Big\uparrow \beta' \\ \phi_J g_* \psi_J^{-1} v^* D_X(P_\bullet) \xrightarrow[\mu']{} \phi_J g_* \psi_J^{-1} D_{X'}(v^*P_\bullet) \xrightarrow[\alpha']{} \phi_J g_* D_{X'}^J(v^*P_\bullet) \xrightarrow[\eta']{} \phi_J D_{Y'}^J(g_* v^* P_\bullet) \end{array}$$

donnent pour tout $\xi : P_\bullet \to L$ l'égalité (après identification par l'isomorphisme $g_*v^* \to u^*f_*$)

$$\mu\beta\eta\alpha(\xi) = \beta'\eta'\alpha'\mu'(\xi).$$

Calculons $\mu\beta\eta\alpha(\xi)$. On a

$$\alpha(\xi) : P_\bullet \longrightarrow \overline{f}^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_\bullet)$$

$$\begin{tikzcd} f_*P_\bullet \arrow[r, "\alpha(\xi)"] \arrow[dr, "\eta\alpha(\xi)"'] & f_*\overline{f}^*\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, I_\bullet) \arrow[d, "Tr_f"] \\ & I_\bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f_*P_\bullet \arrow[r, "\eta\alpha(\xi)"] \arrow[dr, "\beta\eta\alpha(\xi)"'] & I_\bullet \\ & \mathcal{O}_Y \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

et finalement

$$\mu\beta\eta\alpha(\xi) = u^*\beta\eta\alpha(\xi) : u^*f_*P_\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}$$

Omettant les isomorphismes α et β on trouve

$$\mu\beta\eta\alpha(\xi) = u^*(Trf_f \circ f_*\alpha) = u^*Trf_f \circ u^*f_*\alpha.$$

Calculant $\beta'\eta'\alpha'\mu'(\xi)$, on trouve

$$\beta'\eta'\alpha'\mu'(\xi) = Trf_g \circ g_* v^* \alpha.$$

La proposition 12.2.6 dit exactement que

$$Trf_g \circ g_* v^* \alpha = u^* Trf_f \circ u^* f_* \alpha. \quad \square$$

Corollaire 12.2.8. — *Soient X et Y des schémas réguliers de dimensions respectives n et m et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Soit encore Y' un schéma régulier et $u : Y' \to Y$ un morphisme plat. Considérons le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Alors pour tout j les morphismes

$$u^* f_* : C(X, I^j, L) \longrightarrow C(Y', I^{j+m-n})$$

et

$$g_* v^* : C(X, I^j, L) \longrightarrow C(Y', I^{j+m-n})$$

sont égaux.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du corollaire 12.2.7 ci-dessus et des définitions de f_* et g_* (voir le corollaire 5.3.6). $\square$

12.3. Le cas général

Supposons maintenant que dans le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

les morphismes f et g soient propres.

Lemme 12.3.1. — *Soit $x \in X, y = f(x)$, $z \in X'$ un point minimal de $v^{-1}(x)$ et $s = g(z)$. Supposons l'extension de corps $k(y) \subset k(x)$ infinie. Alors l'extension $k(s) \subset k(z)$ l'est aussi.*

Démonstration. — Les morphismes u, v étant de dimensions relatives égales (disons n), on a

$$\dim(\overline{z}) = n + \dim(\overline{x}) > n + \dim(\overline{y}) = \dim(\overline{s}).$$

Cela montre que $k(s) \subset k(z)$ est une extension infinie. $\square$

COROLLAIRE 12.3.2. — *Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Supposons que $k(y) \subset k(x)$ soit infinie. Alors pour tout $\alpha \in W(k(x), \omega_{k(x)/k})$ on a*

$$u^* f_* \alpha = g_* v^* \alpha = 0.$$

Démonstration. — Par le lemme ci-dessus, on a $f_*\alpha = 0$. Le même calcul montre que $g_* v^* \alpha = 0$. □

Nous aurons besoin des lemmes suivants pour démontrer le théorème 12.3.6.

LEMME 12.3.3. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et $y \in f(X)$. Considérons le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \arrow[r, "u"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Alors $u^* f_* = g_* v^*$ comme morphismes de complexes.

Démonstration. — Soit $x \in X$ et

$$\varphi : k(x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k(x)}(k(x), \omega_{k(x)/k})$$

un isomorphisme. On vérifie que

$$v^*([\varphi]) = \begin{cases} [\varphi] & \text{si } y \in \overline{f(x)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si maintenant $z \in Y$ et $\psi : k(z) \to \mathrm{Hom}_{k(z)}(k(z), \omega_{k(z)/k})$ est un isomorphisme, on voit de même que

$$u^*([\psi]) = \begin{cases} [\psi] & \text{si } y \in \overline{z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$u^* f_*([\varphi]) = f_*([\varphi]) = g_*([\varphi]) = g_* v^*([\varphi]). \quad \square$$

Considérons à nouveau le produit fibré

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Si $y \in f(X)$, on obtient par changement de base un cube dont toutes les faces sont des produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
X'_y \arrow[rr, "v'"] \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, "s'''"'] & & X_y \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "s'" near end] & \\
& Y'_y \arrow[rr, "u'" near start] \arrow[dd, "s''" near start] & & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \arrow[dd, "s"] \\
X' \arrow[rr, "v" near end] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dr, "f"] & \\
& Y' \arrow[rr, "u"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Ceci nous amène au lemme suivant :

LEMME 12.3.4. — *Pour démontrer que $u^*f_* = g_*v^*$ il suffit de démontrer qu'on a pour tout $y \in f(X)$ l'égalité $(u')^*(f')_* = (g')_*(v')^*$ comme morphismes de complexes $C(X_y, I^j, L) \to C(Y'_y, I^{j+m-n})$*

Démonstration. — On remarque tout d'abord que d'après le lemme 12.3.3 ci-dessus on a

$$s^*f_* = (f')_*(s')^*.$$

Le même type d'argument que dans la preuve du lemme 12.3.3 montre que

$$(s'')^*g_* = (g')_*(s''')^*$$

et la proposition 3.4.9 donne de plus

$$(s'')^*u^* = (u')^*s^*.$$

Supposons maintenant que l'égalité

$$(u')^*(f')_* = (g')_*(v')^*$$

soit démontrée. On a alors

$$(u')^*(f')_*(s')^* = (g')_*(v')^*(s')^*$$

qui est en fait

$$(u')^*s^*f_* = (g')_*(s''')^*v^*.$$

On obtient finalement

$$(s'')^*u^*f_* = (s'')^*g_*v^*.$$

Soit $y \in Y$, $z \in Y'$ et $\varphi : k(z) \to \mathrm{Hom}_{k(z)}(k(z), \omega_{k(z)/k})$ un isomorphisme. Comme dans la preuve du lemme ci-dessus, on a :

$$(s'')^*([\varphi]) = \begin{cases} [\varphi] & \text{si } y \in \overline{u(z)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que si $(s'')^*u^*f_* = (s'')^*g_*v^*$ pour tout $y \in Y$, alors

$$u^*f_* = g_*v^*. \quad \square$$

Ce lemme montre que dans ce qui suit on peut supposer que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

on a $Y = \mathrm{Spec}(A)$ où A est une k-algèbre locale formellement lisse. Soit K le corps résiduel de A. Par changement de base à $\mathrm{Spec}(K)$, on obtient un produit fibré

$$\begin{tikzcd} X'_K \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"'] & X_K \arrow[d, "f'"] \\ Y'_K \arrow[r, "u'"'] & \mathrm{Spec}(K). \end{tikzcd}$$

Lemme 12.3.5. — *Pour démontrer que*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

donne $u^*f_* = g_*v^*$, il suffit de démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X'_K \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"'] & X_K \arrow[d, "f'"] \\ Y'_K \arrow[r, "u'"'] & \mathrm{Spec}(K) \end{tikzcd}$$

donne $(u')^*(f')_* = (g')_*(v')^*$.

Démonstration. — C'est essentiellement la même preuve que celle du lemme 12.3.4. Il suffit juste d'utiliser le cas des morphismes finis. $\square$

On peut ainsi supposer que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

on a $Y' = \mathrm{Spec}(K)$. Soit $x \in X$. Si $K \subset k(x)$ est infinie alors le corollaire 12.3.2 permet de conclure. On peut donc supposer que x est un point fermé de X. Dans ce cas le morphisme $t : \mathrm{Spec}(k(x)) \to X$ est fini et on a

$$\begin{tikzcd} X'_{k(x)} \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "t'"'] & \mathrm{Spec}(k(x)) \arrow[d, "t"] \\ X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

où ft et gt' sont finis et u, v' sont plats. Par le cas des morphismes finis, on a

$$u^*(ft)_* = (gt')_*(v')^*.$$

On a donc démontré le théorème annoncé :

Théorème 12.3.6. — *Soit le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

où f est propre et u est plat. Soient $n = \dim(X)$ et $m = \dim(Y)$. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$ les morphismes

$$u^*f_* : C(X, I^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y', I^{j+m-n}, u^*\omega_{Y/k})$$

et

$$g_*v^* : C(X, I^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y', I^{j+m-n}, u^*\omega_{Y/k})$$

sont égaux.

Corollaire 12.3.7. — *Soit le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

où f est propre et u est plat. Alors pour tout j les morphismes

$$u^*f_* : C(X, G^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y', G^{j+m-n}, u^*\omega_{Y/k})$$

et

$$g_*v^* : C(X, G^j, \omega_{X/k}) \longrightarrow C(Y', G^{j+m-n}, u^*\omega_{Y/k})$$

sont égaux.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et du théorème 2.3.8. □

COROLLAIRE 12.3.8. — *Soit le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

où f est propre et u est plat. Alors pour tout j les morphismes

$$u^*f_* : \widetilde{CH}^j(X, \omega_{X/k}) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+m-n}(Y', u^*\omega_{Y/k})$$

et

$$g_*v^* : \widetilde{CH}^j(X, \omega_{X/k}) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+m-n}(Y', u^*\omega_{Y/k})$$

sont égaux.

CHAPITRE 13

LES CLASSES D'EULER

13.1. Résumé

Soit E un fibré vectoriel de rang n sur un schéma régulier X. Dans [**BM00**], les auteurs définissent la classe d'Euler $c(E)$ d'un tel fibré. Ils montrent que si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $E = Q \oplus A$ alors $c(E) = 0$. Nous reprenons cette définition et obtenons pour tout $j \in \mathbb{N}$ un homomorphisme

$$\tilde{c}_n(E) : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det E^\vee)$$

que nous appelons classe d'Euler de E. Nous montrons que cette classe satisfait de bonnes propriétés fonctorielles. En particulier, si

$$0 \longrightarrow E'' \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels sur X avec E' et E'' de rang r et k respectivement, nous montrons que

$$\tilde{c}_n(E) = (\tilde{c}_r(E') \otimes \det (E'')^\vee)\tilde{c}_k(E'')$$

où $\tilde{c}_k(E'') \otimes \det (E')^\vee$ est une classe d'Euler tordue par le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\det (E')^\vee$. Grâce à la relation ci-dessus, nous obtenons immédiatement que pour $X = \mathrm{Spec}(A)$ on a $\tilde{c}_n(E) = 0$ si $E = Q \oplus A$. Ce chapitre pose une question naturelle : peut-on définir des classes de Chern-Witt (pas seulement des classes d'Euler) ? La réponse est négative, comme le montrera ultérieurement le calcul des groupes de Chow-Witt d'un fibré projectif. On peut néanmoins définir certaines classes qui peuvent s'avérer intéressantes. En effet, les classes de Chern usuelles sont construites de la manière suivante (voir [**Ful84**]) :

Si E est un fibré vectoriel de rang n sur X, on considère l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ et la projection usuelle

$$p : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X.$$

On définit ensuite les classes de Segre $s_i(E) : CH^j(X) \to CH^{i+j}(X)$ en posant

$$s_i(E)(\alpha) = p_*(c_1(\mathcal{O}(1))^{i+n-1} \cap p^*(\alpha))$$

pour tout cycle α. On inverse ensuite la série formelle des classes de Segre pour obtenir les classes de Chern. On sait que les groupes de Chow-Witt satisfont de bonnes propriétés pour le pull-back et le push-forward de cycles. Mais

$$\tilde{c}_1(\mathcal{O}(1)) : \widetilde{CH}^j(\mathbb{P}(E)) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+1}(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(-1))$$

fait apparaître une torsion par $\mathcal{O}(-1)$ qu'on ne peut en général redescendre sur X. On obtient néanmoins des classes de Segre paires ou impaires (selon le rang de E) qu'il conviendrait peut-être d'étudier plus en détail. En effet, si E est un fibré vectoriel sur X, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$-modules

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow p^*E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow 0$$

qui donne immédiatement $\omega_{\mathbb{P}(E)/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-n) \otimes p^* \det E^\vee$. Utilisant ensuite la suite exacte

$$p^*\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/k} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0$$

on trouve $\omega_{\mathbb{P}(E)/k} \simeq p^*(\omega_{X/k} \otimes \det E^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-n)$. Si par exemple n est impair, on peut composer

$$p^* : \widetilde{CH}^i(X, \omega_{X/k}) \longrightarrow \widetilde{CH}^i(\mathbb{P}(E), p^*\omega_{X/k}),$$

$$\tilde{c}_1(\mathcal{O}(1))^n : \widetilde{CH}^i(\mathbb{P}(E), p^*\omega_{X/k}) \longrightarrow \widetilde{CH}^{i+n}(\mathbb{P}(E), p^*\omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}(-n))$$

et

$$p_* : \widetilde{CH}^{i+n}(\mathbb{P}(E), \omega_{\mathbb{P}(E)/k} \otimes p^* \det E) \longrightarrow \widetilde{CH}^{i+1}(X, \omega_{X/k} \otimes \det E)$$

pour obtenir une première classe de Segre associée à E.

13.2. Définitions

Soit X un schéma régulier de dimension r et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. On note $E = \mathrm{Spec}(Sym(E^\vee))$ l'espace total, $p : E \to X$ la projection et $s_0 : X \to E$ la section nulle. Rappelons qu'on a pour tout j, tout $\mathcal{O}_E$-module inversible V et tout $\mathcal{O}_X$-module inversible M un homomorphisme (corollaire 10.4.5)

$$(s_0)_* : \widetilde{CH}^j(X, \omega_{X/k} \otimes (s_0)^*V) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, \omega_{E/k} \otimes V)$$

et un isomorphisme (corollaire 11.3.3)

$$(p^*) : \widetilde{CH}^{j+n}(X, M) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, p^*M).$$

Comme X est localement d'intersection complète dans E, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow p^*(E^\vee)/p^*(E^\vee)^2 \longrightarrow (s_0)^*\Omega_{E/k} \longrightarrow \Omega_{X/k} \longrightarrow 0$$

qui induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres

$$\omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \det E^\vee \simeq (s_0)^*(\omega_{E/k}).$$

Tensorisant par $\det E$ à gauche et à droite, on obtient

$$\omega_{X/k} \simeq (s_0)^*(\omega_{E/k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \det E.$$

Par ailleurs, $E \simeq (s_0)^* p^* E$ et donc

$$\omega_{X/k} \simeq (s_0)^*[(\omega_{E/k}) \otimes_{\mathcal{O}_E} p^*(\det E)].$$

Posons $V = \omega_{E/k}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_E} p^*(\det E^\vee)$. Remplaçant dans la première équation, on obtient un homomorphisme

$$(s_0)_* : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, p^*(\det E^\vee)).$$

En composant avec l'inverse de l'isomorphisme

$$p^* : \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det E^\vee) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, p^*(\det E^\vee))$$

on obtient finalement un homomorphisme

$$(p^*)^{-1}(s_0)_* : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det E^\vee).$$

Définition 13.2.1. — *On appelle classe d'Euler de E l'homomorphisme défini ci-dessus. On le note $\tilde{c}_n(E)$.*

Remarquons que si N est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors $(s_0)^* p^* N \simeq N$. On a donc un homomorphisme

$$(s_0)_* : \widetilde{CH}^j(X, N) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, p^*(\det E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_E} p^* N)$$

et un isomorphisme

$$p^* : \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} N) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(E, p^*(\det E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_E} p^* N).$$

On obtient donc aussi une classe d'Euler tordue par un $\mathcal{O}_X$-module inversible N :

$$(p^*)^{-1}(s_0)_* : \widetilde{CH}^j(X, N) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det E^\vee \otimes N)$$

Définition 13.2.2. — *On appelle classe d'Euler de L tordue par N l'homomorphisme défini ci-dessus. On le note $\tilde{c}_n(E) \otimes N$.*

Remarque 13.2.3. — Cette classe d'Euler tordue permet de définir la composition de $\tilde{c}_n(E')$ et $\tilde{c}_m(E'')$ pour deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres. En effet, on a

$$\tilde{c}_n(E') : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det(E')^\vee)$$

et

$$\tilde{c}_m(E'') : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(X, \det(E'')^\vee).$$

On ne peut pas composer $\tilde{c}_n(E')$ et $\tilde{c}_m(E'')$, mais par contre la composition

$$(\tilde{c}_m(E'') \otimes \det(E')^\vee) \circ \tilde{c}_n(E') : \widetilde{CH}^j(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+m+n}(X, \det(E'')^\vee \otimes \det(E')^\vee)$$

est définie.

13.3. Propriétés

THÉORÈME 13.3.1. — *Soient X un schéma lisse sur k, E et V des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rangs respectifs m et n.*

1°) *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. Alors*

$$f_* \circ (\tilde{c}_m(f^*E) \otimes \omega_{X/k}) = (\tilde{c}_m(E) \otimes \omega_{Y/k}) \circ f_*.$$

2°) *Soit $g : Z \to X$ un morphisme plat. Alors*

$$g^* \circ \tilde{c}_m(E) = \tilde{c}_m(g^*E) \circ g^*.$$

3°) *Soit $\pi : \widetilde{CH}^j(X) \to CH^j(X)$ la projection naturelle. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{CH}^j(X) \arrow[r, "\tilde{c}_m(E)"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{CH}^{j+m}(X, \det E^\vee) \arrow[d, "\pi"] \\ CH^j(X) \arrow[r, "c_m(E)"'] & CH^{j+m}(X) \end{tikzcd}$$

où $c_m(E)$ est la m-ième classe de Chern de E.

Démonstration. — Montrons d'abord 1°). Soit donc $f : X \to Y$ un morphisme propre. On a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Si $t_0 : X \to E'$ est la section nulle, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "h"] & E \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "t_0"] & Y. \arrow[u, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

Donc

$$(\tilde{c}_m(E) \otimes \omega_{Y/k})f_* = (p^*)^{-1}(s_0)_* f_* = (p^*)^{-1} h_*(t_0)_*$$

Comme $p^* f_* = h_* q^*$, on trouve

$$(p^*)^{-1} g_*(t_0)_* = f_*(q^*)^{-1}(t_0)_* = f_*(\tilde{c}_m(f^*(E)) \otimes \omega_{X/k}).$$

Pour démontrer 2°), on considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "d"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Notons $t_0 : Z \to E'$ la section nulle. Alors

$$\tilde{c}_1(g^*L)g^* = (q^*)^{-1}(t_0)_*g^*$$

Comme avant, on a $d^*(s_0)_* = (t_0)_*g^*$. Donc

$$(q^*)^{-1}(t_0)_*g^* = (q^*)^{-1}d^*(s_0)_*.$$

Or $d^*p^* = q^*g^*$ et finalement

$$(q^*)^{-1}d^*(s_0)_* = g^*(p^*)^{-1}(s_0)_* = g^*(\tilde{c}_1(L)).$$

Pour prouver 3°), il suffit de voir que la m-ième classe de Chern usuelle $c_m(E)$ satisfait $c_m(E) = (p^*)^{-1}(s_0)_*$. Pour ceci, voir [**Ful84**, exemple 3.3.2, p. 67]. ☐

PROPOSITION 13.3.2. — *Soient X un schéma lisse sur k,*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels de rangs respectifs m, n, r au-dessus de X. Alors

$$(\tilde{c}_r(E_3) \otimes \det{(E_1)}^\vee)\tilde{c}_m(E_1) = \tilde{c}_n(E_2).$$

Démonstration. — Soient $p_i : E_i \to X$ les projections et $s_i : X \to E_i$ les sections nulles de p_i. On considère le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "s_3"'] & E_3. \end{tikzcd}$$

Alors

$$(\tilde{c}_r(E_3) \otimes \det{(E_1)}^\vee)\tilde{c}_m(E_1) = (p_3^*)^{-1}(s_3)_*(p_1^*)^{-1}(s_1)_*.$$

De plus, $p_3g = p_2$ et $g^*(s_3)_* = f_*(p_1)^*$. Ainsi,

$$(\tilde{c}_r(E_3) \otimes \det{(E_1)}^\vee)\tilde{c}_m(E_1) = (p_2^*)^{-1}g^*(s_3)_*(p_1^*)^{-1}(s_1)_* = (p_2^*)^{-1}f_*(s_1)_*.$$

Par fonctorialité du push-forward, on trouve finalement

$$(p_2^*)^{-1}f_*(s_1)_* = (p_2^*)^{-1}(s_2)_* = \tilde{c}_n(E_2). \quad \square$$

COROLLAIRE 13.3.3. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n. Soit P un A-module projectif de rang n tel que $P \simeq Q \oplus A$. Alors $\tilde{c}_n(P) = 0$.*

Démonstration. — Par la proposition 13.3.2, il suffit de montrer que $\tilde{c}_1(A) = 0$. C'est une conséquence directe de la remarque 11.2.5. □

13.4. Le calcul de $(s_0)_*$

La définition donnée dans la première section a l'avantage de permettre de démontrer facilement les propriétés fonctorielles des classes d'Euler. Mais elle a l'inconvénient d'être un peu opaque. Dans cette section, on va calculer explicitement $(s_0)_*$ dans le cas d'un fibré vectoriel E de rang n sur un schéma X lisse de dimension n.

Soit A une k-algèbre lisse de dimension n de corps des fractions K et P un A-module projectif de rang n. Soit $B = Sym(P^\vee)$ et

$$s_0 : \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(B)$$

la section nulle. Rappelons que la classe d'Euler de P

$$\tilde{c}_n(P) : \widetilde{CH}^j(\operatorname{Spec}(A)) \longrightarrow \widetilde{CH}^{j+n}(\operatorname{Spec}(A), \det P^\vee)$$

est définie par $\tilde{c}_n(P) = (p^*)^{-1}(s_0)_*$ où

$$p : \operatorname{Spec}(B) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$$

est la projection usuelle. Comme $\widetilde{CH}^{j+n}(\operatorname{Spec}(A), \det P^\vee) = 0$ si $j > 0$ (puisqu'il n'y a pas de points de codimension supérieure à n dans $\operatorname{Spec}(A)$), on veut calculer

$$\tilde{c}_n(P) : \widetilde{CH}^0(\operatorname{Spec}(A)) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(\operatorname{Spec}(A), \det P^\vee).$$

Par définition, $\widetilde{CH}^0(\operatorname{Spec}(A)) = GW(K)$, le groupe de Grothendieck-Witt de K (définition C.1.6). Pour comprendre $\tilde{c}_n(P)$ il suffit donc de calculer $\tilde{c}_n(P)(K, \psi)$ où

$$\psi : K \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(K, K)$$

est un isomorphisme. Considérons la forme

$$\varphi : K \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(K, K)$$

définie par $\varphi(1)(1) = 1$. Par abus de langage, on appellera également classe d'Euler de P l'élément $\tilde{c}_n(P)(K, \varphi)$ de $\widetilde{CH}^n(\operatorname{Spec}(A), \det P^\vee)$.

Calculons $(s_0)_*(K, \varphi)$. Dans le cas de $\operatorname{Spec}(A)$ et $\operatorname{Spec}(B)$, on voit que

$$(s_0)_* : \widetilde{CH}^0(\operatorname{Spec}(A), \omega_{A/k}) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(\operatorname{Spec}(B), \omega_{B/k})$$

satisfait pour tout isomorphisme

$$\eta : K \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(K, \omega_{K/k})$$

l'égalité $(s_0)_*(K, \eta) = (K, \eta) \in \widetilde{CH}^n(\operatorname{Spec}(B), \omega_{B/k})$. Soit $t_1, \ldots, t_n$ une base de transcendance de K sur k. Choisissons le générateur $a = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ de $\omega_{K/k}$. On a des isomorphismes canoniques

$$\operatorname{Hom}_K(K, K) \simeq \operatorname{Hom}_K(K, K) \otimes_K \omega_{K/k} \otimes_K \omega_{K/k}^\vee \simeq \operatorname{Hom}_K(K, \omega_{K/k}) \otimes_K \omega_{K/k}^\vee.$$

Définissons
$$\varphi_a : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, \omega_{K/k})$$
par $\varphi_a(1)(1) = a$. On peut voir l'isomorphisme
$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, K)$$
comme un isomorphisme
$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, \omega_{K/k}) \otimes_K \omega_{K/k}^\vee$$
défini par $\varphi(1) = \varphi_a(1) \otimes a^\vee$. Soit $x_1, \dots, x_n$ une base de $P \otimes_A K$ et notons P' l'idéal PB de B. Alors l'isomorphisme canonique
$$\omega_{A/k} \otimes_A K \longrightarrow [(s_0)^*(\omega_{B_{P'}/k} \otimes_B (p^* \det P)_{P'})] \otimes_A K$$
donne en particulier
$$a = (a \wedge x_1^\vee \wedge \cdots \wedge x_n^\vee) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$$
où $a \wedge x_1^\vee \wedge \cdots \wedge x_n^\vee \in \omega_{B_{P'}/k}$ et $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in p^* \det P \otimes_A K$. Via cet isomorphisme, on a
$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, \omega_{K/k}) \otimes_K [(s_0)^*(\omega_{B_{P'}/k} \otimes_B (p^* \det P)_{P'})] \otimes_A K$$
donné par $\varphi(1) = \varphi_a(1) \otimes a^\vee \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes x_1^\vee \wedge \cdots \wedge x_n^\vee$. Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique
$$\omega_{K/k} \simeq \mathrm{Ext}^n_{B_{P'}}(K, B_{P'}) \otimes_B \omega_{B_{P'}/k}$$
qui donne $a = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes a \wedge x_1^\vee \wedge \cdots \wedge x_n^\vee$. Finalement on obtient
$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{B_{P'}}(K, B_{P'}) \otimes_B (p^* \det P)_{P'}$$
avec $\varphi(1) = \mathit{Kos}(x_1^\vee, \dots, x_n^\vee) \otimes x_1^\vee \wedge \cdots \wedge x_n^\vee$, où $\mathit{Kos}(x_1^\vee, \dots, x_n^\vee)$ est le complexe de Koszul associée à la suite régulière $x_1^\vee, \dots, x_n^\vee$ de l'anneau local $K[x_1^\vee, \dots, x_n^\vee]_{(x_1^\vee, \dots, x_n^\vee)}$. On vérifie que cette description de φ est indépendante du choix de la base de transcendance $t_1, \dots, t_n$ de K sur k et du choix de la base $x_1, \dots, x_n$ de $P \otimes_A K$. On a démontré :

Proposition 13.4.1. — *Soient A une k-algèbre lisse de dimension n de corps des fractions K et P un A-module projectif de rang n. Soit $B = \mathit{Sym}(P^\vee)$,*
$$i : p^* P^\vee \longrightarrow B$$
l'homomorphisme naturel et $\mathit{Kos}(p^* P^\vee)$ le complexe de Koszul associé à cet homomorphisme. Soit enfin
$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, K)$$
définie par $\varphi(1)(1) = 1$. Alors l'image de (K, φ) par
$$(s_0)_* : \widetilde{CH}^0(\mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(\mathrm{Spec}(B), p^* \det P^\vee)$$
est donnée par la localisation en la section nulle du morphisme symétrique
$$\alpha : \mathit{Kos}(p^* P^\vee) \longrightarrow T^n(\mathrm{Hom}_B(\mathit{Kos}(p^* P^\vee), p^* \det P^\vee))$$

défini en degré i par l'isomorphisme évident

$$\alpha_i : \bigwedge^i (p^* P^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\Big(\bigwedge^{n-i}(p^* P^\vee), p^* \det P^\vee\Big).$$

REMARQUE 13.4.2. — Pour que le morphisme symétrique

$$\alpha : Kos(p^* P^\vee) \longrightarrow T^n(\mathrm{Hom}_B(Kos(p^* P^\vee), p^* \det P^\vee))$$

soit un morphisme de complexe, il faut faire apparaître des signes dans les isomorphismes

$$\alpha_i : \bigwedge^i (p^* P^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\Big(\bigwedge^{n-i}(p^* P^\vee), p^* \det P^\vee\Big).$$

Nous laissons au lecteur consciencieux le soin de déterminer ces signes (voir par exemple [**BG05**, Remarque 4.2, p. 8]).

COROLLAIRE 13.4.3. — *Soient X un schéma lisse sur k de dimension n et E un fibré vectoriel de rang n. Soit*

$$i : p^* E^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_E$$

l'homomorphisme naturel et $Kos(p^* E^\vee)$ le complexe de Koszul associé à cet homomorphisme. Soit encore

$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K, K)$$

définie comme ci-dessus. Alors $(s_0)_*(K, \varphi)$ est donnée par la localisation en la section nulle du morphisme symétrique

$$\alpha : Kos(p^* E^\vee) \longrightarrow T^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(Kos(p^* E^\vee), p^* \det E^\vee))$$

défini en degré i par l'isomorphisme évident

$$\alpha_i : \bigwedge^i (p^* E^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\Big(\bigwedge^{n-i}(p^* E^\vee), p^* \det E^\vee\Big).$$

Démonstration. — Ce calcul se fait localement. C'est donc une conséquence directe du résultat ci-dessus. □

CHAPITRE 14

LA CLASSE D'EULER D'UN MODULE PROJECTIF DE RANG MAXIMAL

14.1. Résumé

Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et P un module projectif de rang n. Dans ce chapitre, nous montrons que la classe d'Euler peut être calculée à l'aide de n'importe quelle section

$$s : P \longrightarrow A$$

telle que $s(P)$ soit de hauteur n. Ce résultat est évoqué dans [**BM00**], avec l'hypothèse plus restrictive que $s(P)$ est réduite.

14.2. Homotopies de sections

Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et Q un A-module projectif de rang m inférieur ou égal à n. Soient $s : Q \to A$ et $u : Q \to A$ deux sections telles que $\mathrm{ht}(s(Q)) = \mathrm{ht}(u(Q)) = m$.

Lemme 14.2.1. — *Il existe une section $v : Q[t] \to A[t]$ telle que $\mathrm{ht}(v(Q[t])) = m$, $v(0) = s$ et $v(1) = u$.*

Démonstration. — Voir [**BS00**, lemme 3.0, p. 190]. □

Considérons la section $s : Q \to A$ et le complexe de Koszul $Kos(s)$ associé à cette section :

$$0 \longrightarrow \wedge^m Q \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q \xrightarrow{\ s\ } A \longrightarrow 0.$$

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, les isomorphismes usuels (avec les signes de [**BG05**, remarque 4.2, p. 8])

$$\wedge^l Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\wedge^{m-l} Q, \det Q)$$

induisent un isomorphisme symétrique

$$\varphi_s : Kos(s) \longrightarrow T^m \mathrm{Hom}_A(Kos(s), \det Q).$$

Par ailleurs, le support de $Kos(s)$ est $s(Q)$, qui est de hauteur m. Ainsi $(Kos(s),\varphi_s)$ détermine un élément de $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)^{(m)}} GW(k(\mathfrak{p}),\operatorname{Ext}^m_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),A_\mathfrak{p}))$ (voir la remarque 10.2.9). Comme φ_s est un isomorphisme global, on voit que $(Kos(s),\varphi_s)$ est annulé par l'homomorphisme

$$d_G^m : \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)^{(m)}} GW(k(\mathfrak{p}),\operatorname{Ext}^m_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),A_\mathfrak{p}))\longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A)^{(m+1)}} W(k(\mathfrak{q}),\operatorname{Ext}^{m+1}_{A_\mathfrak{q}}(k(\mathfrak{q}),A_\mathfrak{q}))$$

et donc détermine un élément de $\widetilde{CH}^m(A,\det Q)$.

Définition 14.2.2. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et Q un A-module projectif de rang $m\leq n$. Soit $s:Q\to A$ une section telle que $\operatorname{ht}(s(Q))=m$. On note $[Kos(s),\varphi_s]$ la classe du complexe de Koszul $Kos(s)$ (muni de sa forme symétrique standard φ_s) dans $\widetilde{CH}^m(A,\det Q)$*

Si $s:Q\to A$ est une section telle que $\operatorname{ht}(s)(Q)=m$, on peut considérer la section $s\otimes 1 : Q[t]\to A[t]$. Cette section satisfait encore $\operatorname{ht}(s\otimes 1(Q[t]))=m$. Comme d'habitude, notons $p:\operatorname{Spec}(A[t])\to\operatorname{Spec}(A)$ la projection. Par définition de p^*, on a alors $p^*([Kos(s),\varphi_s])=[Kos(s\otimes 1),\varphi_{s\otimes 1}]$. Le lemme suivant sera utile dans la suite :

Lemme 14.2.3. — *Soit $a\in A$ et $s_a:\operatorname{Spec}(A)\to\operatorname{Spec}(A[t])$ la section donnée par $t\mapsto a$. Soit $\widetilde{CH}^{m+1}(A[t],\det Q[t])_{s_a(\operatorname{Spec}(A))}$ le groupe de Chow-Witt à support sur $s_a(\operatorname{Spec}(A))$. Alors*

$$(s_a)_*([Kos(s),\varphi_s])=[Kos(s\otimes 1,t-a),\varphi_{(s\otimes 1,t-a)}]$$

dans $\widetilde{CH}^{m+1}(A[t],\det Q[t])_{s_a(\operatorname{Spec}(A))}$ où $(s\otimes 1,t-a):Q[t]\oplus A[t]\to A[t]$.

Démonstration. — Le calcul de $(s_a)_*$ se fait localement. On peut ainsi supposer que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{q}$. Comme A est régulier, on a $\mathfrak{q}=(x_1,\ldots,x_m)$. De plus Q est libre, de base $y_1,\ldots,y_m$. Pour tout i, notons $g_i=s(y_i)$. Notons $v:A^m\to A$ la section définie par $v(e_i)=x_i$. Alors $[Kos(v),\varphi_v]$ est un générateur de $GW(k(\mathfrak{q}),\operatorname{Ext}^m_A(k(\mathfrak{q}),A))$ et on trouve $[Kos(s),\varphi_s]=\alpha\cdot[Kos(v),\varphi_v]$ pour un certain $\alpha\in GW(k(\mathfrak{q}))$. Calculons en premier lieu $(s_a)_*([Kos(v),\varphi_v])$. Tout d'abord, on remarque que $s_a(\mathfrak{q})$ est d'intersection complète, engendré par $(x_1,\ldots,x_m,t-a)$. Notons $v':A[t]^{m+1}\to A[t]$ la section définie par $v'(e_i)=x_i$ pour $i=1,\ldots,m$ et $v'(e_{m+1})=t-a$. Par définition de $(s_a)_*$ on trouve $(s_a)_*([Kos(v),\varphi_v])=[Kos(v'),\varphi_{v'}]$. On s'aperçoit par ailleurs que $(s_a)_*$ est $GW(k(\mathfrak{q}))$-linéaire et donc on trouve $(s_a)_*([Kos(s),\varphi_s])=\alpha\cdot[Kos(v'),\varphi_{v'}]$. Un calcul direct montre que ce dernier n'est autre que $[Kos(s\otimes 1,t-a),\varphi_{(s\otimes 1,t-a)}]$. ☐

Les résultats de ce paragraphe donnent le théorème suivant :

Théorème 14.2.4. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et Q un module projectif de rang $m \leq n$. Soient*

$$s, u : Q \longrightarrow A$$

deux sections telles que $\mathrm{ht}(s(Q)) = \mathrm{ht}(u(Q)) = m$. *Alors* $[Kos(s), \varphi_s] = [Kos(u), \varphi_u]$ *dans* $\widetilde{CH}^m(A, \det Q)$.

Démonstration. — On considère une section $v : Q[t] \to A[t]$ satisfaisant les hypothèses du lemme 14.2.1. On obtient ainsi une classe $[Kos(v), \varphi_v]$ dans $\widetilde{CH}^m(A[t], \det Q[t])$. Par invariance homotopique, on voit que $[Kos(v), \varphi_v] = p^*\beta$ pour un certain $\beta \in \widetilde{CH}^m(A, \det Q)$ où $p : \mathrm{Spec}(A[t]) \to \mathrm{Spec}(A)$ est la projection. Pour $i = 0, 1$, notons $s_i : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A[t])$ les sections données par $t \mapsto i$. Les groupes de Chow-Witt sont munis d'une multiplication ([**Fas07**, remarque 6.3, p. 31]) et on peut contempler le cycle $p^*\beta \cdot (s_0)_*(1)$. Par [**Fas07**, théorème 7.6, p. 34] et par le lemme 14.2.3, on voit que $p^*\beta \cdot (s_0)_*(1) = (s_0)_*(\beta)$ (à support sur $s_0(\mathrm{Spec}(A))$). De plus, $p^*\beta \cdot (s_0)_*(1) = [Kos(v), \varphi_v] \cdot (s_0)_*(1)$ et ce dernier n'est autre que $[Kos(s \otimes 1, t), \varphi_{(s\otimes 1,t)}] = (s_0)_*([Kos(s), \varphi_s])$ (utiliser à nouveau [**Fas07**, théorème 7.6, p. 34]). Comme $(s_0)_*$ est un isomorphisme sur son image (remarque 9.3.5), on en déduit que $\beta = [Kos(s), \varphi_s]$. Utilisant s_1, on trouve $\beta = [Kos(u), \varphi_u]$. $\square$

14.3. Le calcul de $(p^*)^{-1}$

Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et P un module projectif de rang n. Notons $B = Sym(P^\vee)$,

$$s_0 : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$$

la section nulle et

$$p : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

la projection. La proposition 13.4.1 montre que pour connaître $\tilde{c}_n(P)$ il suffit de calculer la préimage par p^* de la forme symétrique $[Kos(s_0), \varphi_{s_0}]$ donnée explicitement par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^* \det P^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & p^* P^\vee \arrow[r, "s_0"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\natural \arrow[r] & \dots \arrow[r] & p^*(\wedge^{n-1} P^\vee)^\natural \arrow[r] & p^*(\wedge^n P^\vee)^\natural \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\natural = \mathrm{Hom}_B(\_, p^* \det P^\vee)$.

On sait par le corollaire A.2.2 que si P est projectif de rang n sur une k-algèbre affine lisse A de dimension n, alors il existe une section

$$s : P^{\vee} \longrightarrow A$$

telle que $s(P^{\vee})$ soit réduite de hauteur n. Ainsi $[Kos(s), \varphi_s]$ est bien défini et il en est de même pour $p^*[Kos(s), \varphi_s]$. Comme $(s \otimes 1)(p^*P^{\vee})$ et $s_0(p^*P^{\vee})$ sont de hauteur n, on peut appliquer le théorème 14.2.4 pour obtenir finalement :

Théorème 14.3.1. — *Soit A une k-algèbre régulière de dimension n, P un module projectif de rang n et $s : P^{\vee} \to A$ une section de hauteur n. Alors $\tilde{c}_n(P) = [Kos(s), \varphi_s]$.*

Remarque 14.3.2. — Dans le théorème ci-dessus, il n'est pas nécessaire que la section $s : P^{\vee} \to A$ soit réduite.

CHAPITRE 15

LA DIMENSION 2

15.1. Résumé

Dans ce chapitre, A est une k-algèbre lisse de dimension 2 sur un corps de caractéristique différente de 2. Cette hypothèse est un peu trop restrictive puisque la plupart des résultats sont vrais pour un anneau régulier noethérien de dimension 2, à l'exception de ceux où il est fait usage de la classe de Chern orientée maximale. Nous montrons qu'on a un isomorphisme

$$\widetilde{CH}^2(A) \simeq K_0^{Sp}(A).$$

Ce résultat peut être trouvé dans [**BM00**], où il est donné sans démonstration. Pour démontrer ce fait, nous commençons par rappeler la construction (voir [**BO87**]) d'un homomorphisme explicite

$$f : W^{lf}(A) \longrightarrow W^-(A).$$

Nous montrons ensuite que cet homomorphisme donne un homomorphisme

$$\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \longrightarrow K_0^{Sp}(A).$$

Finalement nous remarquons que la classe d'Euler induit un homomorphisme

$$\tilde{c}_2(\_) : K_0^{Sp}(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^2(A)$$

inverse de φ.

15.2. L'homomorphisme $f : W^{lf}(A) \to W^-(A)$

Dans cette section, nous allons résumer brièvement un article de Barge-Ojanguren (voir [**BO87**]) dans lequel les auteurs construisent explicitement un homomorphisme $f : W^{lf}(A) \to W^-(A)$ pour un anneau A régulier de dimension 2. Cet homomorphisme n'est autre que l'incarnation du morphisme donné par la suite spectrale de Gersten-Witt ([**BW02**]).

Lemme 15.2.1. — *Soient M un module de longueur finie et Q un module projectif. L'accouplement*

$$\cup : \mathrm{Ext}^2_A(M, Q^\vee) \times Q \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M, A)$$

consistant à effectuer le push-out induit un isomorphisme

$$\theta : \mathrm{Ext}^2_A(M, Q^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q, \widehat{M}).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que θ est un isomorphisme localement. Cela revient à démontrer que $\theta : \mathrm{Ext}^2_A(M, (A^m)^\vee) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, \widehat{M})$ est un isomorphisme. Considérons les injections canoniques $j_i : A \to A^m$. Le diagramme suivant est alors commutatif pour tout i

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_A(M, (A^m)^\vee) \arrow[r, "\cup_{A^m}"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^2_A(Id, j_i^\vee)"'] & \mathrm{Hom}_A(A^m, \widehat{M}) \arrow[d, "\circ j_i"] \\
\mathrm{Ext}^2_A(M, A^\vee) \arrow[r, "\cup_A"] & \mathrm{Hom}_A(A, \widehat{M})
\end{tikzcd}$$

Cela donne donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_A(M, (A^m)^\vee) \arrow[r, "\cup_{A^m}"] \arrow[d, "\oplus \mathrm{Ext}^2_A(Id, j_i^\vee)"'] & \mathrm{Hom}_A(A^m, \widehat{M}) \arrow[d, "\oplus \circ j_i"] \\
\bigoplus \mathrm{Ext}^2_A(M, A^\vee) \arrow[r, "\oplus \cup_A"] & \bigoplus \mathrm{Hom}_A(A, \widehat{M})
\end{tikzcd}$$

Les homomorphismes verticaux sont des isomorphismes. Il suffit donc de remarquer que $\cup_A : \mathrm{Ext}^2_A(M, A^\vee) \to \mathrm{Hom}_A(A, \widehat{M})$ est un isomorphisme pour démontrer le lemme. C'est un calcul direct. □

Soient maintenant P et Q des modules projectifs, $\alpha : P \to M$ un homomorphisme surjectif et $\beta : Q \to \widehat{M}$ un homomorphisme. On note $e(\alpha, \beta)$ l'unique suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^\vee \xrightarrow{\ t\ } K(\alpha, \beta) \xrightarrow{\ s\ } P \xrightarrow{\ \alpha\ } M \longrightarrow 0$$

qui représente $\theta^{-1}(\beta)$ et qui se termine par $\alpha : P \to M$.

Remarque 15.2.2. — La suite exacte $e(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ext}^2_A(M, Q^\vee)$ est déterminée par les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout $q \in Q$, on a $e(\alpha, \beta) \cup q = \beta(q)$;
(ii) $e(\alpha, \beta)$ se termine par $\alpha : P \to M$.

Proposition 15.2.3. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *β est surjectif ;*
(ii) *$K(\alpha, \beta)$ est projectif.*

Démonstration. — On a la suite exacte $e(\alpha,\beta)$:

$$0 \longrightarrow Q^{\vee} \xrightarrow{\ t\ } K(\alpha,\beta) \xrightarrow{\ s\ } P \xrightarrow{\ \alpha\ } M \longrightarrow 0.$$

On la scinde en deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow Q^{\vee} \xrightarrow{\ t\ } K(\alpha,\beta) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \xrightarrow{\ \alpha\ } M \longrightarrow 0.$$

Les suites exactes longues en homologie associées à ces suites donnent la suite exacte

$$0 \longrightarrow L^{\vee} \longrightarrow K(\alpha,\beta)^{\vee} \longrightarrow Q \xrightarrow{\ \beta\ } \widehat{M} \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(K(\alpha,\beta),A) \longrightarrow 0.$$

Donc $\operatorname{Ext}^1_A(K(\alpha,\beta),A) = 0$ si et seulement si β est surjective. De plus, on voit que si $\operatorname{Ext}^1_A(K(\alpha,\beta),A) = 0$ alors $\operatorname{Ext}^1_A(K(\alpha,\beta),P) = 0$ pour tout projectif P. Comme A est régulier, tout module est de dimension projective finie et donc $\operatorname{Ext}^1_A(K(\alpha,\beta),R) = 0$ pour tout module R. Ainsi β est surjective si et seulement si $K(\alpha,\beta)$ est projectif. $\square$

DÉFINITION 15.2.4. — *Soient $\alpha : P \to M$ et $\beta : Q \to \widehat{M}$ des homomorphismes surjectifs. On note $D(e(\alpha,\beta))$ la classe de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow P^{\vee} \xrightarrow{\ s^{\vee}\ } K(\alpha,\beta)^{\vee} \xrightarrow{\ t^{\vee}\ } Q \xrightarrow{\ \beta\ } \widehat{M} \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION 15.2.5. — *On a $D(e(\alpha,\beta)) = e(\beta, -\varpi\circ\alpha)$ où ϖ est l'isomorphisme canonique $\varpi : M \to \widehat{\widehat{M}}$ de la définition 3.3.1.*

Démonstration. — On a les suites exactes $e(\alpha,\beta)$

$$0 \longrightarrow Q^{\vee} \xrightarrow{\ t\ } K(\alpha,\beta) \xrightarrow{\ s\ } P \xrightarrow{\ \alpha\ } M \longrightarrow 0$$

et $D(e(\alpha,\beta))$

$$0 \longrightarrow P^{\vee} \xrightarrow{\ s^{\vee}\ } K(\alpha,\beta)^{\vee} \xrightarrow{\ t^{\vee}\ } Q \xrightarrow{\ \beta\ } \widehat{M} \longrightarrow 0\ .$$

Par la remarque 15.2.2, il reste donc juste à voir que $D(e(\alpha,\beta)) \cup p = -\varpi(\alpha(p))$ pour tout $p \in P$. Pour ce faire, considérons la suite $D(D(e(\alpha,\beta)))$

$$0 \longrightarrow Q^{\vee} \xrightarrow{\ t^{\vee\vee}\ } K(\alpha,\beta)^{\vee\vee} \xrightarrow{\ s^{\vee\vee}\ } P \xrightarrow{\ \delta\ } \widehat{\widehat{M}} \longrightarrow 0$$

où $\delta(p) = D(e(\alpha,\beta)) \cup p$. Le diagramme suivant est commutatif par définition de ϖ :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q^{\vee} \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & K(\alpha,\beta) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "ev_K"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varpi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q^{\vee} \arrow[r, "t^{\vee\vee}"'] & K(\alpha,\beta)^{\vee\vee} \arrow[r, "s^{\vee\vee}"'] & P \arrow[r, "-\delta"'] & \widehat{\widehat{M}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cela montre que $D(e(\alpha,\beta)) = e(\beta, -\varpi\circ\alpha)$. $\square$

Proposition 15.2.6. — *Soit $\phi : M \to \widehat{M}$ un isomorphisme. Dans $\mathrm{Ext}^2_A(M, P^\vee)$ on a*

$$\overline{\phi}(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha))) = e(\alpha, -\widehat{\phi} \circ \varpi \circ \alpha)$$

où $\overline{\phi}(D(e(\alpha, \beta)))$ est le pull-back de $D(e(\alpha, \beta))$ par ϕ.

Démonstration. — Soit $p \in P$. Calculons $\left[\overline{\phi}(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)))\right] \cup p$. Puisque le pull-back et le push-out commutent, on a

$$\left[\overline{\phi}(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)))\right] \cup p = \overline{\phi}\left[D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)) \cup p\right].$$

Par la proposition précédente, on trouve

$$\overline{\phi}\left[(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha))) \cup p\right] = \overline{\phi}\left[e(\phi \circ \alpha, -\varpi \circ \alpha) \cup p\right].$$

Par définition du pull-back et de $e(\phi \circ \alpha, -\varpi \circ \alpha)$, on a

$$\overline{\phi}\left[e(\phi \circ \alpha, -\varpi \circ \alpha) \cup p\right] = \overline{\phi}\left[-\varpi \circ \alpha(p)\right] = -\widehat{\phi} \circ \varpi \circ \alpha(p).$$

Il est de plus évident que $\overline{\phi}(D(e(\alpha, \phi \circ \alpha)))$ se termine par α. □

Théorème 15.2.7. — *Soient $\phi : M \to \widehat{M}$ un isomorphisme symétrique, P un module projectif et $\alpha : P \to M$ une surjection. Alors le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, "\phi"] \\ P \arrow[r, "\beta"'] & \widehat{M} \end{tikzcd}$$

se complète en un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r, "t"] \arrow[d, "-1"] & K(\alpha, \beta) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r, "s^\vee"'] & K(\alpha, \beta)^\vee \arrow[r, "t^\vee"'] & P \arrow[r, "\beta"'] & \widehat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où ψ est un isomorphisme antisymétrique.

Démonstration. — Puisque ϕ est symétrique, le lemme précédent donne

$$\overline{\phi}(D(e(\alpha, \beta))) = e(\alpha, -\beta).$$

Par ailleurs, $e(\alpha, -\beta) = -e(\alpha, \beta)$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r, "t"] \arrow[d, "-1"] & K(\alpha, \beta) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\nu"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r, "s^\vee"'] & K(\alpha, \beta)^\vee \arrow[r, "t^\vee"'] & P \arrow[r, "\beta"'] & \widehat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où ν est un isomorphisme *a priori* non antisymétrique. Dualisant, on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\vee} \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & K(\alpha,\beta) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\nu^{\vee}"] & P \arrow[r, "-\alpha"] \arrow[d, "-1"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^{\vee} \arrow[r, "s^{\vee}"'] & K(\alpha,\beta)^{\vee} \arrow[r, "t^{\vee}"'] & P \arrow[r, "\beta"'] & \widehat{M} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est équivalent au diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\vee} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "-1"] & K(\alpha,\beta) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "-\nu^{\vee}"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^{\vee} \arrow[r, "s^{\vee}"'] & K(\alpha,\beta)^{\vee} \arrow[r, "t^{\vee}"'] & P \arrow[r, "\beta"'] & \widehat{M} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On voit alors que $t^{\vee}(\nu + \nu^{\vee}) = 0$. Ceci montre qu'il existe un homomorphisme $g : K(\alpha,\beta) \to P^{\vee}$ tel que $\nu + \nu^{\vee} = s^{\vee}g$ et $gt = 0$. Si on redualise, on obtient $\nu + \nu^{\vee} = -g^{\vee}s$ et $t^{\vee}g^{\vee} = 0$. Donc $g^{\vee} = s^{\vee}f$ pour un homomorphisme $f : P \to P^{\vee}$. Ainsi $\nu + \nu^{\vee} = -s^{\vee}fs$. On voit de plus que f est symétrique et pair. Il existe donc un homomorphisme $g : P \to P^{\vee}$ tel que $f = g + g^{\vee}$. Remplaçant ν par $\nu + s^{\vee}gs$ on obtient le ψ antisymétrique annoncé. □

Proposition 15.2.8. — *Dans la situation du théorème précédent, le couple antisymétrique $(K(\alpha,\beta),\psi)$ obtenu est unique à isométrie près.*

Démonstration. — Puisque la suite exacte $e(\alpha,\beta)$ est unique, deux modules projectifs $K(\alpha,\beta)$ et $K'(\alpha,\beta)$ obtenus comme ci-dessus sont forcément isomorphes. Il suffit donc de voir que deux isomorphismes antisymétriques $\psi : K \to K^*$ et $\psi' : K \to K^*$ obtenus sont forcément isométriques. Utilisant le même procédé que ci-dessus, on voit qu'il existe un homomorphisme $g : P \to P^{\vee}$ tel que $\psi' - \psi = s^{\vee}(g^{\vee} - g)s$. Considérons l'homomorphisme $(Id - \psi^{-1}s^{\vee}gs) : K \to K$. C'est un automorphisme puisque

$$(Id - \psi^{-1}s^{\vee}gs)(Id + \psi^{-1}s^{\vee}gs) = Id$$

et on vérifie que

$$(Id - \psi^{-1}s^{\vee}gs)^{*}\psi(Id - \psi^{-1}s^{\vee}gs) = \psi'. \quad \square$$

Définition 15.2.9. — *La classe d'isométrie du couple antisymétrique $(K(\alpha,\beta),\psi)$ est notée $f(\alpha,\phi)$.*

Le lemme suivant sera utile dans la suite :

Lemme 15.2.10. — *Soient $\alpha : P \to M$ une surjection et $\eta : P \simeq P$ un automorphisme. Alors $f(\alpha,\phi) = f(\alpha\eta,\phi)$.*

Démonstration. — Soit

$$0 \longrightarrow P^\vee \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

la suite exacte obtenue à partir de α et de ϕ. On effectue le push-out de cette suite par $\eta^\vee$. Cela donne :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\eta^\vee"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r] & K' \arrow[r] & P \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cette suite exacte est isomorphe à la suite ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r] & K' \arrow[r] & P \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P^\vee \arrow[r] \arrow[u, equal] & K' \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r, "\alpha\eta"] \arrow[u, "\eta"] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

La suite se terminant par $\alpha\eta$ est la suite obtenue à partir de $\alpha\eta$ et ϕ. On vérifie facilement que ζ est une isométrie entre $f(\alpha, \phi)$ et $f(\alpha\eta, \phi)$. □

Pour tout module projectif P on note $H(P)$ le couple antisymétrique $(P \oplus P^\vee, h)$ où $h(p+f, q+g) = f(q) - g(p)$.

Lemme 15.2.11. — *Soient $\alpha_i : P_i \to M$ deux surjections. Alors la forme antisymétrique $f(\alpha_1, \phi) \perp f(\alpha_2, -\phi)$ est isométrique à $H(K(\alpha_1, -\phi\alpha_2))$.*

Démonstration. — On voit que les suites exactes

$$e(\alpha_1, \phi\alpha_1) \oplus e(\alpha_2, -\phi\alpha_2)$$

et

$$e(\alpha_1, -\phi\alpha_2) \oplus e(\alpha_2, \phi\alpha_1)$$

sont égales puisque elles se terminent par $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ et leurs duales se terminent par $\phi\alpha_1 \oplus -\phi\alpha_2$. On vérifie que $K(\alpha_1, -\phi\alpha_2)$ est un facteur direct de $f(\alpha_1, \phi) \oplus f(\alpha_2, -\phi)$ égal à son orthogonal. On termine en utilisant le théorème C.2.3. □

Corollaire 15.2.12. — *Le classe dans $W^-(A)$ de $f(\alpha, \phi)$ ne dépend pas de la surjection $\alpha : P \to M$ choisie.*

Voyons maintenant ce qui se passe si le couple (M, ϕ) est neutre. Dans ce cas, il existe un sous-module N de M égal à son orthogonal. On peut recouvrir la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

par une suite exacte de projectifs

$$0 \longrightarrow P_N \longrightarrow P_M \longrightarrow P_{M/N} \longrightarrow 0.$$

On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_N"'] \arrow[dd, bend left, "\beta_{M/N}"] & P_M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"'] \arrow[dd, bend left, "\beta_M"] & P_{M/N} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{M/N}"'] \arrow[dd, bend left, "\beta_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{M/N} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & \widehat{N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où ϕ' et ϕ'' sont des isomorphismes induits par ϕ.

Lemme 15.2.13. — *La forme $f(\alpha_M, \phi\alpha_M)$ est isométrique à $H(K(\alpha_N, \beta_N))$.*

Démonstration. — Il suffit alors de vérifier que le module $K(\alpha_N, \beta_N)$ est un facteur direct de $K(\alpha_M, \phi\alpha_M)$ égal à son orthogonal. Le théorème C.2.3 permet de conclure. $\square$

On a en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 15.2.14. — *Soit M un module de longueur finie et $\phi : M \to \widehat{M}$ un isomorphisme symétrique. Soit encore P un module projectif et $\beta : P \to M$ un homomorphisme surjectif. Alors*

$$f(\beta, \phi) \perp f(\beta, -\phi) = H(K(\beta, \phi\beta)).$$

Démonstration. — Soient

$$\triangle : M \longrightarrow M \oplus M$$

défini par $\triangle(m) = (m, m)$ pour tout $m \in M$ et

$$\delta : M \oplus M \longrightarrow M$$

défini par $\delta(m, n) = m - n$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\triangle} M \oplus M \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow 0.$$

De même, définissons

$$\triangle' : P \longrightarrow P \oplus P$$

par $\triangle'(p) = (p, p)$ pour tout $p \in P$ et

$$\delta' : P \oplus P \longrightarrow P$$

par $\delta'(p,q) = p - q$. On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\triangle'} & P \oplus P & \xrightarrow{\delta'} & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\left(\begin{smallmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\triangle} & M \oplus M & \xrightarrow{\delta} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\left(\begin{smallmatrix}\phi & 0\\ 0 & -\phi\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \\
0 & \longrightarrow & \widehat{M} & \xrightarrow[\widehat{\delta}]{} & \widehat{M} \oplus \widehat{M} & \xrightarrow[\widehat{\triangle}]{} & \widehat{M} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Par le lemme 15.2.13, $K(\beta, \phi\beta)$ est un facteur direct de $f((\begin{smallmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}\phi & 0\\ 0 & -\phi\end{smallmatrix}))$ égal à son orthogonal. On obtient finalement

$$f(\beta,\phi) \perp f(\beta,-\phi) = H(K(\beta,\phi\beta)). \quad \square$$

On peut également tirer le résultat suivant du lemme 15.2.13 et du corollaire 15.2.12 :

Théorème 15.2.15. — *On a un homomorphisme bien défini*

$$f : W^{lf}(A) \longrightarrow W^{-}(A)$$

donné par $f(M,\phi) = f(\alpha,\phi)$ pour n'importe quelle surjection $\alpha : P \to M$.

15.3. L'homomorphisme $\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \to K_0^{Sp}(A)$

Commençons par le rappel de la définition du $K_0^{Sp}(A)$.

Définition 15.3.1. — *On note $GW^{-}(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des couples (P,ψ) où P est un module projectif et $\psi : P \to P^{\vee}$ est un isomorphisme antisymétrique.*

Rappelons que pour tout module projectif P, $H(P)$ désigne le couple antisymétrique $(P \oplus P^{\vee}, h)$ où $h(p+f, q+g) = f(q) - g(p)$.

Remarque 15.3.2. — Soit Q un module projectif et $\phi : Q \to Q^{\vee}$ un isomorphisme antisymétrique. Supposons que L soit un Lagrangien de (Q,ϕ). On a par définition une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Q \longrightarrow L^{\vee} \longrightarrow 0.$$

Comme L est projectif, on voit que $(Q,\phi) = H(L)$ dans $GW^{-}(A)$. Cette relation n'est en général pas vérifiée dans une catégorie abélienne avec dualité $(\mathcal{A}, ^{\sharp}, \varpi)$ (voir annexe C). On doit donc forcer cette relation pour obtenir le groupe de Grothendieck-Witt $GW(\mathcal{A}, ^{\sharp}, \varpi)$ (définition C.1.6).

Définition 15.3.3. — *On note $K_0^{sp}(A)$ le groupe quotient de $GW^{-}(A)$ par le sous-groupe engendré par les $H(A^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Pour définir un homomorphisme $\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \to K_0^{Sp}(A)$, nous aurons besoin de la version allégée suivante du corollaire 15.2.12 :

Proposition 15.3.4. — *Soit M un module de longueur finie et*

$$\phi : M \longrightarrow \widehat{M}$$

un isomorphisme symétrique. Soient $\alpha : A^n \to M$ et $\beta : A^m \to M$ deux surjections. Alors

$$f(\alpha,\phi) = f(\beta,\phi)$$

dans $K_0^{Sp}(A)$.

Démonstration. — On a les suites exactes

$$e(\alpha,\phi\alpha) : \qquad 0 \longrightarrow (A^\vee)^n \longrightarrow K(\alpha,\phi\alpha) \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$e(\beta,\phi\beta) : \qquad 0 \longrightarrow (A^\vee)^m \longrightarrow K(\beta,\phi\beta) \longrightarrow A^m \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$e(\beta,-\phi\beta) : \qquad 0 \longrightarrow (A^\vee)^m \longrightarrow K(\beta,-\phi\beta) \longrightarrow A^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et

$$e(\alpha,-\phi\beta) : \qquad 0 \longrightarrow (A^\vee)^m \longrightarrow K(\alpha,-\phi\beta) \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On sait que $f(\alpha,\phi) = (K(\alpha,\phi\alpha),\psi)$ et $f(\beta,\phi) = (K(\beta,\phi\beta),\eta)$ pour des isomorphismes antisymétriques

$$\psi : K(\alpha,\phi\alpha) \longrightarrow K(\alpha,\phi\alpha)^\vee$$

et

$$\eta : K(\beta,\phi\beta) \longrightarrow K(\beta,\phi\beta)^\vee.$$

Le lemme 15.2.11 montre qu'on a

$$f(\alpha,\phi)\perp f(\beta,-\phi) = H(K(\alpha,-\phi\beta))$$

et donc

$$f(\alpha,\phi)\perp f(\beta,-\phi)\perp f(\beta,\phi) = f(\beta,\phi)\perp H(K(\alpha,-\phi\beta)).$$

On sait par le corollaire 15.2.14 que $f(\beta,-\phi)\perp f(\beta,\phi) = H(K(\beta,\phi\beta))$ et ainsi

$$f(\alpha,\phi)\perp H(K(\beta,\phi\beta)) = f(\beta,\phi)\perp H(K(\alpha,-\phi\beta)).$$

Utilisant $e(\beta,\phi\beta)$ et $e(\alpha,-\phi\beta)$, on trouve $K(\beta,\phi\beta) = 2mA - M$ et $K(\alpha,-\phi\beta) = (n+m)A-M$ dans $K_0(A)$. Les modules $K(\beta,\phi\beta)$ et $K(\alpha,-\phi\beta)$ sont donc stablement isomorphes, c'est à dire qu'il existe deux entiers r, l tels que

$$K(\beta,\phi\beta)\oplus A^r \simeq K(\alpha,-\phi\beta)\oplus A^l.$$

Si L est tel que $K(\beta,\phi\beta)\oplus L = A^s$, on a

$$K(\beta,\phi\beta)\oplus L\oplus A^r \simeq K(\alpha,-\phi\beta)\oplus L\oplus A^l$$

et les modules $K(\beta, \phi\beta) \oplus L \oplus A^r$ et $K(\alpha, -\phi\beta) \oplus L \oplus A^l$ sont libres. Utilisant ceci, on voit que l'égalité

$$f(\alpha, \phi) \perp H(K(\beta, \phi\beta)) = f(\beta, \phi) \perp H(K(\alpha, -\phi\beta))$$

donne

$$f(\alpha, \phi) = f(\beta, \phi)$$

dans $K_0^{Sp}(A)$. □

Proposition 15.3.5. — *Soit M un module de longueur finie et $\phi : M \to \widehat{M}$ un isomorphisme symétrique. Supposons que L soit un Lagrangien de (M, ϕ) et notons μ la forme symétrique usuelle sur $L \oplus \widehat{L}$,* i.e. $\mu = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Id \\ \varpi & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Alors il existe des surjections $\alpha : A^s \to M$ et $\beta : A^s \to L \oplus \widehat{L}$ telles que $f(\alpha, \phi) = f(\beta, \mu)$ dans $K_0^{Sp}(A)$.*

Démonstration. — Soient $\pi_1 : A^n \to L$ et $\pi_2 : A^m \to \widehat{L}$ des surjections. On a les suites exactes

$$e(\pi_1, \pi_2) : \qquad 0 \longrightarrow (A^m)^\vee \longrightarrow Q \longrightarrow A^n \xrightarrow{\pi_1} L \longrightarrow 0$$

et

$$D(e(\pi_1, \pi_2)) : \qquad 0 \longrightarrow (A^n)^\vee \longrightarrow Q^\vee \longrightarrow A^m \xrightarrow{\pi_2} \widehat{L} \longrightarrow 0.$$

Soit $\beta : A^{n+m} \to L \oplus \widehat{L}$ la surjection donnée par π_1 et π_2. Sommant les suites ci-dessus, on obtient la suite exacte $e(\pi_1, \pi_2) \oplus D(e(\pi_1, \pi_2))$

$$0 \longrightarrow (A^{n+m})^\vee \longrightarrow Q \oplus Q^\vee \longrightarrow A^{n+m} \xrightarrow{\beta} L \oplus \widehat{L} \longrightarrow 0$$

et on voit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A^{n+m})^\vee \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & Q \oplus Q^\vee \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A^{n+m} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, equal] & L \oplus \widehat{L} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A^{n+m})^\vee \arrow[r] & Q^\vee \oplus Q^{\vee\vee} \arrow[r] & A^{n+m} \arrow[r, "\mu\beta"'] & \widehat{L} \oplus \widehat{\widehat{L}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cela montre que $f(\beta, \mu) = H(Q)$. Par ailleurs, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & A^{n+m} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & \widehat{L} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se referme en une surjection $\alpha : A^{n+m} \to M$. La preuve du lemme 15.2.11 montre que le module $K(\pi_1, \pi_2)$ est un facteur direct de $f(\alpha, \phi)$ égal à son orthogonal. Par construction, $K(\pi_1, \pi_2) = Q$ et ainsi $f(\alpha, \phi) = H(Q)$. On en déduit que $f(\alpha, \phi) = f(\beta, \mu)$. □

Proposition 15.3.6. — *On a un homomorphisme bien défini*

$$\varphi : GW^{lf}(A) \longrightarrow K_0^{Sp}(A)$$

donné par $\varphi(M,\phi) = f(\alpha,\phi)$ *pour n'importe quelle surjection* $\alpha : A^n \to M$.

Démonstration. — La proposition 15.3.4 montre que la classe $f(\alpha,\phi)$ ne dépend pas de la surjection α choisie. Si M et N sont des modules de longueur finie et

$$\phi : M \longrightarrow \widehat{M},$$

$$\psi : N \longrightarrow \widehat{N}$$

sont des isomorphismes symétriques, alors

$$\varphi\Big(M \oplus N, \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}\Big) = \varphi(M,\phi) + \varphi(N,\psi)$$

dans $K_0^{Sp}(A)$. Par ailleurs, la proposition 15.3.5 montre que si (M,ϕ) possède un Lagrangien L, on a $\varphi(M,\phi) = \varphi(H(L))$. Donc φ est bien défini. $\square$

Lemme 15.3.7. — *L'homomorphisme* $\varphi : GW^{lf}(A) \to K_0^{Sp}(A)$ *est surjectif.*

Démonstration. — Soit $(P,\mu) \in K_0^{Sp}(A)$. On peut supposer que P est de rang 2. En effet, si P est de rang supérieur à 2, le théorème de Serre (corollaire A.1.7) montre que $P \simeq Q \oplus A$ pour un certain module projectif Q. Comme le seul homomorphisme antisymétrique $A \to A^\vee$ est l'homomorphisme trivial, on voit que A est un sous-lagrangien de P. Par le théorème C.2.3, on obtient $(P,\mu) = (R,\eta)$ dans $K_0^{Sp}(A)$ pour un certain module projectif R avec $\mathrm{rk}(R) = \mathrm{rk}(\mathrm{P}) - 2$.

On remarque que la forme antisymétrique μ induit une orientation $\chi : \bigwedge^2 P \to A$ définie par $\chi(p_1 \wedge p_2) = \mu(p_1)(p_2)$. Comme $\bigwedge^2 P \simeq A$, le théorème 14.3.1 montre que

$$\tilde{c}_2(P) = (A/I, \phi)$$

pour un idéal réduit I de hauteur 2 et une forme symétrique

$$\phi : A/I \longrightarrow \widehat{A/I}.$$

On vérifie que $\varphi(A/I,\phi) = (P,\mu)$. $\square$

Lemme 15.3.8. — *Soit* (f,g) *une suite régulière de* A *et* I *l'idéal engendré par cette suite. Soit* $\rho_{f,g}$ *la forme symétrique sur* A/I *définie par*

$$\rho_{f,g}(1) = Kos(f,g)$$

où $Kos(f,g)$ *est le complexe de Koszul associé à la suite* (f,g). *Alors*

$$\varphi(A/I, \rho_{f,g}) = 0.$$

Démonstration. — Soit $\pi : A \to A/I$ la surjection évidente. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r, "\binom{-g}{f}"] \arrow[d, "-1"] & A \oplus A^\vee \arrow[r, "(f\ g)"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & A/I \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f,g}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & A^\vee \oplus A^{\vee\vee} \arrow[r, "(-g\ f)"'] & A \arrow[r, "\rho_{f,g}\pi"'] & A/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $h(x,\alpha)(y,\beta) = \alpha(y) - \beta(x)$. Donc $\varphi(A/I, \rho_{f,g}) = H(A) = 0$. □

On a donc :

Proposition 15.3.9. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension 2. L'homomorphisme*

$$\varphi : GW^{lf}(A) \longrightarrow K_0^{Sp}(A)$$

induit un homomorphisme surjectif

$$\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \longrightarrow K_0^{Sp}(A).$$

Démonstration. — Par le théorème 10.3.5, $\widetilde{CH}^2(A)$ est le quotient de $GW^{lf}(A)$ par le sous-groupe H de $GW^{lf}(A)$ engendré par les éléments de la forme $(A/(f,g), \rho_{fg})$, où (f,g) est une suite régulière et $\rho_{f,g}$ est comme dans le lemme 15.3.8. Ce même lemme montre que $\varphi(H) = 0$. □

Montrons maintenant que φ est un isomorphisme.

Proposition 15.3.10. — *L'application*

$$\eta : K_0^{Sp}(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^2(A)$$

définie par $\eta(P) = \tilde{c}_2(P)(1)$ est un homomorphisme.

Démonstration. — Soient (P_1, μ_1) et (P_2, μ_2) dans $K_0^{Sp}(A)$ tels que P_i soit de rang 2. Soient $s_1 : P_1 \to A$ et $s_2 : P_2 \to A$ des sections telles que $A/s_i(P_i)$ soit réduit de hauteur 2 et $s_1(P_1)$ soit comaximal à $s_2(P_2)$ (pour l'existence de telles sections, voir le théorème A.2.1). Identifiant $\bigwedge^2 P_i$ à A grâce à χ_i et utilisant la construction de la section précédente, on obtient pour $i = 1, 2$ des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & P_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "\mu_i"'] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A/s_i(P_i) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r] & P_i^\vee \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi"] & \widehat{A/s_i(P_i)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où ψ_i est un isomorphisme symétrique. Par définition, on a

$$\tilde{c}_2(P_i)(1) = (A/s_i(P_i), \psi_i).$$

Comme $A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)) = A/s_1(P_1) \oplus A/s_2(P_2)$, on obtient en sommant les diagrammes ci-dessus un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A^2)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{smallmatrix}\right)"'] & A^2 \arrow[r, "(\pi\ \pi)"] \arrow[d, equal] & A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A^2)^\vee \arrow[r] & P_1^\vee \oplus P_2^\vee \arrow[r] & A^2 \arrow[r] & A/(s_1(\widehat{P_1) \cap} s_2(P_2)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & P_3 \arrow[r, "s_3"] \arrow[d, "\mu_3"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^\vee \arrow[r] & P_3^\vee \arrow[r] & A \arrow[r] & A/(s_1(\widehat{P_1) \cap} s_2(P_2)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

construit à partir de la surjection π et l'homomorphisme symétrique $\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{smallmatrix}\right)$. Par définition, on a

$$\tilde{c}_2(P_3)(1) = \left(A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)), \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}\right)$$

et donc $\tilde{c}_2(P_1)(1) + \tilde{c}_2(P_2)(1) = \tilde{c}_2(P_3)(1)$. Il reste donc à démontrer que

$$(P_1, \mu_1) + (P_2, \mu_2) = (P_3, \mu_3)$$

pour terminer la démonstration de la proposition. Ajoutant la suite exacte

$$0 \longrightarrow A^\vee \longrightarrow A \oplus A^\vee \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

au diagramme ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A^2)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"] & P_3 \oplus A \oplus A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \mu_3 & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right)"] & A^2 \arrow[r, "(\pi\ 0)"] \arrow[d, equal] & A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A^2)^\vee \arrow[r] & P_3^\vee \oplus A \oplus A^\vee \arrow[r] & A^2 \arrow[r] & A/(s_1(\widehat{P_1) \cap} s_2(P_2)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $h(x, \alpha)(y, \beta) = \alpha(y) - \beta(x)$. On voit de plus que l'automorphisme $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de A^2 fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A^2 \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "(\pi\ 0)"] & \\
A^2 \arrow[r, "(\pi\ \pi)"'] & A/(s_1(P_1) \cap s_2(P_2)).
\end{tikzcd}$$

Le lemme 15.2.10 permet d'en conclure que $(P_1 \oplus P_2, (\begin{smallmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{smallmatrix}))$ est isométrique à $(P_3 \oplus A \oplus A^\vee, (\begin{smallmatrix} \mu_3 & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}))$. Dans $K_0^{Sp}(A)$, on a donc

$$(P_1, \mu_1) + (P_2, \mu_2) = (P_3, \mu_3). \quad \square$$

Finalement on obtient :

Théorème 15.3.11. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension 2. Alors la classe d'Euler induit un isomorphisme*

$$\tilde{c}_2(\_)(1) : K_0^{Sp}(A) \simeq \widetilde{CH}^2(A).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les homomorphismes des propositions 15.3.9 et 15.3.10

$$\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \longrightarrow K_0^{Sp}(A)$$

et

$$\tilde{c}_2(\_)(1) : K_0^{Sp}(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^2(A)$$

sont inverses l'un de l'autre. C'est un calcul direct. $\square$

Corollaire 15.3.12. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension 2 et P un A-module projectif de rang 2 tel que* $\det P \simeq A$. *Alors $\tilde{c}_2(P) = 0$ si et seulement si $P \simeq A^2$.*

CHAPITRE 16

LE GROUPE DE CHOW-WITT MAXIMAL D'UNE $\mathbb{R}$-ALGÈBRE LISSE

16.1. Résumé

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soient S la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels et $X_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$. On va tout d'abord démontrer qu'on a un isomorphisme

$$\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble (fini) des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$. Ce calcul est motivé par les théorèmes 4.1 et 6.2 de [**BO87**] ainsi que par le théorème 4.13 de [**BS99**]. La première section montre que pour toute $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n (orientée ou pas), il existe un homomorphisme surjectif

$$H^n(C(X, I^n, \omega_{A/\mathbb{R}})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

La seconde section montre que si A est orientable cet homomorphisme est un isomorphisme. Il est néanmoins probable qu'on ait en général un isomorphisme

$$H^n(C(X, I^n, \omega_{A/\mathbb{R}})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

sans faire l'hypothèse que A est orientable. Cette hypothèse est donc sans doute superflue, mais elle simplifie considérablement les preuves puisqu'elle permet d'utiliser des résultats déjà existants. Dans la troisième section, on montre qu'on a une suite exacte

$$CH^n(A \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0$$

qui permet de calculer le groupe de Chow orienté maximal de X en fonction des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$ et du groupe de Chow classique de $A \otimes \mathbb{C}$.

16.2. Premiers pas

Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Rappelons qu'on dispose du complexe $C(X, I^n, \omega_{A/\mathbb{R}})$ (définition 9.2.8) :

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(n-1)}} I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in\ X^{(n)}} W(k(x), \omega_{k(x)/\mathbb{R}}) \longrightarrow 0.$$

Comme $\Omega_{k(x)/\mathbb{R}} = 0$ pour tout $x \in X^{(n)}$, le complexe ci-dessus est en fait

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{y \in X^{(n-1)}} I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W(k(x)) \longrightarrow 0.$$

Définissons pour tout $x \in X^{(n)}$ un homomorphisme

$$\varphi_x : W(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

Si $x \in X^{(n)}$ est un point complexe ou un point réel n'appartenant pas à une composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$, alors on pose $\varphi_x = 0$. Si $x \in X^{(n)}$ est un point réel, on a un isomorphisme

$$\psi : W(k(x)) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

donné par $\psi(< 1 >) = 1$. Supposons que x appartienne à une composante connexe compacte C de $X(\mathbb{R})$. Alors on a un homomorphisme

$$\mu_C : \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

qui est l'inclusion dans la C-ième composante de $\bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$. On pose finalement

$$\varphi_x = \mu_C \psi.$$

Sommant les φ_x, on obtient un homomorphisme

$$\varphi : \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

Il est évident que φ est surjectif. Montrons maintenant que φ passe à l'homologie du complexe $C(X, I^n, \omega_{A/\mathbb{R}})$.

Proposition 16.2.1. — *Soit $y \in X^{(n-1)}$. Alors la composition*

$$I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W(k(x)) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

est nulle.

Démonstration. — Soit B la clôture intégrale de A/y dans $k(y)$. On sait qu'on a un morphisme de complexes (corollaire 6.3.10)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & I(k(y),\omega_{k(y)/\mathbb{R}}) & \xrightarrow{d_B} & \bigoplus\limits_{z\in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} W(k(z)) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sum \theta_{k(z)/k(x)}} & \\ \ldots \longrightarrow & \bigoplus\limits_{y\in X^{(n-1)}} I(k(y),\omega_{k(y)/\mathbb{R}}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus\limits_{x\in X^{(n)}} W(k(x)) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Soient $Y = V(y) \subset X$ et $Z = \mathrm{Spec}(B)$. Soit C_i une composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$ et posons $\tilde{C}_i = C_i \cap Y(\mathbb{R})$. Alors $\tilde{C}_i$ est compact, ouvert et fermé dans $Y(\mathbb{R})$ (mais pas forcément connexe). Cela signifie que $\tilde{C}_i$ est une réunion de composante connexes compactes de Y. L'homomorphisme naturel $A/y \to B$ induit un morphisme fini

$$f : Z \longrightarrow Y$$

et ainsi une application continue

$$f : Z(\mathbb{R}) \longrightarrow Y(\mathbb{R}).$$

Soit $\overline{C}_i = f^{-1}(\tilde{C}_i)$. Alors $\overline{C}_i$ est soit vide, soit réunion de composantes connexes compactes de $Z(\mathbb{R})$ (car f est propre). Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des composantes connexes compactes de $Z(\mathbb{R})$. On définit une application

$$\eta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \cup \{0\}$$

par $\eta(C) = C_i$ s'il existe une composante compacte connexe C_i de $X(\mathbb{R})$ telle que $C \subset f^{-1}(C_i \cap Y(\mathbb{R}))$ et $\eta(C) = 0$ sinon. Cette application induit un homomorphisme

$$\mu : \bigoplus_{\mathcal{D}} \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

Soit

$$\varphi^Z : \bigoplus_{z\in Z^{(1)}} W(k(z)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{D}} \mathbb{Z}$$

l'homomorphisme défini de manière similaire à φ. On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\limits_{z\in Z^{(1)}} W(k(z)) & \xrightarrow{\varphi^Z} & \bigoplus\limits_{\mathcal{D}} \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \sum \theta_{k(z)/k(x)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \bigoplus\limits_{x\in X^{(n)}} W(k(x)) & \xrightarrow[\varphi]{} & \bigoplus\limits_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}. \end{array}$$

Ainsi, pour démontrer que la composition

$$I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W(k(x)) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

est nulle, il suffit de démontrer que la composition

$$I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{z \in Z^{(1)}} W(k(z)) \xrightarrow{\varphi^Z} \bigoplus_{\mathcal{D}} \mathbb{Z}$$

est nulle. On est donc ramené au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est une courbe réelle lisse. Soit $\tilde{X}$ la complétion projective lisse de X. Alors $\tilde{X}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à une réunion finie de courbe réelles lisses homéomorphes à S^1. On peut voir $X(\mathbb{R})$ comme un ouvert (dans la topologie euclidienne) de $\tilde{X}(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{\mathcal{D}}$ l'ensemble des composantes connexes compactes de $\tilde{X}(\mathbb{R})$. Procédant comme ci-dessus, on voit qu'il suffit de démontrer que la composition

$$I(k(y), \omega_{k(y)/\mathbb{R}}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{z \in \tilde{X}^{(1)}} W(k(z)) \xrightarrow{\varphi^{\tilde{X}}} \bigoplus_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{Z}$$

est nulle pour terminer la démonstration. Le théorème 3.3 de [**Kne76**] montre qui si X est une courbe algébrique complète lisse sur $\mathbb{R}$ la composition ci-dessus est nulle. Cela termine la preuve. $\square$

Corollaire 16.2.2. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$. Alors on a un homomorphisme surjectif*

$$\varphi : H^n(C(X, I^n, \omega_{A/k})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

16.3. Le calcul de $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$

Supposons que A soit orientée et fixons un isomorphisme $\omega_{A/k} \simeq A$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme $C(X, I^n) \simeq C(X, I^n, \omega_{A/k})$. Composant cet isomorphisme avec l'homomorphisme

$$\varphi : H^n(C(X, I^n, \omega_{A/k})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z},$$

on obtient un homomorphisme

$$\varphi : H^n(C(X, I^n)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

Supposons $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = m$. Dans ce qui suit, nous allons montrer que $H^n(C(X, I^n))$ est engendré par au plus m éléments. Cela montrera que φ est un isomorphisme. Nous aurons besoin de quelques résultats.

LEMME 16.3.1. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension 2 et $x \in \operatorname{Spec}(A)$ un point complexe. Alors il existe une suite régulière $(f,g) \in A$ telle que $A/(f,g)$ ait une décomposition primaire $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ avec M_1 x-primaire de longueur impaire et $M_2,\dots,M_r$ de support complexe et de longueur paire.*

Démonstration. — Voir [**BO87**, lemme 4.2, p. 622]. □

COROLLAIRE 16.3.2. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n et $x \in \operatorname{Spec}(A)$ un point complexe. Alors il existe une suite régulière $(f_1,\dots,f_n)$ telle que $A/(f_1,\dots,f_n)$ ait une décomposition $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ avec M_1 x-primaire de longueur impaire et $M_2,\dots,M_r$ de support complexe et de longueur paire.*

Démonstration. — Utilisant l'annexe A, théorème A.2.1, on voit qu'il existe une suite régulière $(f_1,\dots,f_{n-2})$ telle que $A/(f_1,\dots,f_{n-2})$ soit lisse de dimension 2 et contienne x. On utilise alors le lemme pour conclure. □

COROLLAIRE 16.3.3. — *Soit x un idéal complexe et μ un générateur de $W^{lf}(A_x)$. Alors $\mu = 0$ dans $H^n(C(X,I^n))$.*

Démonstration. — Par le théorème 10.3.5, on sait que l'image de la différentielle

$$d : \bigoplus_{y\in X^{(n-1)}} I^{lf}(A_y) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(n)}} W^{lf}(A_x)$$

est engendré par les classes de couples $[A/(g_1,\dots,g_n), \rho_{g_1,\dots,g_n}]$ où $(g_1,\dots,g_n)$ est une suite régulière et

$$\rho_{g_1,\dots,g_n} : A/(g_1,\dots,g_n) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(A/(g_1,\dots,g_n),A)$$

est défini par $\rho_{g_1,\dots,g_n}(1) = Kos(g_1,\dots,g_n)$. Utilisant le corollaire ci-dessus, on sait qu'il existe une suite régulière $(f_1,\dots,f_n)$ telle que $A/(f_1,\dots,f_n)$ ait une décomposition $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ avec M_1 x-primaire de longueur impaire et $M_2,\dots,M_r$ de support complexe et de longueur paire. Puisque $W(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2$, on voit alors que

$$[A/(f_1,\dots,f_n), \rho_{f_1,\dots,f_n}] = \mu$$

dans $\bigoplus_{x\in A^{(n)}} W^{lf}(A_x)$. Cela termine la preuve. □

Passons maintenant aux points réels.

PROPOSITION 16.3.4. — *Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $X_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ où S est la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Soient $x,y \in X$ deux points réels appartenant à une même composante connexe de $X(\mathbb{R})$. Alors $x \cup y$ est une intersection complète dans $X_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — Voir [**BS99**, proposition 4.8, p. 303]. □

Corollaire 16.3.5. — *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $X_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ où S est la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Soit $x \in X$ un point réel n'appartenant à aucune composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$. Alors x est une intersection complète dans $X_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — Voir [**BS99**, corollaire 4.9, p. 304]. □

Corollaire 16.3.6. — *Soit $x \in X$ un point réel n'appartenant à aucune composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$ et $\mu \in W^{lf}(A_x)$. Alors μ est nul dans $H^n(C(X, I^n))$.*

Démonstration. — Par le corollaire ci-dessus, on sait qu'il existe une suite régulière $(a_1, \dots, a_n)$ dans $S^{-1}A$ engendrant x. Multipliant éventuellement par s^2 pour un certain $s \in S$, on peut supposer que $a_i \in A$ pour tout i. De plus, appliquant des opérations élémentaires à cette suite, on peut supposer que $a_i \in A$ pour tout i et $\mathrm{ht}(a_1, \dots, a_n) = n$ (voir la preuve du théorème 4.14 dans [**BS99**]). Il s'ensuit que

$$(a_1, \dots, a_n) = x \cap z_1 \cap \dots \cap z_r$$

pour des z_r complexes. On considère $[A/(f_1, \dots, f_n), \rho_{f_1,\dots,f_n}]$. La localisation de cette forme en x est un générateur de $W^{lf}(A_x)$ puisque $A_x/(f_1, \dots, f_n)A_x$ est un A_x-module de longueur 1. Ceci montre que μ est égal, dans $H^n(C(X, I^n))$, à une somme de points complexes munis de formes quadratiques. Cette somme est nulle par le corollaire 16.3.3. □

Proposition 16.3.7. — *Soient $x, y \in X$ des points réels appartenant à la même composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$, μ un générateur de $W^{lf}(A_x)$ et ν un générateur de $W^{lf}(A_y)$. Alors $\mu = \pm\nu$ dans $H^n(C(X, I^n))$.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la proposition 16.3.4 et la présentation explicite du groupe de Chow-Witt maximal d'une k-algèbre (théorème 10.3.5). □

Nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 16.3.8. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors on a un isomorphisme*

$$\varphi : H^n(C(X, I^n)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$.

Démonstration. — En effet, les résultats ci-dessus montrent que $H^n(C(X, I^n))$ est engendré par au plus $m = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$ éléments. Cela montre que

$$\varphi : H^n(C(X, I^n)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme. □

Corollaire 16.3.9. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n. Alors on a un isomorphisme*

$$\varphi' : H^n(C(X, I^n/I^{n+1})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$.

Démonstration. — On définit un homomorphisme

$$\varphi' : \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W/I(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de manière similaire à

$$\varphi : \bigoplus_{x \in X^{(n)}} W(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}.$$

Utilisant les mêmes techniques que pour φ et remarquant qu'on a un isomorphisme canonique

$$H^n(C(X, I^n/I^{n+1})) \longrightarrow H^n(C(X, I^n/I^{n+1}, \omega_{A/k}))$$

on obtient facilement le résultat. $\square$

Traitons maintenant le cas du complexe en K-théorie de Milnor. Dans ce cas, on ne peux pas utiliser le corollaire 16.3.2 pour éliminer les points complexes. On travaille donc avec $X_{\mathbb{R}}$ qui n'a pas de points complexes.

Corollaire 16.3.10. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n. Alors on a un isomorphisme*

$$\psi : CH^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Par le corollaire ci-dessus, on a un isomorphisme

$$\varphi' : H^n(C(X, I^n/I^{n+1})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On en déduit un isomorphisme

$$\varphi'_{\mathbb{R}} : H^n(C(X_{\mathbb{R}}, I^n/I^{n+1})) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

et une surjection

$$\psi : \mathrm{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

La proposition 16.3.4 et le corollaire 16.3.5 montrent que $CH^n(X_{\mathbb{R}})$ est engendré par $m = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$ éléments. Montrons que pour chaque générateur x, on a $2x = 0$. Soit donc C une composante connexe compacte de $X(\mathbb{R})$ et $x \in X_{\mathbb{R}}$. Soit $y \in C$ différent de x et $z \in C$ différent de x et y. Par la proposition 16.3.4, on a

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

dans $CH^n(X_{\mathbb{R}})$. On en tire immédiatement que $2x = 0$. □

Nous obtenons finalement :

Théorème 16.3.11. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n. Soit $X_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ où S est la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Alors on a un isomorphisme*

$$\varphi : \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Utilisant la suite exacte de la remarque 10.2.8, ainsi que le théorème 16.3.8 et le corollaire 16.3.10, on obtient un homomorphisme surjectif

$$\varphi : \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$. Utilisant les mêmes techniques que dans le théorème 16.3.8, on voit que $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$ est engendré par $m = \operatorname{Card}(\mathcal{C})$ éléments. □

Remarque 16.3.12. — Si A n'est pas orientable, ce théorème est faux. Il existe en effet pour tout $n \geq 2$ une $\mathbb{R}$-algèbre A de dimension n non orientable telle qu'on a un isomorphisme (voir le corollaire 17.4.9)

$$\varphi : \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

16.4. La suite exacte

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n et S la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Notons comme dans la section précédente $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $X_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$. La localisation induit un morphisme plat $i : X_{\mathbb{R}} \to X$ et donc un homomorphisme (corollaire 10.4.2) :

$$i^* : \widetilde{CH}^n(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}).$$

Lemme 16.4.1. — *L'homomorphisme i^* est surjectif.*

Démonstration. — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \longrightarrow & C^{n-2}(X,G^n) & \longrightarrow & C^{n-1}(X,G^n) & \longrightarrow & C^n(X,G^n) & \longrightarrow & 0 \\
& {\scriptstyle i^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\big\downarrow & & \\
\dots \longrightarrow & C^{n-2}(X_{\mathbb{R}},G^n) & \longrightarrow & C^{n-1}(X_{\mathbb{R}},G^n) & \longrightarrow & C^n(X_{\mathbb{R}},G^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes sont les complexes utilisés pour calculer $\widetilde{CH}^n(X)$ et $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$ respectivement et les homomorphismes verticaux sont induits par i^*. On voit que ces homomorphismes verticaux sont surjectifs. On en déduit que $i^* : \widetilde{CH}^n(X) \to \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$ est surjectif. □

L'inclusion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donne un morphisme fini $j : \mathrm{Spec}(A \otimes \mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(A)$ et donc un homomorphisme (corollaire 10.4.5)

$$j_* : \widetilde{CH}^n(A \otimes \mathbb{C}, \mathrm{Hom}_A(A \otimes \mathbb{C}, A)) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X).$$

Par ailleurs, la trace $tr : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ induit un homomorphisme $A \otimes \mathbb{C} \to A$. Cet homomorphisme est un générateur de $\mathrm{Hom}_A(A \otimes \mathbb{C}, A)$ comme $A \otimes \mathbb{C}$-module et donne donc un isomorphisme

$$\eta : A \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A \otimes \mathbb{C}, A).$$

Utilisant cet isomorphisme, on obtient un homomorphisme

$$j_* : \widetilde{CH}^n(A \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X).$$

La remarque 10.2.16 montre que $\widetilde{CH}^n(A \otimes \mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe à $CH^n(A \otimes \mathbb{C})$. On obtient finalement un homomorphisme

$$j_* : CH^n(A \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X).$$

Rappelons que $\widetilde{CH}^n(X)$ est un quotient du groupe de Grothendieck-Witt $GW^{lf}(A)$ (remarque 10.2.9). Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal complexe de A, on fixe une forme symétrique

$$\alpha_{\mathfrak{m}} : A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A).$$

Toute forme symétrique $A/\mathfrak{m} \to \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A)$ est isométrique à $\alpha_{\mathfrak{m}}$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal réel, on fixe également une forme symétrique

$$\beta_{\mathfrak{m}} : A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A).$$

On voit alors que toute forme symétrique $A/\mathfrak{m} \to \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A)$ est isométrique à $\beta_{\mathfrak{m}}$ ou à $-\beta_{\mathfrak{m}}$.

Lemme 16.4.2. — *Soit $j_* : CH^n(A \otimes \mathbb{C}) \to \widetilde{CH}^n(X)$ l'homomorphisme défini ci-dessus. Alors*

$$j_*(\mathfrak{m}) = \begin{cases} \alpha_{j(\mathfrak{m})} & \text{si } j(\mathfrak{m}) \text{ est complexe} \\ \beta_{j(\mathfrak{m})} \perp -\beta_{j(\mathfrak{m})} & \text{si } j(\mathfrak{m}) \text{ est réel.} \end{cases}$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe du calcul de

$$j_* : GW((A\otimes\mathbb{C})/\mathfrak{m}) \longrightarrow GW(A/j(\mathfrak{m})). \quad \square$$

COROLLAIRE 16.4.3. — *Soient*

$$i^* : \widetilde{CH}^n(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X(\mathbb{R}))$$

et

$$j_* : CH^n(A\otimes\mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(X)$$

les homomorphismes définis ci-dessus. Alors $i^*j_* = 0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m}\in \operatorname{Spec}(A\otimes\mathbb{C})$. Si $j(\mathfrak{m})$ est un point complexe, alors $j_*(\mathfrak{m}) = \alpha_{j(\mathfrak{m})}$ et par définition $i^*j_*(\mathfrak{m}) = 0$. Supposons que $j(\mathfrak{m})$ soit réel. On a alors $j_*(\mathfrak{m}) = \beta_{j(\mathfrak{m})}\perp -\beta_{j(\mathfrak{m})}$ et $i^*j_*(\mathfrak{m}) = \beta_{j(\mathfrak{m})}\perp -\beta_{j(\mathfrak{m})}$. La définition de l'isomorphisme

$$\varphi : \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}$$

du théorème 16.3.11 montre que $i^*j_*(\mathfrak{m}) = 0$. $\square$

Nous obtenons finalement :

THÉORÈME 16.4.4. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse de dimension n, S la partie multiplicative des $f\in A$ sans zéros réels, $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $X_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$. Les morphismes $i : X_{\mathbb{R}}\to X$ et $j : \operatorname{Spec}(A\otimes\mathbb{C})\to X$ donnent une suite exacte*

$$CH^n(A\otimes\mathbb{C}) \xrightarrow{\ j_*\ } \widetilde{CH}^n(X) \xrightarrow{\ i^*\ } \widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Cette suite est exacte à droite par le lemme 16.4.1. Le corollaire 16.4.3 donne $i^*j_* = 0$. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker}(i^*)\subset \operatorname{Im}(j_*)$. Considérons $\gamma\in\widetilde{CH}^n(X)$ et $C_1,\ldots,C_r$ l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$. Soient $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_r$ des points réels tels que $\mathfrak{m}_i\in C_i$ pour tout i. Les preuves des corollaires 16.3.6 et 16.3.7 montrent que

$$\gamma = \sum_i \delta_{\mathfrak{m}_i} + \sum_{\mathfrak{m}\text{ complexes}} \epsilon_{\mathfrak{m}}$$

pour certaines formes $\delta_{\mathfrak{m}_i}$ et $\epsilon_{\mathfrak{m}}$. On remarque que chaque $\epsilon_{\mathfrak{m}}$ est dans $\operatorname{Im}(j_*)$. Par ailleurs, chaque $\delta_{\mathfrak{m}_i}$ est une somme de $\beta_{\mathfrak{m}_i}$ et de $-\beta_{\mathfrak{m}_i}$ pour un isomorphisme

$$\beta_{\mathfrak{m}_i} : A/\mathfrak{m}_i \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}_i, A).$$

Si $i^*(\gamma) = 0$, alors le théorème 16.3.11 montre que $i^*(\delta_{\mathfrak{m}_i}) = 0$ pour tout i. Le même théorème montre que

$$\delta_{\mathfrak{m}_i} = \sum (\beta_{\mathfrak{m}_i}\perp -\beta_{\mathfrak{m}_i}).$$

Soit $\mathfrak{m}$ un point de $\operatorname{Spec}(A\otimes\mathbb{C})$ au dessus de $\mathfrak{m}_i$. Utilisant le lemme 16.4.2, on trouve que $j_*(\mathfrak{m}) = \beta_{\mathfrak{m}_i}\perp -\beta_{\mathfrak{m}_i}$. Cela conclut la preuve. $\square$

CHAPITRE 17

LES GROUPES DES CLASSES D'EULER

17.1. Résumé

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler la définition du groupe des classes d'Euler et les principaux résultats concernant ce groupe. Toutes les définitions et tous les résultats se trouvent dans [**BS99**] et [**BS00**]. Soit k un corps infini parfait, A une k-algèbre lisse de dimension n. Soit encore $E(A)$ le groupe des classes d'Euler, P un module projectif tel qu'il existe un isomorphisme

$$\chi : \det P \longrightarrow A.$$

Alors on peut définir une classe dans $E(A)$ appelée classe d'Euler de P et notée $e(P, \chi)$ satisfaisant la propriété suivante

$$e(P, \chi) = 0 \iff P = Q \oplus A.$$

Nous montrons qu'il existe un homomorphisme surjectif

$$\eta : E(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A)$$

tel que $\eta(e(P, \chi)) = \tilde{c}_n(P)$. Le calcul du chapitre précédent montre que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée alors η est un isomorphisme. Ainsi, pour tout projectif P de rang n tel que $\det P \simeq A$, on a

$$\tilde{c}_n(P) = 0 \iff P \simeq Q \oplus A.$$

Nous verrons également que η est un isomorphisme pour toute k-algèbre lisse de dimension 2.

17.2. Définition du groupe des classes d'Euler et premiers résultats

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une variété affine lisse de dimension n sur un corps k infini et parfait. Soit G le groupe abélien libre engendré par les couples de la forme $(\mathfrak{m}, \omega_{\mathfrak{m}})$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A et $\omega_{\mathfrak{m}}$ est un générateur de $\bigwedge^n(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Soit $J = \cap \mathfrak{m}_i$

l'intersection d'un nombre fini de maximaux et ω_J un générateur de $\bigwedge^n(J/J^2)$. Alors la localisation de ω_J en tout idéal maximal $\mathfrak{m}_i$ tel que $J \subset \mathfrak{m}_i$ donne un générateur $\omega_{\mathfrak{m}_i}$ de $\bigwedge^n(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2)$. Dans G, on note

$$(J, \omega_J) = \sum(\mathfrak{m}_i, \omega_{\mathfrak{m}_i}).$$

Soit H le sous-groupe de G engendré par les couples (J, ω_J) où $J = (a_1, \ldots, a_n)$ est une intersection complète réduite et $\omega_J = \overline{a_1} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}$ dans $\bigwedge^n(J/J^2)$.

Définition 17.2.1. — *On appelle groupe des classes d'Euler le groupe G/H. On le note $E(A)$.*

Soit maintenant P un module projectif de rang n tel que $\bigwedge^n P \simeq A$. Choisissons un générateur χ de $\bigwedge^n P$. Soit

$$\psi : P \longrightarrow J$$

une surjection, où J est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux maximaux (voir le corollaire A.2.2 pour l'existence d'une telle surjection). On a un isomorphisme

$$\wedge^n\overline{\psi} : \bigwedge^n(P/JP) \longrightarrow \bigwedge^n(J/J^2).$$

Définition 17.2.2. — *On appelle classe d'Euler de (P, χ) l'élément $(J, \wedge^n\overline{\psi}(\chi))$ de $E(A)$. On la note $e(P, \chi)$.*

Remarque 17.2.3. — *A priori*, cette classe dépend de la surjection $\psi : P \to J$ choisie. Dans [**BS98**], il est démontré que cette classe ne dépend en fait pas de la surjection choisie.

Le théorème suivant montre que le groupe $E(A)$ et la classe d'Euler sont une bonne réponse au problème de scinder un projectif de rang maximal :

Théorème 17.2.4. — *Soit k un corps infini parfait et A une k-algèbre lisse de dimension $n \geq 2$. Soit J un idéal réduit de hauteur n et ω_J un générateur de $\bigwedge^n(J/J^2)$. Soit encore P un module projectif de rang n et χ un générateur de $\bigwedge^n P$. On a :*

1°) *Supposons que $(J, \omega_J) = 0$ dans $E(A)$. Alors $J = (a_1, \ldots, a_n)$ est une intersection complète et $\omega_J = \overline{a_1} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}$ dans $\bigwedge^n(J/J^2)$.*
2°) *Supposons que $e(P, \chi) = (J, \omega_J)$ dans $E(A)$. Alors il existe une surjection $\psi : P \to J$ telle que $\wedge^n\overline{\psi}(\chi) = \omega_J$.*
3°) *$P \simeq Q \oplus A$ si et seulement si $e(P, \chi) = 0$ dans $E(A)$.*

Démonstration. — Voir [**BS98**]. □

Il y a également une version faible du groupe des classes d'Euler. Considérons le groupe abélien libre F engendré par les idéaux maximaux de A et le sous-groupe K de F engendré par les éléments de la forme $\sum_i \mathfrak{m}_i$ où les $\mathfrak{m}_i$ sont des idéaux maximaux distincts tels que $\cap_i \mathfrak{m}_i$ soit une intersection complète.

Définition 17.2.5. — *On appelle groupe des classes d'Euler faible le groupe F/K. On le note $E_0(A)$.*

Soit P un module projectif de rang n et $\psi : P \to J$ une surjection telle que J soit réduit de hauteur n.

Définition 17.2.6. — *On appelle classe d'Euler faible de P l'élément J de $E_0(A)$. On la note $e(P)$.*

Lemme 17.2.7. — *L'opération envoyant un couple $(\mathfrak{m}, \omega_{\mathfrak{m}})$ de $E(A)$ sur l'élément $\mathfrak{m}$ de $E_0(A)$ donne un homomorphisme surjectif*

$$E(A) \longrightarrow E_0(A).$$

Démonstration. — C'est clair. □

Examinons maintenant la question des liens entre $E(A)$ et $\widetilde{CH}^n(A)$. Considérons $(\mathfrak{m}, \omega_{\mathfrak{m}}) \in E(A)$. Supposons que $\omega_{\mathfrak{m}} = \overline{m}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{m}_n$. On associe à la paire $(\mathfrak{m}, \omega_{\mathfrak{m}})$ le couple $(A/\mathfrak{m}, \rho_\omega) \in \widetilde{CH}^n(A)$ où

$$\rho_\omega : A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A)$$

est donné par $\rho_\omega(1) = Kos(m_1, \dots, m_n)$.

Proposition 17.2.8. — *L'association décrite ci-dessus induit un homomorphisme surjectif*

$$\eta : E(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A).$$

Démonstration. — Pour démontrer que η est bien défini, il suffit de voir que si $J = (a_1, \dots, a_n)$ est de hauteur n et $\omega_J = \overline{a}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{a}_n$ alors $\eta(J, \omega_J)$ est nul dans $\widetilde{CH}^n(A)$. Le théorème 10.3.5 montre que c'est vrai. De plus, η est un homomorphisme surjectif par définition. □

Dans le même ordre d'idées, nous avons les deux résultats suivants, dont les preuves sont laissées au lecteur :

Proposition 17.2.9. — *L'opération envoyant un $\mathfrak{m} \in E_0(A)$ sur $\mathfrak{m} \in CH^n(A)$ induit un homomorphisme surjectif*

$$\eta_0 : E_0(A) \longrightarrow CH^n(A).$$

Proposition 17.2.10. — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} E(A) & \longrightarrow & E_0(A) \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_0} \\ \widetilde{CH}^n(A) & \longrightarrow & CH^n(A). \end{array}$$

Nous pouvons également comparer la classe d'Euler dans $E(A)$ et la classe d'Euler dans $\widetilde{CH}^n(A)$.

Proposition 17.2.11. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et P un module projectif de rang n tel qu'il existe un isomorphisme*

$$\kappa : \bigwedge^n P \longrightarrow A.$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$\theta_\kappa : \widetilde{CH}^n(A, \det P) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A)$$

tel que $\eta(e(P,\chi)) = \theta_\kappa(\tilde{c}_n(P))$ où $\chi = \kappa^{-1}(1)$.

Démonstration. — Soit $s : P \to A$ une section telle que $s(P)$ soit réduit de hauteur n. Par le théorème 14.3.1, on sait que $\tilde{c}_n(P)$ est donnée par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^n P \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/s(P) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathrm{Hom}_A(A, \bigwedge^n P) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^n P, \bigwedge^n P) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_A(A/s(P), \bigwedge^n P).
\end{tikzcd}$$

Utilisant κ, ce diagramme devient

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^n P \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/s(P) \arrow[d, "\varphi"] \\
A^\vee \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^n P, A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_A(A/s(P), A).
\end{tikzcd}$$

Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ les idéaux maximaux tel que $s(P) = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r$. Choisissons une base $p_1, \dots, p_n$ de $P_{\mathfrak{m}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{m}_r}$ telle que $\kappa(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) = 1$. On a donc $p_1 \wedge \dots \wedge p_n = \chi$. Soient $a_1, \dots, a_n \in A_{\mathfrak{m}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{m}_r}$ tels que $a_i = s(p_i)$. On voit que pour tout $\mathfrak{m}_i$

$$\varphi_{\mathfrak{m}_i} : k(\mathfrak{m}_i) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{A_{\mathfrak{m}_i}}(k(\mathfrak{m}_i), A_{\mathfrak{m}_i})$$

est la forme symétrique donnée par $\varphi_{\mathfrak{m}_i}(1) = Kos(a_1, \dots, a_n)$. Les descriptions de $e(P,\chi)$ et η donnent immédiatement l'égalité

$$\eta(e(P,\chi)) = \theta_\kappa(\tilde{c}_n(P)). \quad \square$$

Nous avons également :

Proposition 17.2.12. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n et P un module projectif de rang n. Alors $\eta_0(e(P)) = c_n(P)$.*

Démonstration. — Cette description de la classe de Chern maximale de P est classique (voir par exemple [**Ful84**, lemme 3.2, p. 52]). $\square$

17.3. Le groupe des classes d'Euler noethérien

Il apparaît que le groupe des classes d'Euler usuel peut se généraliser dans le cas d'un anneau noethérien contenant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ (voir [**BS00**]). Soit A une telle algèbre avec $\dim(A) \geq 2$. Si J est un idéal de hauteur n tel que J/J^2 est engendré par n éléments on dit que deux surjections

$$\alpha : (A/J)^n \longrightarrow J/J^2$$

et

$$\beta : (A/J)^n \longrightarrow J/J^2$$

sont équivalentes s'il existe un automorphisme σ de $(A/J)^n$ de déterminant 1 tel que $\alpha\sigma = \beta$. Notons $[\alpha]$ la classe d'équivalence de α. Une telle classe d'équivalence est appelée une orientation locale de J. Une orientation locale $[\alpha]$ de J est dite globale si α se relève en une surjection

$$\alpha' : A^n \longrightarrow J.$$

Remarquons que si α se relève en une surjection α', alors il en est de même de toute surjection

$$\beta : (A/J)^n \longrightarrow J/J^2$$

équivalente à α. En effet deux telles surjections diffèrent d'un $\sigma \in SL_{A/J}((A/J)^n)$. Puisque A/J est de dimension nulle, on a $SL_{A/J}((A/J)^n) = E_{A/J}((A/J)^n)$ et donc on peut également relever σ.

Considérons le groupe abélien libre G' engendré par les paires $(N, [\alpha_N])$ où N est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire pour un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $[\alpha_N]$ est une orientation locale de N. Soit J un idéal de hauteur n tel que $J = \cap N_i$ pour des idéaux N_i $\mathfrak{m}_i$-primaires et tel que J/J^2 est engendré par n éléments. Soit encore $[\omega_J]$ une orientation locale de J. Localisant ω_J, on voit que celle-ci induit des orientations locales $[\omega_{N_i}]$ pour tout i. On écrit alors dans G' :

$$(J, [\omega_J]) = \sum_i (N_i, [\omega_{N_i}]).$$

Considérons le sous-groupe de G' engendré par les paires $(J, [\omega_J])$ où J est un idéal de hauteur n et $[\omega_J]$ est une orientation globale de J.

DÉFINITION 17.3.1. — *On appelle groupe des classes d'Euler noethérien le groupe G'/H'. On le note $E'(A)$.*

On peut aussi définir une classe d'Euler à coefficients dans $E'(A)$. Soit P un module projectif de rang n tel qu'il existe un isomorphisme

$$\chi : \bigwedge^n P \longrightarrow A.$$

Soit $\psi : P \to J$ une surjection où J est un idéal de hauteur n (pour l'existence d'une telle surjection, voir le corollaire A.1.8). Réduisant modulo J, on obtient une surjection

$$\overline{\psi} : P/JP \longrightarrow J/J^2.$$

Choisissons un isomorphisme

$$\overline{\gamma} : (A/J)^n \longrightarrow P/JP$$

tel que $\wedge^n(\overline{\gamma}) = \overline{\chi}^{-1}$. On obtient ainsi une surjection

$$\overline{\psi}\overline{\gamma} : (A/J)^n \longrightarrow J/J^2$$

qui est une orientation locale de J. Notons ω_J cette orientation.

Définition 17.3.2. — *L'élément* $(J, [\omega_J])$ *sera appelé classe d'Euler noethérienne de* (P, χ). *On la note* $\mathrm{e}'(P, \chi)$.

Remarque 17.3.3. — Il n'est pas évident que cette classe est bien définie. Pour s'en convaincre, voir [**BS00**].

On a le résultat suivant :

Théorème 17.3.4. — *Soit* A *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre noethérienne de dimension* $n \geq 2$ *et* P *un module projectif de rang* n. *Soit encore* $\chi : \bigwedge^n P \to A$ *un isomorphisme. Alors* $\mathrm{e}'(P, \chi) = 0$ *si et seulement si* $P \simeq Q \oplus A$.

Démonstration. — Voir [**BS00**, corollaire 4.4, p. 203]. □

Comme dans le cas d'un algèbre régulière, on peut définir un groupe des classes d'Euler noethérien faible. Soit F' le groupe abélien libre engendré par les idéaux N $\mathfrak{m}$-primaires pour un certain $\mathfrak{m}$ maximal et tels que N/N^2 soit engendré par n éléments. Comme d'habitude, si $J = \cap N_i$ pour des N_i $\mathfrak{m}_i$-primaires est tel que J/J^2 est engendré par n éléments on note dans F'

$$J = \sum_i N_i.$$

Soit K' le sous-groupe de F' engendré par les idéaux d'intersection complète, c'est-à-dire les idéaux de la forme $J = (a_1, \dots, a_n)$ pour des $a_i \in A$ formant une suite régulière.

Définition 17.3.5. — *On appelle groupe des classes d'Euler noethérien faible le groupe* F'/K'. *On le note* $E_0'(A)$.

Examinons maintenant les liens entre le groupe des classes d'Euler noethérien et le groupe de Chow orienté maximal d'une k-algèbre lisse. Soit M un idéal $\mathfrak{m}$-primaire et

$$\omega_M : (A/M)^n \longrightarrow M/M^2$$

une surjection. Cette surjection donne un ensemble $m_1, \ldots, m_n$ qui engendre localement M. On associe au couple (M, ω_M) le couple symétrique $(A/M, \rho_M)$ où

$$\rho_M : A/M \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(A/M, A)$$

est défini par $\rho_M(1) = Kos(m_1, \ldots, m_n)$. On vérifie que deux surjections équivalentes donnent la même forme symétrique. On obtient ainsi un homomorphisme

$$\nu : G' \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A)$$

en définissant $\nu(M, [\omega_M])$ comme étant la classe dans $\widetilde{CH}^n(A)$ du couple symétrique $(A/M, \rho_M)$. On a :

Proposition 17.3.6. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n sur un corps de caractéristique nulle. L'homomorphisme ν défini ci-dessus induit un homomorphisme surjectif*

$$\nu : E'(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A).$$

Démonstration. — Il suffit de voir que $\nu(H') = 0$. C'est clair au vu du théorème 10.3.5. □

De même, on peut définir une version faible de cet homomorphisme

Proposition 17.3.7. — *L'homomorphisme*

$$\nu_0 : F' \longrightarrow CH^n(A)$$

défini par $\nu_0(M) = l(A/M)$ pour tout idéal M $\mathfrak{m}$-primaire induit un homomorphisme surjectif

$$\nu_0 : E'_0(A) \longrightarrow CH^n(A).$$

Le résultat suivant est laissé au lecteur :

Proposition 17.3.8. — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} E'(A) & \longrightarrow & E'_0(A) \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu_0} \\ \widetilde{CH}^n(A) & \longrightarrow & CH^n(A). \end{array}$$

Examinons maintenant les liens entre les groupes des classes d'Euler classique et noethérien. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A et $\omega_{\mathfrak{m}}$ un générateur de $\bigwedge^n \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Si $\omega_{\mathfrak{m}} = \overline{m}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{m}_n$, on obtient une surjection

$$\theta_{\mathfrak{m}} : (A/\mathfrak{m})^n \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

en posant $\theta_{\mathfrak{m}}(e_i) = \overline{m}_i$. On obtient ainsi un homomorphisme

$$\zeta : F \longrightarrow E'(A)$$

donné par $\zeta(\mathfrak{m}, \omega_{\mathfrak{m}}) = (\mathfrak{m}, \theta_{\mathfrak{m}})$. Cet homomorphisme induit un homomorphisme

$$\zeta : E(A) \longrightarrow E'(A).$$

PROPOSITION 17.3.9. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension n sur un corps de caractéristique nulle. Alors*

$$\zeta : E(A) \longrightarrow E'(A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Voir [**BS00**, remarque 4.7, p. 23]. □

17.4. Quelques résultats

Commençons par un théorème :

THÉORÈME 17.4.1. — *Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre de dimension 2. Alors l'application*

$$\alpha : K_0^{Sp}(A) \longrightarrow E'(A)$$

définie par $\alpha(P, \chi) = e(P, \chi)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Voir [**BS00**, remarque 4.7, p. 23]. □

COROLLAIRE 17.4.2. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension 2 sur un corps k de caractéristique nulle. Alors les groupes $E(A)$ et $\widetilde{CH}^2(A)$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Le théorème 15.3.11 montre que la prise de la classe d'Euler est un isomorphisme de $K_0^{Sp}(A)$ vers $\widetilde{CH}^2(A)$. Il s'ensuit que l'homomorphisme

$$\eta : E(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^2(A)$$

est un isomorphisme. □

Nous avons également un corollaire intéressant :

COROLLAIRE 17.4.3. — *Soit A une k-algèbre lisse de dimension 2 sur un corps k de caractéristique nulle. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, M un idéal $\mathfrak{m}$-primaire et*

$$\omega_M : (A/M)^2 \longrightarrow M/M^2$$

une surjection. Supposons que $\nu(M, \omega_M) = \sum(A/\mathfrak{m}_i, \phi_i)$ pour des maximaux $\mathfrak{m}_i$ (non forcément distincts) et des isomorphismes

$$\phi_i : A/\mathfrak{m}_i \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{m}_i, A).$$

Notons

$$\omega_i : (A/\mathfrak{m}_i)^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$$

la surjection associée à ϕ_i. On a alors dans $E'(A)$ l'égalité suivante :

$$(M, \omega_M) = \sum(m_i, \omega_{\mathfrak{m}_i}).$$

Examinons maintenant le cas des $\mathbb{R}$-algèbres. On a :

THÉORÈME 17.4.4. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit S la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Alors on a un isomorphisme*

$$\Delta : E(S^{-1}A) \longrightarrow \bigoplus_I \mathbb{Z}$$

où I est l'ensemble des composantes connexes compactes de $X(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Voir [**BS99**, théorème 4.13, p. 306]. □

THÉORÈME 17.4.5. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n. Soit S la partie multiplicative des $f \in A$ sans zéros réels. Alors on a une suite exacte*

$$E(A \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow E(A) \longrightarrow E(S^{-1}A) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Voir [**BS99**, théorèmes 4.13 et 4.14, p. 306 et 307]. □

COROLLAIRE 17.4.6. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n. Alors*

$$\eta : E(A) \longrightarrow \widetilde{CH}^n(A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème ci-dessus, du théorème 16.3.11 et du théorème 16.4.4. □

COROLLAIRE 17.4.7. — *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre lisse orientée de dimension n et P un module projectif de rang n. Alors $\tilde{c}_n(P) = 0$ si et seulement si $P \simeq Q \oplus A$.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le corollaire ci-dessus, le théorème 17.2.4 et la proposition 17.2.11. □

On peut également calculer $\widetilde{CH}^n(A)$ dans certains cas où A n'est pas orientable. On a

PROPOSITION 17.4.8. — *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ pair. Alors*

$$E(A) = E_0(A) = CH^n(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Voir [**BS99**, corollaire 6.3, p. 319]. □

COROLLAIRE 17.4.9. — *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ pair. Alors*

$$\widetilde{CH}^n(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Il suffit de contempler le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E(A) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & E_0(A) \arrow[d, "\eta_0"] \\ \widetilde{CH}^n(A) \arrow[r] & CH^n(A). \end{tikzcd}$$ □

APPENDICE A

THÉORÈME D'EISENBUD-EVANS ET THÉORÈME DE BERTINI

A.1. Théorème d'Eisenbud-Evans

Définition A.1.1. — *Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. On dit que $m \in M$ est basique en $x \in \operatorname{Spec}(A)$ si $m \notin xM_x$. Si X est une partie de $\operatorname{Spec}(A)$, on dit que m est basique en X si m est basique en x pour tout $x \in X$.*

Définition A.1.2. — *Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Pour tout $x \in \operatorname{Spec}(A)$, on note $\mu_x(M)$ le nombre minimal de générateurs du A_x-module M_x.*

Remarque A.1.3. — Par le lemme de Nakayama, on voit que $\mu_x(M)$ est la dimension du $k(x)$-espace vectoriel M_x/xM_x.

Définition A.1.4. — *Soit A un anneau noethérien, $X \subset \operatorname{Spec}(A)$ et*

$$d : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

une fonction. On définit un ordre partiel sur X en posant que $x << y$ si $x = y$ ou si $x \subset y$ et $d(x) < d(y)$.

Définition A.1.5. — *Soit A un anneau noethérien, $X \subset \operatorname{Spec}(A)$. Une fonction*

$$d : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

est une fonction de dimension généralisée si pour tout idéal I de A l'ensemble $V(I) \cap X$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments minimaux pour l'ordre $<<$.

Par exemple, $d : \operatorname{Spec}(A) \to \mathbb{N}$ définie par $d(x) = \operatorname{ht}(x)$ est une fonction de dimension généralisée sur $\operatorname{Spec}(A)$. Si $t \in \mathbb{N}$ est un entier, posons

$$X_t = \{x \in X |\ \operatorname{ht}(x) \leq t\}.$$

La fonction

$$d_t : X_t \longrightarrow \mathbb{N}$$

définie par

$$d_t(x) = \max\{n \text{ tels qu'il existe une chaîne } x \subset y_2 \subset \cdots \subset y_n \text{ avec } y_i \in X_t\}$$

est une fonction de dimension généralisée. On a le théorème suivant (voir [**Plu83**]) :

THÉORÈME A.1.6. — *Soit A un anneau noethérien et $d : X \to \mathbb{N}$ une fonction de dimension généralisée sur un sous ensemble X de* Spec(A). *Soit M un A-module de type fini tel que $\mu_x(M) > d(x)$ pour tout $x \in X$. Alors M possède un élément basique.*

On obtient immédiatement les corollaires suivants :

COROLLAIRE A.1.7. — *(Serre) Soit A un anneau noethérien de dimension n et P un module projectif de rang $m > n$. Alors il existe un module projectif Q tel que $P \simeq Q \oplus A$.*

Démonstration. — Utilisons la fonction de dimension généralisée d définie par $d(x) = \mathrm{ht}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$. Comme le rang de P est égal à celui de son dual, on a $\mu_x(P^\vee) = m > d(x)$ pour tout $x \in X$. Par le théorème ci-dessus, il existe un $\phi \in P^\vee$ basique sur $\mathrm{Spec}(A)$. Il est clair que ϕ_x est surjective pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$. Donc $P \simeq A \oplus \mathrm{Ker}(\phi)$. □

COROLLAIRE A.1.8. — *Soit A un anneau noethérien de dimension n et P un module projectif de rang n. Alors il existe un homomorphisme*

$$\phi : P \longrightarrow A$$

tel que $\mathrm{ht}(\phi(P)) \geq n$. *Si de plus $x_1, \ldots, x_m$ sont des maximaux, on peut choisir ϕ tel que $\phi(P) \not\subset x_1 \cap \cdots \cap x_m$.*

Démonstration. — Soient X_n l'ensemble et d_n la fonction de dimension généralisée définis ci-dessus. On étend d_n en d' sur $X = X_n \cup \{x_1 \cup \cdots \cup x_n\}$ en posant $d'(x_i) = 0$. Comme les x_i sont en nombre fini, il est clair que d' est encore une fonction de dimension généralisée. Par le théorème A.1.6, il existe un homomorphisme

$$\phi : P \longrightarrow A$$

qui est basique sur X. Cela signifie que $\phi(P)$ n'est contenu dans aucun premier de hauteur inférieure à n, et n'est pas non plus contenu dans les x_i. Donc $\mathrm{ht}(\phi(P)) \geq n$ et $\phi(P) \not\subset x_1 \cap \cdots \cap x_m$. □

A.2. Théorème de Bertini

THÉORÈME A.2.1. — *Soient k un corps infini et A une k-algèbre géométriquement réduite de dimension n. Soit P un module projectif de rang r et $(\alpha, a) \in P^\vee \oplus A$. Alors il existe un homomorphisme $\beta \in P^\vee$ tel que si $I = (\alpha + a\beta)(P)$ on a :*

1°) *Soit $I_a = A_a$, soit I_a est un idéal de hauteur r tel que A_a/I_a soit géométriquement réduit.*

2°) *Si* $r < \dim(A)$ *et* A_a *est géométriquement intègre, alors* A_a/I_a *est géométriquement intègre.*

3°) *Si* A_a *est lisse alors* A_a/I_a *est lisse.*

Démonstration. — Cette version du théorème de Bertini est due à Swan (voir [**Swa74**, théorème 1.3]). □

Corollaire A.2.2. — *Soit* A *une* k*-algèbre lisse de dimension* n *et* P *un module projectif de rang* n*. Alors il existe une section*

$$s : P \longrightarrow A$$

telle que $s(P)$ *soit l'intersection d'un nombre fini de maximaux.*

Démonstration. — Soit $\alpha \in P^\vee$ un homomorphisme quelconque. On considère le couple $(\alpha, 1) \in P^\vee \oplus A$. Par le théorème ci-dessus, il existe $\beta \in P^\vee$ tel que $(\alpha + \beta)(P)$ soit de hauteur n et lisse. Ainsi $(\alpha + \beta)(P)$ est l'intersection d'un nombre fini de maximaux. □

APPENDICE B

CATÉGORIES TRIANGULÉES

B.1. Définition

Dans cette annexe, nous donnons la définition d'une catégorie triangulée, quelques résultats basiques et quelques exemples. Pour plus de renseignements, le lecteur est prié de se référer au livre de C. Weibel ([**Wei94**, chapitre 10]). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive munie d'un foncteur covariant additif

$$T : F \longrightarrow F$$

qui est un automorphisme de catégorie. Un triangle dans $\mathcal{C}$ est un diagramme

$$\triangle : \qquad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} TA$$

où A, B, C sont des objets de $\mathcal{C}$ et α, β, γ sont des morphismes de $\mathcal{C}$. Ce diagramme est aussi parfois écrit

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\gamma"'] & \\ A \arrow[rr, "\alpha"'] & & B \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

bien que γ ne soit pas un morphisme de C vers A.

Une catégorie triangulée est une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur covariant additif T comme ci-dessus (T est appelé *translation*) dans laquelle on choisit une classe de triangle, appelés triangles exacts, satisfaisant les axiomes suivants :

(TR1). — Pour tout A, le triangle $A \xrightarrow{1} A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA$ est exact. Pour tout morphisme $f : A \to B$, il existe un triangle exact

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow TA.$$

Si $\triangle$ est exact, alors tout triangle isomorphe à $\triangle$ est aussi exact.

(TR2). — Si le triangle $\triangle$ est exact, alors le triangle

$$B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} TA \xrightarrow{-T\alpha} TB$$

est aussi exact.

(TR3). — Si

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} TA$$

et

$$A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \xrightarrow{\gamma'} TA'$$

sont des triangles exacts et il existe des morphismes $f : A \to A'$ et $g : B \to B'$ tels que le carré de gauche dans le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\exists h"'] & TA \arrow[d, "Tf"'] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r, "\gamma'"'] & TA' \end{tikzcd}$$

alors il existe $h : C \to C'$ tel que le diagramme commute. Ce h n'est pas unique en général.

Si $f : A \to B$ est un morphisme, la condition TR1 montre qu'on peut trouver un triangle exact

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} TA.$$

Utilisant TR3, on voit que le triple (C, β, γ) est unique à un isomorphisme non unique près. L'objet C est appelé *cône* de f.

(TR4). — Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des morphismes composables et soit $h = g \circ f$. Pour tout choix de triangles exacts

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\beta} U \xrightarrow{\gamma} TA, \qquad B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} V \xrightarrow{\phi} TB$$

et

$$A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\eta} TA$$

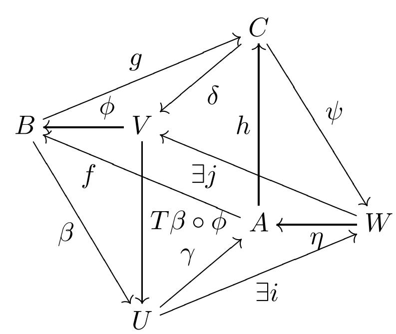
il existe des morphismes $i : U \to W$ et $j : W \to V$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\exists i"'] & TA \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\exists j"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\
B \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "\delta"] & V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "T\beta \circ \phi"'] & TB \arrow[dl, "T\beta"] \\
 & & TU &
\end{tikzcd}$$

et le triangle

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{j} W \xrightarrow{T\beta \circ \phi} TU$$

soit exact. On résume la plupart du temps ces propriétés en posant le diagramme suivant :



Ce diagramme explique également que la propriété TR4 soit en général appelée *axiome de l'octaèdre*. La philosophie de cet axiome est que les choix des morphismes i et j donnés par l'axiome TR3 peuvent être faits de manière compatible, *i.e.* de manière à obtenir un triangle exact contenant i et j. Il existe une version raffinée de l'axiome (TR4) appelée (TR4+). Ce raffinement est utilisé pour démontrer quelques résultats techniques sur les groupes de Witt de catégories triangulées et nous choisissons donc de ne pas l'énoncer ici. Toutes les catégories triangulées apparaissant dans ce travail satisfont néanmoins l'axiome raffiné (TR4+).

B.2. Exemples de catégories triangulées

Soit X un schéma et $\mathcal{P}(X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents localement libres. On considère la catégorie $K(\mathcal{P}(X))$ dont les objets sont les complexes d'objets de $\mathcal{P}(X)$ et les morphismes sont les homomorphismes de complexes. Soient P et Q deux objets de $K(\mathcal{P}(X))$ et

$$f : P \longrightarrow Q$$

un morphisme de complexes. On dit que f est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme en homologie. La catégorie $D(\mathcal{P}(X))$ est obtenue en inversant les quasi-isomorphismes par un calcul de fractions (voir [**Wei94**, chapitre 10, paragraphe 3]). C'est évidemment une catégorie additive. Pour munir $D(\mathcal{P}(X))$ d'une structure de catégorie triangulée, il faut tout d'abord spécifier un foncteur de translation T. Soit P un complexe de modules cohérents localement libres. On définit TP en posant $(TP)_n = P_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et

$$d^n_{TP} : (TP)_n \longrightarrow (TP)_{n-1}$$

par $d^n_{TP} = -d^{n-1}_P$. La définition de Tf pour un morphisme de complexes $f : P \to Q$ est évidente. On voit facilement que T est covariant additif et est un automorphisme de $D(\mathcal{P}(X))$. Il faut maintenant choisir une classe de triangles exacts pour donner une structure triangulée à $D(\mathcal{P}(X))$. Soit donc $f : P \to Q$ un morphisme de complexes. Le cône $C(f)$ de f est défini au degré n par $C(f)_n = P_{n-1} \oplus Q_n$ et $d^n_{C(f)} : C(f)_n \to C(f)_{n-1}$ est définie par la matrice

$$d^n_{C(f)} = \begin{pmatrix} -d^{n-1}_P & 0 \\ -f_n & d^n_Q \end{pmatrix}.$$

Il y a des morphismes évidents $\beta : Q \to C(f)$ et $\gamma : C(f) \to TP$. On dit qu'un triangle

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow TA$$

est exact s'il est isomorphe à un triangle de la forme

$$P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{\beta} C(f) \xrightarrow{\gamma} TP.$$

THÉORÈME B.2.1. — *Soit X un schéma et $\mathcal{P}(X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents localement libres. Alors la catégorie $D(\mathcal{P}(X))$, munie du foncteur de translation T et de la classe des triangles exacts définis ci-dessus, est une catégorie triangulée.*

Démonstration. — Voir [**Wei94**, chapitre 10, paragraphe 4]. □

REMARQUE B.2.2. — Soit $P_\bullet$ un objet de $D(\mathcal{P}(X))$. On dit que $P_\bullet$ est borné si $P_i = 0$ pour tout $|i| > n$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit $D^b(\mathcal{P}(X))$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{P}(X))$ des complexes bornés. Il est évident que T préserve $D^b(\mathcal{P}(X))$ et que le cône d'un morphisme entre complexes bornés est un complexe borné. On vérifie facilement que $D^b(\mathcal{P}(X))$ est une catégorie triangulée.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne quelconque, on peut également munir la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ d'une structure de catégorie triangulée. Le foncteur de translation et la définition du cône sont les mêmes que pour $D(\mathcal{P}(X))$. Comme ci-dessus, un triangle exact est un triangle isomorphe à un triangle

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\beta} C(f) \xrightarrow{\gamma} TA$$

où $C(f)$ est le cône de f, $\beta : B \to C(f)$ et $\gamma : C(f) \to TA$ sont les morphismes évidents. Ainsi :

Théorème B.2.3. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors la catégorie $D(\mathcal{A})$, munie de la translation T et de la classe de triangles exacts définis ci-dessus, est une catégorie triangulée.*

Démonstration. — Voir [**Wei94**, corollaire 10.4.2, p. 386]. □

Comme dans le cas de $D(\mathcal{P}(X))$, on a la remarque suivante :

Remarque B.2.4. — Soit $D^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ des complexes bornés d'objets de $\mathcal{A}$. Alors $D^b(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.

APPENDICE C

LE GROUPE DE WITT D'UNE CATÉGORIE EXACTE

C.1. Définitions

Nous donnons ici quelques définitions et résultats basiques concernant les groupes de Witt et de Grothendieck-Witt d'une catégorie exacte. Les lecteurs intéressés sont priés de se rapporter à [**QSS79**] pour plus de détails.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie exacte. Un foncteur exact contravariant

$$^{\sharp} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

muni d'un isomorphisme de foncteurs

$$\varpi : 1 \longrightarrow {}^{\sharp\sharp}$$

tel que $\varpi_M^{\sharp}\varpi_{M^{\sharp}} = id_{M^{\sharp}}$ est appelé dualité sur $\mathcal{A}$. Une catégorie exacte avec dualité $^{\sharp}$ et isomorphisme naturel ϖ sera notée $(\mathcal{A}, ^{\sharp}, \varpi)$.

Définition C.1.1. — *Un couple (M, ϕ) où M est un objet de $\mathcal{A}$ et*

$$\phi : M \longrightarrow M^{\sharp}$$

est un isomorphisme est appelé "paire symétrique" si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varpi"'] & M^{\sharp} \arrow[d, equal] \\ M^{\sharp\sharp} \arrow[r, "\phi^{\sharp}"'] & M^{\sharp}. \end{tikzcd}$$

Définition C.1.2. — *Soient (M, ϕ) et (N, ψ) deux paires symétriques et*

$$f : M \longrightarrow N$$

un isomorphisme. On dit que f est un isométrie si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & M^\sharp \\ N \arrow[r, "\psi"'] & N. \arrow[u, "f^\sharp"'] \end{tikzcd}$$

Dans la suite, on supposera que les classes d'isométries de couples (M, ϕ) forment un ensemble.

DÉFINITION C.1.3. — *Soient (M, ϕ) et (N, ψ) deux paires symétriques. On note $(M, \phi)\perp(N, \psi)$ la paire symétrique $(M \oplus N, \phi \oplus \psi)$.*

DÉFINITION C.1.4. — *Soient (M, ϕ) une paire symétrique, L un objet de $\mathcal{A}$. On dit que L est un Lagrangien de (M, ϕ) s'il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{i^\sharp\phi} L^\sharp \longrightarrow 0.$$

Une paire symétrique (M, ϕ) admettant un Lagrangien L est dite neutre.

DÉFINITION C.1.5. — *Soit L un objet de $\mathcal{A}$. On définit un isomorphisme symétrique*

$$h : L \oplus L^\sharp \longrightarrow L^\sharp \oplus L^{\sharp\sharp}$$

par $h = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Id \\ \varpi & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La paire symétrique $(L \oplus L^\sharp, h)$ est notée $H(L)$.

DÉFINITION C.1.6. — *Soit $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ une catégorie exacte avec dualité et G le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme de paires symétriques. Soit H le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $(M, \phi) + (N, \psi) - (M, \phi)\perp(N, \psi)$ et $(M, \phi) - H(L)$ si L est un Lagrangien de (M, ϕ). Le groupe de Grothendieck-Witt de la catégorie exacte $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ est le groupe G/H. On le note $GW(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$.*

DÉFINITION C.1.7. — *Soit $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ une catégorie exacte avec dualité. Le groupe de Witt de $\mathcal{A}$ est le quotient de $GW(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ par le sous-groupe engendré par les $H(L)$ pour $L \in Obj(\mathcal{A})$. On le note $W(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$.*

C.2. Orthogonalité

DÉFINITION C.2.1. — *Soit (M, ϕ) une paire symétrique et $N \subset M$ un sous-objet. Si $i : N \to M$ est l'inclusion, on appelle orthogonal de N, et on note $N^\perp$, le noyau de $i^\sharp\phi$:*

$$0 \longrightarrow N^\perp \longrightarrow M \xrightarrow{i^\sharp\phi} N^\sharp.$$

DÉFINITION C.2.2. — *Soit (M, ϕ) une paire symétrique et $N \subset M$ un sous-objet. On dit que N est un sous-Lagrangien de M si $N \subset N^\perp$.*

On a le théorème suivant :

THÉORÈME C.2.3. — *Soit* $(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi)$ *une catégorie exacte avec dualité. Soit encore* (M, ϕ) *une paire symétrique et* $N \subset M$ *un sous-Lagrangien. Alors* ϕ *induit un isomorphisme symétrique*

$$\varphi : N^\perp/N \longrightarrow (N^\perp/N)^\sharp$$

tel que $(M, \phi) = (N^\perp/N, \varphi) + H(N)$ *dans* $GW(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi)$.

Démonstration. — Voir [**QSS79**, corollaire 5.5, p. 281]. □

C.3. Fonctorialité

DÉFINITION C.3.1. — *Soient* $(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi)$ *et* $(\mathcal{B}, ^\vee, \omega)$ *deux catégories exactes avec dualités et*

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

un foncteur exact. On dit que F *préserve les dualités s'il existe un isomorphisme de foncteurs* $\eta : F \circ ^\sharp \to ^\vee \circ F$ *tel que le diagramme suivant commute pour tout* M *:*

$$\begin{tikzcd} FM \arrow[r, "F\varpi"] \arrow[d, "\omega_{FM}"'] & F(M^{\sharp\sharp}) \arrow[d, "\eta_{M^\sharp}"] \\ FM^{\vee\vee} \arrow[r, "(\eta_M)^\vee"'] & F(M^\sharp)^\vee. \end{tikzcd}$$

PROPOSITION C.3.2. — *Soient* $(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi)$ *et* $(\mathcal{B}, ^\vee, \omega)$ *deux catégories exactes avec dualités. Alors tout foncteur*

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

préservant les dualités induit un homomorphisme de groupe

$$F : GW(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi) \longrightarrow GW(\mathcal{B}, ^\vee, \omega)$$

donné par $F(M, \phi) = (FM, \eta_M F\phi)$. *Le même résultat est vrai pour les groupes de Witt.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

COROLLAIRE C.3.3. — *Soient* $(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi)$ *et* $(\mathcal{B}, ^\vee, \omega)$ *deux catégories exactes avec dualités. Soit*

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

préservant les dualités tel que F *soit une équivalence de catégories. Alors* F *induit un isomorphismes de groupes*

$$F : GW(\mathcal{A}, ^\sharp, \varpi) \longrightarrow GW(\mathcal{B}, ^\vee, \omega).$$

Le même résultat est vrai pour les groupes de Witt.

APPENDICE D

LES GROUPES DE WITT DE CATÉGORIES TRIANGULÉES

D.1. Définitions

Comme dans l'annexe précédente, nous donnons quelques définitions et résultats concernant les groupes de Witt d'une catégorie triangulée. Pour plus d'information, voir [**Bal99, Bal00, Bal01**]. Dans cette annexe, nous supposerons que toutes les catégories triangulées sont $\mathbb{Z}[1/2]$-linéaires.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories triangulées avec foncteurs de translation $T_{\mathcal{C}}$ et $T_{\mathcal{D}}$ respectivement.

DÉFINITION D.1.1. — *Un foncteur additif covariant*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

est dit δ-exact (où $\delta = \pm 1$) si $FT_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{D}}F$ et pour tout triangle exact de $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} T_{\mathcal{C}}A$$

le triangle

$$FA \xrightarrow{Fa} FB \xrightarrow{Fb} FC \xrightarrow{\delta Fc} T_{\mathcal{D}}FA$$

est exact dans $\mathcal{D}$.

DÉFINITION D.1.2. — *Un foncteur additif contravariant*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

est dit δ-exact (où $\delta = \pm 1$) si $FT_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{D}}^{-1}F$ et pour tout triangle exact de $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} T_{\mathcal{C}}A$$

le triangle

$$FC \xrightarrow{Fb} FB \xrightarrow{Fa} FA \xrightarrow{\delta T_{\mathcal{D}}Fc} T_{\mathcal{D}}FC$$

est exact dans $\mathcal{D}$.

DÉFINITION D.1.3. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée avec foncteur de translation T. Un foncteur contravariant δ-exact*

$$D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

muni d'un isomorphisme

$$\varpi : 1 \longrightarrow D^2$$

est une dualité sur $\mathcal{C}$ si $\varpi_{TA} = T\varpi_A$ et $D\varpi_A \circ \varpi_{DA} = id_{DA}$ pour tout A dans $\mathcal{C}$. On note $(\mathcal{C}, D, \delta, \varpi)$ une telle catégorie, ou parfois simplement $(\mathcal{C}, D)$.

REMARQUE D.1.4. — Il est facile de voir que si $(\mathcal{C}, D, \delta, \varpi)$ est une catégorie triangulée avec dualité, alors $(\mathcal{C}, T \circ D, -\delta, \varpi)$ en est également une.

DÉFINITION D.1.5. — *Soit A un objet de $\mathcal{C}$ et $\phi : A \to DA$ un isomorphisme. Le couple (A, ϕ) est appelé paire symétrique si le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varpi_A"'] & DA \arrow[d, equal] \\ D^2A \arrow[r, "D\phi"'] & DA. \end{tikzcd}$$

DÉFINITION D.1.6. — *Soient (A, ϕ) et (B, ψ) deux paires symétriques. Un isomorphisme $f : A \to B$ est une isométrie si le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & DA \\ B \arrow[r, "\psi"'] & DB. \arrow[u, "Df"'] \end{tikzcd}$$

DÉFINITION D.1.7. — *Soient (A, ϕ) et (B, ψ) deux paires symétriques. La paire symétrique $(A \oplus B, \phi \oplus \psi)$ est notée $(A, \phi) \perp (B, \psi)$.*

DÉFINITION D.1.8. — *On note $MW(\mathcal{C}, D, \delta, \varpi)$ le monoïde abélien des classes d'isométries de paires symétriques (A, ϕ) avec opération $\perp$.*

DÉFINITION D.1.9. — *Soit (A, ϕ) une paire symétrique. Un objet L de $\mathcal{C}$ est un Lagrangien de (A, ϕ) s'il existe un morphisme $\eta : L \to T^{-1}DL$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\varpi_L"'] & T^{-1}DL \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi"'] & TL \arrow[d, "T\varpi_L"] \\ D^2L \arrow[r, "\delta T^{-1}D\eta"'] & T^{-1}DL \arrow[r, "D\beta"'] & DA \arrow[r, "D\alpha"'] & TD^2L, \end{tikzcd}$$

où la seconde ligne est obtenue en dualisant la première, puis en décalant le triangle à gauche et en appliquant finalement T^{-1}. Une paire symétrique (A,ϕ) possédant un Lagrangien est dite neutre.

Définition D.1.10. — *Soit $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ une catégorie triangulée avec dualité. Soit $NW(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ le sous-monoïde de $MW(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ engendré par les paires symétriques neutres. Le quotient $MW(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)/NW(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ est un groupe, appelé groupe de Witt de la catégorie $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$. On le note $W(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$.*

Définition D.1.11. — *Soit $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ une catégorie triangulée avec dualité. On note $W^n(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ le groupe de Witt $W(\mathcal{C},T^n\circ D,(-1)^n\delta,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\delta^n\varpi)$.*

Définition D.1.12. — *Soient $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ et $(\mathcal{C}',D',\delta',\varpi')$ deux catégories triangulées avec dualités. Un foncteur exact covariant*

$$F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$$

préserve les dualités s'il existe un isomorphisme

$$\eta:FD\longrightarrow D'F$$

tel que

(i) *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\varpi"] \arrow[d, "\varpi'"'] & FD^2 \arrow[d, "\eta D"] \\ (D')^2F \arrow[r, "D'\eta"'] & D'FD \end{tikzcd}$$

(ii) $T_{\mathcal{C}'}^{-1}\eta_X=(\delta\delta')\eta_{T_{\mathcal{C}}X}$ *pour tout objet X de $\mathcal{C}$.*

Proposition D.1.13. — *Soient $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ et $(\mathcal{C}',D',\delta',\varpi')$ deux catégories triangulées avec dualités et*

$$F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$$

un foncteur préservant les dualités. Alors F induit un homomorphisme de groupes

$$F:W(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)\longrightarrow W(\mathcal{C}',D',\delta',\varpi')$$

donné par $F(A,\phi)=(FA,\eta F\phi)$ pour toute paire symétrique (A,ϕ).

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Comme cas particulier de ce résultat, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire D.1.14. — *Soit $(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ une catégorie triangulée avec dualité. Alors*

$$T^2:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$$

induit des isomorphismes $W^n(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)\simeq W^{n+4}(\mathcal{C},D,\delta,\varpi)$ pour tout n.

Soit $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ une catégorie exacte avec dualité. On note $D^b(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée des complexes bornés d'objets de $\mathcal{A}$. La dualité $^\sharp$ induit une dualité 1-exacte $^\sharp$ sur $D^b(\mathcal{A})$ et l'isomorphisme naturel ϖ induit un isomorphisme naturel sur $D^b(\mathcal{A})$. On a :

THÉORÈME D.1.15. — *Soit $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$ une catégorie exacte avec dualité. Supposons que les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{A}$ soit un ensemble. Soit $(D^b(\mathcal{A}),^\sharp, 1, \varpi)$ la catégorie triangulée avec dualité dérivée de $(\mathcal{A},^\sharp, \varpi)$. Alors pour tout n il existe des isomorphismes*

$$W(\mathcal{A},^\sharp, \varpi) \simeq W^{4n}(D^b(\mathcal{A}),^\sharp, 1, \varpi)$$

et

$$W^-(\mathcal{A},^\sharp, \varpi) \simeq W^{4n+2}(D^b(\mathcal{A}),^\sharp, 1, \varpi).$$

Si de plus $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, alors $W^{2n+1}(D^b(\mathcal{A}),^\sharp, 1, \varpi) = 0$ pour tout n.

Démonstration. — Voir la proposition 5.2 de [**BW02**] et le théorème 4.3 de [**Bal01**]. □

D.2. La suite exacte de localisation

DÉFINITION D.2.1. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Une sous-catégorie épaisse $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie additive pleine telle que :*

(i) *pour tout objet A de $\mathcal{E}$, on a que TA est également dans $\mathcal{E}$;*
(ii) *pour tous objets A, B dans $\mathcal{E}$ et tout morphisme $f : A \to B$, le cône de f est aussi dans $\mathcal{E}$;*
(iii) *pour tous objets A, B, on a $A \oplus B \in Obj(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in Obj(\mathcal{E})$ et $B \in Obj(\mathcal{E})$;*
(iv) *si $A \in Obj(\mathcal{C})$ est isomorphe à $B \in Obj(\mathcal{E})$, alors A est dans $\mathcal{E}$.*

REMARQUE D.2.2. — Une sous-catégorie épaisse $\mathcal{E}$ d'une catégorie triangulée $\mathcal{C}$ est une catégorie triangulée.

Soit $\mathcal{E}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée $\mathcal{C}$ et S la classe des morphismes dont le cône est dans $\mathcal{E}$. Alors S est un système multiplicatif au sens de Ore et on obtient une catégorie triangulée $\mathcal{C}/\mathcal{E}$ en inversant tous les morphismes de S. On a un foncteur évident

$$q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{E}$$

donné par $q(A) = A$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$ et $q(f) = f$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$. Remarquons que tout objet de $\mathcal{E}$ devient isomorphe à 0 dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$. Si on note

$$i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$$

le foncteur d'inclusion, on a le diagramme suivant :

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{C} \xrightarrow{\ q\ } \mathcal{C}/\mathcal{E}.$$

Définition D.2.3. — *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ des catégories triangulées, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ des foncteurs exacts. Alors la suite*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$$

est une suite exacte de catégories triangulées s'il existe une catégorie triangulée $\mathcal{C}$, une sous-catégorie épaisse $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ et des équivalences de catégories α, β, γ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma"'] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "i"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "q"'] & \mathcal{C}/\mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

Si $(\mathcal{C}, D)$ est une catégorie triangulée avec dualité, on peut également définir la notion de sous-catégorie épaisse avec dualité :

Définition D.2.4. — *Soit $(\mathcal{C}, D)$ une catégorie triangulée avec dualité. Une sous-catégorie épaisse avec dualité $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie additive pleine telle que :*

(i) *pour tout objet A de $\mathcal{E}$, on a que TA est également dans $\mathcal{E}$;*
(ii) *pour tous objets A, B dans $\mathcal{E}$ et tout morphisme $f : A \to B$, le cône de f est aussi dans $\mathcal{E}$;*
(iii) *pour tous objets A, B, on a $A \oplus B \in Obj(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in Obj(\mathcal{E})$ et $B \in Obj(\mathcal{E})$;*
(iv) *si $A \in Obj(\mathcal{C})$ est isomorphe à $B \in Obj(\mathcal{E})$, alors A est dans $\mathcal{E}$;*
(v) *pour tout objet A de $\mathcal{E}$, DA est aussi dans $\mathcal{E}$.*

Remarque D.2.5. — Une sous-catégorie épaisse avec dualité $\mathcal{E}$ d'une catégorie triangulée $\mathcal{C}$ est une catégorie triangulée avec dualité.

Remarque D.2.6. — Soit $\mathcal{E}$ une sous-catégorie épaisse avec dualité d'une catégorie triangulée avec dualité $\mathcal{C}$. Alors les foncteurs

$$i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et

$$q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{E}$$

préservent les dualités. Ils induisent donc des homomorphismes au niveau des groupes de Witt.

Définition D.2.7. — *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ des catégories triangulées avec dualité, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ des foncteurs exacts préservant les dualités. Alors la suite*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$$

est une suite exacte de catégories triangulées avec dualités s'il existe une catégorie triangulée avec dualité $\mathcal{C}$, une sous-catégorie épaisse avec dualité $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ et des équivalences de catégories préservant les dualités α, β, γ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma"'] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "i"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "q"'] & \mathcal{C}/\mathcal{E}.
\end{tikzcd}$$

Soit

$$\mathcal{E} \xrightarrow[i]{} \mathcal{C} \xrightarrow[q]{} \mathcal{C}/\mathcal{E}$$

une suite exacte de catégories triangulées avec dualités. Notons $D_{\mathcal{E}}, D_{\mathcal{C}}$ et $D_{\mathcal{C}/\mathcal{E}}$ les dualités respectives de ces catégories triangulées. Soit $P \in Obj(\mathcal{C}/\mathcal{E})$ et

$$\phi : P \longrightarrow D_{\mathcal{C}/\mathcal{E}}P$$

un isomorphisme symétrique. On a alors :

Lemme D.2.8. — *Soit (P, ϕ) un isomorphisme symétrique dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$. Alors il existe un objet Q de $\mathcal{C}$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ (pas forcément un isomorphisme) symétrique*

$$\psi : Q \longrightarrow D_{\mathcal{C}}Q$$

tels que ψ soit un isomorphisme dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$ et les paires symétriques (P, ϕ) et (Q, ψ) soient isométriques dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$.

Démonstration. — Voir [**Bal99**, remarque 5.6, p. 16] □

Soit maintenant P un objet de $\mathcal{C}$ et

$$\phi : P \longrightarrow D_{\mathcal{C}}P$$

un morphisme symétrique dont le cône est dans $\mathcal{E}$. On considère un triangle exact contenant ϕ :

$$P \xrightarrow{\phi} D_{\mathcal{C}}P \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} TP.$$

Rappelons que $D_{\mathcal{C}}$ est δ-exacte avec $\delta = \pm 1$. Dualisant ce triangle, puis décalant un cran à gauche, on obtient

$$D_{\mathcal{C}}^2 P \xrightarrow{D_{\mathcal{C}}\phi} D_{\mathcal{C}}P \xrightarrow{TD_{\mathcal{C}}\beta} TD_{\mathcal{C}}R \xrightarrow{-\delta TD_{\mathcal{C}}\alpha} TD_{\mathcal{C}}.$$

Par l'axiome (TR3), il existe $\psi : R \to TD_{\mathcal{C}}R$ tel que le diagramme ci-dessous se referme

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varpi_P"'] & D_{\mathcal{C}}P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\exists\psi"'] & TP \arrow[d, "T\varpi_P"] \\
D^2_{\mathcal{C}}P \arrow[r, "D_{\mathcal{C}}\phi"'] & D_{\mathcal{C}}P \arrow[r, "TD_{\mathcal{C}}\beta"'] & TD_{\mathcal{C}}R \arrow[r, "-\delta TD_{\mathcal{C}}\alpha"'] & TD_{\mathcal{C}}.
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que ψ est un isomorphisme et peut être choisi symétrique pour la dualité $TD_{\mathcal{C}}$ munie de l'isomorphisme naturel $\delta\varpi$. Comme R est un objet de $\mathcal{E}$ et que la dualité $D_{\mathcal{C}}$ induit la dualité $D_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$, on a un diagramme dans $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta\varpi_R"'] & TD_{\mathcal{E}}R \arrow[d, equal] \\
D^2_{\mathcal{E}}R \arrow[r, "TD_{\mathcal{E}}\psi"'] & TD_{\mathcal{E}}R.
\end{tikzcd}$$

On peut ainsi associer à tout morphisme symétrique $\phi : P \to D_{\mathcal{C}}P$ dont le cône est dans $\mathcal{E}$ une paire symétrique (R, ψ) pour la dualité $TD_{\mathcal{E}}$ accompagnée de l'isomorphisme naturel $\delta\varpi$. La paire symétrique est par construction une paire symétrique dans $\mathcal{E}$. On a le lemme suivant :

Lemme D.2.9. — *Soit $\phi : P \to D_{\mathcal{C}}P$ un morphisme symétrique dont le cône est dans $\mathcal{E}$. Alors la paire symétrique (R, ψ) est unique à isométrie près,* i.e. *la classe d'isométrie de (R, ψ) ne dépend ni du choix du cône de ϕ ni du choix de ψ.*

Démonstration. — Voir [**Bal00**, théorème 1.6, p. 7]. □

Définition D.2.10. — *Soit P un objet de $\mathcal{C}$ et $\phi : P \to D_{\mathcal{C}}P$ un morphisme symétrique. Alors la paire symétrique (R, ψ) obtenue ci-dessus est appelée cône de (P, ϕ). Ce cône est unique à isométrie près.*

Soit

$$\mathcal{E} \xrightarrow[i]{} \mathcal{C} \xrightarrow[q]{} \mathcal{C}/\mathcal{E}$$

une suite exacte de catégories triangulées avec dualités. Les foncteurs q et i induisent des homomorphismes de groupes pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$W^n(\mathcal{E}, D_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{i} W^n(\mathcal{C}, D_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{q} W^n(\mathcal{C}/\mathcal{E}, D_{\mathcal{C}/\mathcal{E}})$$

Si (P, ϕ) est une paire symétrique dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$ pour la dualité $T^n D_{\mathcal{C}/\mathcal{E}}$, le lemme D.2.8 montre qu'il existe un objet Q et un morphisme symétrique

$$\eta : Q \longrightarrow T^n D_{\mathcal{C}} Q$$

tels que les paires (P, ϕ) et (Q, η) soient isométriques dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$. Le cône de (Q, η) est une paire symétrique (R, ψ). On peut démontrer que la classe de (R, ψ) dans

$W^{n+1}(\mathcal{E}, D_{\mathcal{E}})$ ne dépend pas du choix de l'objet Q et du morphisme η (voir [**Bal00**, théorème 4.8, p. 30]). On obtient ainsi pour toute paire symétrique (P, ϕ) dans $\mathcal{C}/\mathcal{E}$ une classe (R, ψ) bien définie dans $W^{n+1}(\mathcal{E}, D_{\mathcal{E}})$. Cette construction permet de définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ un homomorphisme

$$\partial : W^n(\mathcal{D}, D_{\mathcal{D}}) \longrightarrow W^{n+1}(\mathcal{A}, D_{\mathcal{A}})$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

Théorème D.2.11. — *Soit*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$$

une suite exacte de catégories triangulées avec dualités. Alors les homomorphismes

$$\partial : W^n(\mathcal{D}, D_{\mathcal{D}}) \longrightarrow W^{n+1}(\mathcal{A}, D_{\mathcal{A}})$$

donnent une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow W^n(\mathcal{A}, D_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{F} W^n(\mathcal{B}, D_{\mathcal{B}}) \xrightarrow{G} W^n(\mathcal{D}, D_{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} W^{n+1}(\mathcal{A}, D_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{F} W^{n+1}(\mathcal{B}, D_{\mathcal{B}}) \xrightarrow{G} \ldots$$

Démonstration. — Voir [**Bal00**, théorème 5.2]. □

La suite exacte longue du théorème ci-dessus est fonctorielle dans la sens suivant :

Proposition D.2.12. — *Soient*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$$

et

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{F'} \mathcal{B}' \xrightarrow{G'} \mathcal{D}'$$

deux suites exactes de catégories triangulées avec dualités. Soient α, β, γ des foncteurs exacts préservant la dualité tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma"'] \\
\mathcal{A}' \arrow[r, "F'"'] & \mathcal{B}' \arrow[r, "G'"'] & \mathcal{D}'.
\end{tikzcd}$$

Alors les homomorphismes de groupes de Witt α, β, γ induisent un morphisme de suites exactes longues.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

APPENDICE E

REMARQUES SUR LES GROUPES DE WITT D'UN CORPS

E.1. Le groupe de Witt $W(k, L)$

Soit k un corps et L un k-espace vectoriel de rang 1. Alors $\mathrm{Hom}_k(\_, L)$, muni de l'isomorphisme canonique habituel, est une dualité sur $\mathcal{M}_{tf}(k)$. On note $W(k, L)$ le groupe de Witt de k pour cette dualité. Pour tout choix d'un générateur l de L, on obtient un isomorphisme

$$\omega_l : W(k) \longrightarrow W(k, L)$$

Définition E.1.1. — *On définit $I^n(k, L)$ comme étant le groupe $\omega_l(I^n(k))$. On l'appelle le n-ième idéal fondamental de $W(k, L)$.*

Lemme E.1.2. — *Le groupe $I^n(k, L)$ ne dépend pas de l'isomorphisme ω_l.*

Démonstration. — Soient l et l' deux générateurs de L. Supposons que $l = \alpha l'$ pour un $\alpha \in k^*$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} W(k) \arrow[r, "\omega_l"] \arrow[d, "\cdot <\alpha>"'] & W(k, L) \\ W(k) \arrow[ur, "\omega_{l'}"'] & \end{tikzcd}$$

La multiplication par $< \alpha >$ est un isomorphisme de $W(k)$-modules. Donc

$$\omega_l(I^n(k)) = \omega_{l'}(I^n(k)). \quad \square$$

Lemme E.1.3. — *Les groupes $I^n(k, L)/I^{n+1}(k, L)$ et $I^n(k)/I^{n+1}(k)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} I^n(k)/I^{n+1}(k) \arrow[r, "\omega_l"] \arrow[d, "\cdot < \alpha >"'] & I^n(k,L)/I^{n+1}(k,L) \\ I^n(k)/I^{n+1}(k) \arrow[ur, "\omega_{l'}"'] & \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de remarquer que la multiplication par $< \alpha >$ est triviale. Soit

$$< 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n > \in I^n(k)/I^{n+1}(k).$$

On a

$$< 1, -\alpha > \otimes < 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n > \equiv 0 \pmod{I^{n+1}(k)}$$

donc

$$< 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n > \equiv < \alpha > \otimes < 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n > .$$

□

E.2. Le groupe de Witt $W(k, \mathrm{Ext}^n_A(k,A))$

Soit A un anneau de dimension n régulier local d'idéal maximal x et de corps résiduel k. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie et

$$\varphi : V \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(k,A)$$

un homomorphisme. On obtient un homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^n_A(\varphi, A) : \mathrm{Ext}^n_A(\mathrm{Ext}^n_A(k,A), A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(V,A).$$

En composant avec l'isomorphisme canonique $\varpi : k \to \mathrm{Ext}^n_A(\mathrm{Ext}^n_A(k,A),A)$, on a un homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^n_A(\varphi, A) \circ \varpi : k \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(V,A).$$

On obtient donc pour tout V un isomorphisme canonique

$$\mu_V : \mathrm{Hom}_k(V, \mathrm{Ext}^n_A(k,A)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(V,A)$$

donné par $\mu_V(\varphi) = \mathrm{Ext}^n_A(\varphi, A) \circ \varpi(1)$.

Proposition E.2.1. — *L'isomorphisme de foncteurs μ induit un isomorphisme*

$$\nu : W(k, \mathrm{Ext}^n_A(k,A)) \longrightarrow W^{lf}(A)$$

donné par

$$\nu([V,\phi]) = [V, \mu_V \phi].$$

Démonstration. — Le fait que μ induit un homomorphisme est laissé en exercice. Le théorème 6.10 de [**QSS79**] montre que μ est un isomorphisme. □

BIBLIOGRAPHIE

[Bal99] P. Balmer – « Derived Witt groups of a scheme », *J. Pure Appl. Algebra* **141** (1999), no. 2, p. 101–129.

[Bal00] ______, « Triangular Witt groups. I. The 12-term localization exact sequence », *K-Theory* **19** (2000), no. 4, p. 311–363.

[Bal01] ______, « Triangular Witt groups. II. From usual to derived », *Math. Z.* **236** (2001), no. 2, p. 351–382.

[Bal05] ______, « Products of degenerate quadratic forms », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 6, p. 1374–1404.

[BG05] P. Balmer & S. Gille – « Koszul complexes and symmetric forms over the punctured affine space », *Proc. London Math. Soc. (3)* **91** (2005), no. 2, p. 273–299.

[BH93] W. Bruns & J. Herzog – *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[BM00] J. Barge & F. Morel – « Groupe de Chow des cycles orientés et classe d'Euler des fibrés vectoriels », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.* **330** (2000), no. 4, p. 287–290.

[BO87] J. Barge & M. Ojanguren – « Fibrés algébriques sur une surface réelle », *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), no. 4, p. 616–629.

[Bou80] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1980, chapitre 10 : Algèbre homologique.

[BS98] S. M. Bhatwadekar & R. Sridharan – « Projective generation of curves in polynomial extensions of an affine domain and a question of Nori », *Invent. Math.* **133** (1998), no. 1, p. 161–192.

[BS99] ______, « Zero cycles and the Euler class groups of smooth real affine varieties », *Invent. Math.* **136** (1999), no. 2, p. 287–322.

[BS00] ______, « The Euler class group of a Noetherian ring », *Compositio Math.* **122** (2000), no. 2, p. 183–222.

[BW02] P. Balmer & C. Walter – « A Gersten-Witt spectral sequence for regular schemes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), no. 1, p. 127–152.

[Fas07] J. Fasel – « The Chow-Witt ring », *Doc. Math.* **12** (2007), p. 275–312.

[Ful84] W. Fulton – *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gil02] S. Gille – « On Witt groups with support », *Math. Ann.* **322** (2002), no. 1, p. 103–137.

[Gil03] ______, « A transfer morphism for Witt groups », *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), p. 215–233.

[Gil07a] ______, « The general dévissage theorem for Witt groups of schemes », *Arch. Math. (Basel)* **88** (2007), no. 4, p. 333–343.

[Gil07b] ______, « A graded Gersten-Witt complex for schemes with a dualizing complex and the Chow group », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 2, p. 391–419.

[Gro67a] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique (EGA) II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **32** (1967).

[Gro67b] ______, « Éléments de géométrie algébrique (EGA) III », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **32** (1967).

[Gro67c] ______, « Éléments de géométrie algébrique (EGA) IV », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **32** (1967).

[Har66] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Lecture Notes, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Har77] ______, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Kne76] M. Knebusch – « On algebraic curves over real closed fields. I », *Math. Z.* **150** (1976), no. 1, p. 49–70.

[Kun86] E. Kunz – *Kähler differentials*, Adv. Lectures Math., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.

[Mag02] B. A. Magurn – *An algebraic introduction to K-theory*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 87, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Mat86] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[MH73] J. Milnor & D. Husemoller – *Symmetric bilinear forms*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 73, Springer-Verlag, New York, 1973.

[Mil70] J. Milnor – « Algebraic K-theory and quadratic forms », *Invent. Math.* **9** (1969/1970), p. 318–344.

[Mor04] F. Morel – « Motives and homotopy theory of schemes », *Oberwolfach Rep.* **1** (2004), no. 2, p. 785–827, preprint available at `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~morel/preprint.html`.

[Mur94] M. P. Murthy – « Zero cycles and projective modules », *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), no. 2, p. 405–434.

[Mur99] ______, « A survey of obstruction theory for projective modules of top rank », Contemp. Math., vol. 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 153–174.

[Plu83] B. Plumstead – « The conjectures of Eisenbud and Evans », *Amer. J. Math.* **105** (1983), no. 6, p. 1417–1433.

[QSS79] H.-G. Quebbemann, W. Scharlau & M. Schulte – « Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories », *J. Algebra* **59** (1979), no. 2, p. 264–289.

[Ros96] M. Rost – « Chow groups with coefficients », *Doc. Math.* **1** (1996), p. 319–393.

[Sch85] W. Scharlau – *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Sch97] M. Schmid – « Wittringhomologie », Thèse, 1997.

[Ser68] J.-P. Serre – *Corps locaux*, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, vol. 8, Hermann, Paris, 1968.

[Swa74] R. G. Swan – « A cancellation theorem for projective modules in the metastable range », *Invent. Math.* **27** (1974), p. 23–43.

[Voe03] V. Voevodsky – « Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 98, p. 59–104.

[Wei94] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.