

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 116
Nouvelle série

**FAISCEAUX PERVERS DES
CYCLES ÉVANESCENTS DES
VARIÉTÉS DE DRINFELD ET
GROUPES DE COHOMOLOGIE
DU MODÈLE DE DELIGNE-CARAYOL**

2 0 0 9

Pascal BOYER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE	Charles FAVRE
Emmanuel BREUILLARD	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhem SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 38 € (\$57)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € (\$435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2009

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X
ISBN 978-2-85629-272-3

Directrice de la publication : Aline BONAMI

**FAISCEAUX PERVERS DES CYCLES
ÉVANESCENTS DES VARIÉTÉS DE
DRINFELD ET GROUPE DE
COHOMOLOGIE DU MODÈLE DE
DELIGNE-CARAYOL**

Pascal Boyer

Société Mathématique de France 2009

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Pascal Boyer

E-mail : boyer@math.jussieu.fr

Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Université Paris 6,
175 rue du Chevaleret 75013 Paris.

Url : <http://www.institut.math.jussieu.fr/~boyer/>

Classification mathématique par sujets (2000). – 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots-clefs. – Variétés de Drinfeld, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids, variété de Shimura.

FAISCEAUX PERVERS DES CYCLES ÉVANESCENTS DES VARIÉTÉS DE DRINFELD ET GROUPES DE COHOMOLOGIE DU MODÈLE DE DELIGNE-CARAYOL

Pascal Boyer

Résumé. – Dans la première moitié du livre, on traduit, dans la situation géométrique des variétés de Drinfeld, c'est-à-dire le cas des corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, les principaux résultats du livre de Michael Harris et Richard Taylor [16] concernant certaines variétés de Shimura définies sur des corps de nombres. On explicite notamment la restriction aux strates ouvertes des faisceaux des cycles évanescents en fonction de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor dont on calcule la somme alternée des groupes de cohomologie à supports compacts. Dans la deuxième moitié du livre, on décrit les gradués de la filtration de monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents ainsi que la suite spectrale correspondante. D'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on obtient alors une description de la filtration de monodromie-locale du modèle de Deligne-Carayol.

Abstract (Perverse sheaf of vanishing cycles of Drinfeld varieties and cohomology group of Deligne-Carayol model)

In the first half of the book, we translate in the geometric situation of Drinfeld varieties, that is the case of a function field of one variable over a finite field, the principal results of the book of Michael Harris and Richard Taylor [16] which treats about some Shimura varieties over number fields. We give in particular the restriction to the open strata of the vanishing cycles sheaves in terms of some local systems named Harris-Taylor's local systems which we calculate the alternated sum of the cohomology group with compact supports. In the last half of the book, we describe the monodromy filtration of the vanishing cycles perverse sheaf and the spectral sequence associated to it. Thanks to the Berkovich-Fargues' theorem, we obtain the description of the local monodromy filtration of the Deligne-Carayol model.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Variétés d'Igusa, systèmes locaux de Harris-Taylor et cycles évanescents des variétés de Drinfeld	7
Introduction	7
I.1. Modules formels et variétés de Drinfeld : rappels	10
I.1.1. Rappels sur les déformations des \mathcal{O}_o -modules formels	10
I.1.2. \mathcal{D} -faisceaux elliptiques et structures de niveau	12
I.1.3. Schémas de modules et correspondances de Hecke	15
I.1.4. Structures de niveau à l'infini	16
I.1.5. Stratification de la fibre spéciale	19
I.1.6. Théorème de Serre-Tate et conséquences	21
I.2. Compléments sur la géométrie des strates	24
I.2.1. Scindage en partie étale et connexe des \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné ..	24
I.2.2. Retour sur les structures de niveaux	28
I.2.3. Relation de congruence	31
I.3. Variétés d'Igusa de première espèce	32
I.3.1. Définition	32
I.3.2. Expression du complété formel de $M_{I,o}$ le long d'une strate	35
I.3.3. Correspondances de Hecke	36
I.4. Variétés d'Igusa de seconde espèce	39
I.4.1. Définition	39
I.4.2. Correspondances de Hecke sur $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\neq h}(s)$	41
I.4.3. Complétés formels	42
I.5. Cycles évanescents et systèmes locaux de Harris-Taylor	50
I.5.1. Rappels sur les cycles évanescents associés à $\text{Def}_{d,n}$	50
I.5.2. Restriction aux strates ouvertes et variétés d'Igusa	51
I.5.3. Systèmes locaux de Harris-Taylor	56
I.6. Équations formelles des variétés d'Igusa de seconde espèce	60
II. Groupes de cohomologie du modèle local : cas Iwahori	63
Introduction	63
II.1. Rappels sur les représentations de $\text{GL}_d(F_o)$	64
II.1.1. Induites paraboliques	64

II.1.2. Foncteur de Jacquet	67
II.2. Preuve du cas Iwahori	68
III. Description de la somme alternée des groupes de cohomologie ...	79
Introduction	79
III.1. des systèmes locaux de Harris-Taylor	80
III.1.1. Description adélique de $M_{I, \bar{s}_o}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	80
III.1.2. Description adélique de $\widehat{M}_{I, -\bar{s}_o}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	84
III.1.3. Comptage des points fixes	86
III.1.4. Intégrales orbitales	88
III.1.5. Formule des traces de Lefschetz	91
III.1.6. Transfert des intégrales orbitales	94
III.1.7. Formule des traces de Selberg	97
III.2. du modèle local	98
III.2.1. Preuve par récurrence	98
III.2.2. Retour sur le cas Iwahori	101
IV. Filtration de monodromie des cycles évanescents	103
Introduction	103
IV.1. Rappels des données géométriques	106
IV.1.1. Le modèle local de Deligne-Carayol	106
IV.1.2. Les variétés globales et les systèmes locaux de Harris-Taylor	107
IV.2. Rappels des propriétés cohomologiques	109
IV.2.1. Sur le modèle local	110
IV.2.2. Sur les systèmes locaux de Harris-Taylor	111
IV.3. Énoncés des théorèmes globaux	113
IV.4. Corollaires locaux	117
IV.5. Principe de la preuve : par récurrence sur le modèle local	119
IV.6. Reconstruction hors des points supersinguliers	119
IV.6.1. Image dans \mathfrak{G} de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$	119
IV.6.2. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$	120
IV.6.3. Constituants simples des $j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$	124
IV.7. Étude aux points supersinguliers	125
IV.7.1. Calculs de groupes de cohomologie	125
IV.7.2. Application aux constituants ponctuels des $j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$	127
IV.8. Étude de la suite spectrale des cycles évanescents	129
IV.8.1. Cas où $\Pi_o \simeq \text{St}_s(\pi_o)$	129
IV.8.2. Cas où $\Pi_o \simeq \text{Speh}_s(\pi_o)$	133
IV.8.3. Parties de poids minimal de la cohomologie locale	137
IV.9. Preuve des théorèmes globaux	140
IV.9.1. Faisceaux de cohomologie aux points supersinguliers des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$..	140
IV.9.2. Description de la suite spectrale de monodromie de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$	141

V. Compléments sur la cohomologie globale et applications	143
Introduction	143
V.1. Calculs de foncteur de Jacquet	144
V.2. Composantes locales des représentations automorphes	146
V.3. Correspondances de Jacquet-Langlands globales	150
V.4. Groupes de cohomologie des variétés de Drinfeld	152
V.5. Irréductibilité des variétés d'Igusa	153
V.6. Semi-simplicité de la cohomologie sous l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$	157
VI. Figures	161
Bibliographie	165

INTRODUCTION

0.1. — Soient d un entier strictement positif et K un corps local complet d'égalité caractéristique p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K . On considère le groupe $D_{K,d}^\times$ (resp. W_K) des éléments inversibles de "l'algèbre" à division centrale sur K d'invariant $1/d$ (resp. le groupe de Weil de K). Pour un nombre premier $\ell \neq p$, Langlands (resp. Jacquet-Langlands) a (resp. ont) conjecturé l'existence d'une bijection \mathcal{L} (resp. d'une injection JL) entre les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_d(K)$ et les représentations ℓ -adiques Frobenius semi-simples de W_K (resp. entre les représentations admissibles irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et les représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_d(K)$) qui sont compatibles à la formation des fonctions L et facteurs ϵ de paires; on renvoie à [19] pour des énoncés précis.

Deligne a alors construit, à l'aide de la cohomologie étale, une série de représentations $\mathcal{U}_{K\ell,d}^i$ du produit de ces trois groupes. Pour $d = 2$ et pour ρ une représentation irréductible de $D_{K,2}^\times$ telle que $\pi := \mathrm{JL}(\rho)$ soit une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(K)$, Carayol [9] montre que la composante ρ -isotypique $\mathcal{U}_{K\ell,2}^1(\rho)$ de $\mathcal{U}_{K\ell,2}^1$ réalise les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands, i.e.

$$\mathcal{U}_{K\ell,2}^1(\mathrm{JL}^{-1}(\pi^\vee)) \simeq \pi \otimes \mathcal{L}(\pi)\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Le cas d quelconque est traité dans [5]. En fait pour $d = 2$, Carayol traite toutes les représentations.

Le but premier de ce travail est de faire de même pour d quelconque, i.e. calculer complètement les $\mathcal{U}_{K\ell,d}^i(\rho)$ pour ρ une représentation irréductible quelconque de $D_{K,d}^\times$. Dans le cas où ρ est la représentation triviale, le résultat se formule comme suit.

Théorème. — *Pour $0 \leq i \leq d - 1$, on a*

$$\mathcal{U}_{K\ell,d}^i(1_K) = \pi_i \otimes 1_K(-i)$$

où π_i est l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique

$$\mathrm{Ind}_{P_{d-i,d}(K)}^{\mathrm{GL}_d(K)} 1_K \otimes \mathrm{St}_i$$

où $P_{d-i,d}$ est le parabolique standard associée aux $d - i$ premiers vecteurs et St_i est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_i(K)$.

L'énoncé du cas général, théorème IV.4.0.17, s'énonce de manière similaire et fait intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands. En particulier dans le cas Iwahori, via l'isomorphisme de Faltings, cf. [12], on retrouve le résultat principal de [25].

0.2. — La preuve est de nature globale via l'étude des variétés dites de Drinfeld-Stuhler et repose sur le théorème de comparaison de Berkovich des cycles évanescents locaux et globaux, ou plutôt sur une version raffinée donnée par Fargues [13]. Ainsi le deuxième résultat de ce texte est la description explicite du complexe des cycles évanescents des variétés de Drinfeld-Stuhler ainsi que de sa filtration de monodromie-poids et de la suite spectrale associée.

Par ailleurs les techniques s'appliquent dans le cadre de la caractéristique mixte pour les variétés de Shimura associées à certains groupes unitaires étudiées dans [16]; on notera en particulier que l'on peut ainsi prouver les conjectures de monodromie-poids versions faisceautique et cohomologique, cf. [5] et [4].

0.3. — Soit X une courbe projective lisse, irréductible et géométriquement connexe définie sur "le" corps fini \mathbb{F}_q à $q = p^r$ éléments, et soit F son corps des fonctions. On fixe deux places distinctes ∞ et o de X que l'on peut supposer par simplification, rationnelles sur \mathbb{F}_q de sorte que le complété F_o du localisé de F en o est le corps local précédemment noté K . On note A l'anneau des fonctions sur X , régulières en dehors de ∞ . Étant donné un entier $d \geq 1$, on fixe une algèbre à division centrale D sur F de dimension d^2 , non ramifiée en ∞ et o , ainsi qu'un ordre maximal \mathcal{O} . Dans [24], les auteurs construisent pour un idéal non trivial I de A , un schéma M_I défini sur F , classifiant les \mathcal{O} -faisceaux elliptiques sur X , munis d'une structure de niveau I . Pour $o \notin V(I)$, M_I a un modèle entier $M_{I,o}$ lisse sur le complété $\hat{\mathcal{O}}_o$ de A en la place o . Un tel modèle non lisse dans le cas où $o \in V(I)$ est construit dans [3]. Lorsque I varie, les schémas $M_{I,o}$ sont naturellement munis d'une action, par correspondances, de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$.

0.4. — On s'intéresse alors à la fibre spéciale M_{I,s_o} de $M_{I,o}$. Dans [3], on stratifie M_{I,s_o} par des sous-schémas localement fermés $M_{I,s_o}^=h$ pour $1 \leq h \leq d$, de pure dimension $d - h$ tels que l'on ait un équivalent du théorème de Serre-Tate pour les \mathcal{O} -faisceaux elliptiques à savoir: le complété de l'ensémlé strict de l'anneau local de $M_{I,o}$ en un point géométrique de $M_{I,s_o}^=h$ est isomorphe à $\text{Def}_n^h[[x_1, \dots, x_{d-h}]]$ où n est la multiplicité de o dans I et Def_n^h représente le foncteur des déformations de niveau n d'un $\hat{\mathcal{O}}_o$ -module formel de hauteur h sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, cf. [11].

Par ailleurs pour $1 \leq h < d$, il existe un sous-schéma fermé $M_{I,s_o,1}^=h$ de $M_{I,s_o}^=h$ stable sous les correspondances associées aux éléments du sous-groupe parabolique $P_{h,d}^{op}(F_o)$

de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ (cf. la définition II.1.1.1) et tel que

$$M_{I,s_o}^{\overline{h}} = M_{I,s_o,1}^{\overline{h}} \times_{P_{h,d}^{\circ p}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)} \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où n est la multiplicité de o dans I : on dit que les strates non supersingulières sont géométriquement induites.

0.5. — Dans le premier chapitre, en suivant [16], on étudie la restriction aux strates $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$ des faisceaux des cycles évanescents $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Pour cela on introduit selon *loc. cit.* les variétés d'Igusa de première et seconde espèce. Notons \mathcal{M}_o l'idéal maximal associé à la place o ; on écrit $I = I^o\mathcal{M}_o^n$ avec $I_o \not\subset \mathcal{M}_o$. Les premières sont des revêtements galoisiens de $M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$ de groupe de Galois $\mathrm{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$, définies par la donnée d'une structure de niveau \mathcal{M}_o^n sur la partie étale des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques de $M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$: on dispose alors d'un morphisme radiciel de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$ vers $M_{I^o,s_o,1}^{\overline{h}}$. Les variétés d'Igusa de seconde espèce sont des revêtements galoisiens $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$ de groupe de Galois $(\mathcal{D}_{o,h}/(\Pi_{o,h}^s))^\times$ où $\mathcal{D}_{o,h}$ est l'ordre maximal de l'algèbre à division $D_{o,h}$ centrale sur F_o d'invariant $1/h$, avec $\Pi_{o,h}$ une uniformisante: elles sont définies via une rigidification modulo $\Pi_{o,h}^s$ de la partie connexe des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$.

On dispose alors pour toute représentation τ_o irréductible et lisse de $D_{o,h}^\times$, d'un système local \mathcal{F}_{τ_o} dit de Harris-Taylor, sur $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$. Suivant [16], la restriction à $M_{I,s_o,1}^{\overline{h}}$ des faisceaux des cycles évanescents s'exprime alors en termes des systèmes locaux de Harris-Taylor et des faisceaux des cycles évanescents du modèle local.

0.6. — Au deuxième chapitre on prouve le cas Iwahori du théorème local. On commence par des rappels sur les représentations elliptiques de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ qui nous seront utiles au quatrième chapitre. On raisonne ensuite par récurrence en supposant connu le cas Iwahori du théorème local en hauteur strictement inférieure à d . À partir de cette hypothèse de récurrence, en utilisant le fait que les strates non supersingulières sont induites, le résultat découle de l'étude "combinatoire" de la suite spectrale des cycles évanescents.

0.7. — Au troisième chapitre, en suivant [24], il s'agit de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor. La démarche est classique: il s'agit tout d'abord d'utiliser la formule des traces de Lefschetz-Fujiwara et donc de compter les points fixes sous l'action d'une correspondance de Hecke tordue par une puissance assez grande du Frobenius et ensuite de transférer les intégrales orbitales obtenues afin de reconnaître le côté géométrique de la formule des traces de Selberg. On en déduit alors un calcul de la somme alternée des groupes de cohomologie du modèle local de Deligne-Carayol analogue du théorème VII.1.5 de [16]. En particulier, dans le cas Iwahori, des arguments de pureté nous redonnent les résultats obtenus à la fin du chapitre précédent. Pour ce qui est du cas général, le théorème local correspond à dire qu'il n'y a pas d'annulation dans la représentation

virtuelle $\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o)]$ où $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^{d-i}(\tau_o)$, pour $1 \leq i \leq d$, est donné par le i -ième terme de plus haut poids.

0.8. — Dans le quatrième chapitre on étudie la filtration de monodromie du faisceau pervers $R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d-1]$ dont on notera gr_k^M les gradués, ainsi que la fibre en un point supersingulier des termes $E_r^{i,j}$ de la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} \mathrm{gr}_{-i}^M \implies R^{i+j+d-1} \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

On décrit tout d'abord les gr_k^M dans la catégorie des faisceaux pervers sur la tour des $(M_{I, s_o})_I$ munis d'une action par correspondances de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \times W_o$, en fonction des extension intermédiaires $j_{t*}^{\geq tg} \mathcal{G}_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi_o))}[d-tg]$ des systèmes locaux de Harris-Taylor, où $j^{\geq tg}$ désigne l'injection de la strate $M_{I, s_o}^{\geq tg}$ et π_o est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$ avec $1 \leq t \leq d/g$. On calcule ensuite les faisceaux de cohomologie de ces derniers ce qui, d'après le théorème de comparaison de Berkovich, implique le théorème local ou en utilisant [13], la filtration de monodromie-locale du modèle de Deligne-Carayol.

0.9. — Dans le dernier chapitre on calcule les groupes de cohomologie des extensions intermédiaires ou par zéro des systèmes locaux de Harris-Taylor. En application on obtient:

▷ une description des composantes locales des représentations automorphes de $D_{\mathbb{A}}^\times$, on retrouve ainsi les résultats de Mœglin-Waldspurger sur les composantes locales des carrés intégrables de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ via une correspondance de Jacquet-Langlands globale;

▷ une correspondances de Jacquet-Langlands entre certaines algèbres à divisions globales;

▷ un énoncé d'irréductibilité des variétés d'Igusa;

▷ la semi-simplicité des groupes de cohomologies relativement à l'action de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$.

Les chapitres I et III sont essentiellement une traduction en égales caractéristiques des résultats de [16]. Le chapitre II n'est pas utile mais il nous a semblé agréable de présenter une preuve du cas Iwahori qui n'utilise pas toute la machinerie. Pour les lecteurs intéressés par les résultats du chapitre IV, nous avons fait en sorte que celui-ci soit lisible indépendamment des deux premiers, sauf pour ce qui est des rappels de [28] donnés § II.1.

La plupart de nos énoncés portent sur des égalités dans divers groupes de Grothendieck; la semi-simplicité de l'action de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ est traitée § V.6 quant à l'action du groupe de Weil local W_o nous ne considérons que les Frobenius semi-simplifications. Cette dernière précision est inutile dans les résultats locaux car une représentation irréductible de caractère d'ordre fini est automatiquement Frobenius semi-simple, cf. [24, 15.2]; en ce qui concerne les résultats globaux on renvoie à la remarque V.6.2 qui explique d'où vient l'indétermination.

Remerciements. — Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Gérard Laumon pour son soutien constant tout au long de ces années. Merci à Laurent Fargues de m'avoir fourni une bonne notion de monodromie locale qui m'a permis de simplifier grandement les preuves ainsi qu'à Jean-François Dat pour ses nombreuses corrections et améliorations. Je n'oublie pas l'intérêt que Michael Harris a porté à mon travail: plusieurs de ses questions et remarques m'ont permis d'améliorer certains des résultats. Enfin merci à Thomas Hausberger de m'avoir signalé une erreur dans mes précédents travaux concernant l'action de GL_d , ainsi qu'au rapporteur pour ses nombreuses remarques.

CHAPITRE I

VARIÉTÉS D'IGUSA, SYSTÈMES LOCAUX DE HARRIS-TAYLOR ET CYCLES ÉVANESCENTS DES VARIÉTÉS DE DRINFELD

Introduction

0.1. — Rappelons la situation globale de [24]. Soit X une courbe projective lisse, irréductible et géométriquement connexe définie sur le corps fini à $q = p^r$ éléments, \mathbb{F}_q et soit F son corps des fonctions. On fixe deux places ∞, o distinctes de X que l'on peut supposer par simplification, rationnelles sur \mathbb{F}_q . On note A l'anneau des fonctions sur X , régulières en dehors de ∞ . Étant donné un entier $d \geq 1$, on fixe une algèbre à division centrale D sur F de dimension d^2 , non ramifiée en ∞ et o , ainsi qu'un ordre maximal \mathcal{O} .

Dans [24], les auteurs construisent pour un idéal non trivial I de A , un schéma M_I défini sur F , classifiant les \mathcal{O} -faisceaux elliptiques sur X , munis d'une structure de niveau I . Pour $o \notin V(I)$, M_I a un modèle entier $M_{I,o}$ lisse sur le complété \mathcal{O}_o de A en la place o . Dans [3], on construit un tel modèle non lisse dans le cas où $o \in V(I)$. Les schémas $M_{I,o}$ sont naturellement munis d'une action, par correspondances, de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$.

0.2. — Dans [3], la fibre spéciale M_{I,s_o} de $M_{I,o}$ est stratifiée par des sous-schémas localement fermés $M_{I,s_o}^=h$ pour $1 \leq h \leq d$, de pure dimension $d - h$ tels que l'on ait un équivalent du théorème de Serre-Tate pour les \mathcal{O} -faisceaux elliptiques à savoir: le complété de l'hensélisé strict de l'anneau local de $M_{I,o}$ en un point géométrique de $M_{I,s_o}^=h$ est un anneau de séries formelles Def_n^h où ce dernier représente les déformations de niveau $n := \text{mult}_o(I)$ d'un \mathcal{O}_o -module formel de hauteur h .

Par ailleurs ces strates pour $h \neq d$, sont géométriquement induites au sens où il existe un sous-schéma fermé $M_{I,s_o,1}^=h$ de $M_{I,s_o}^=h$ stable sous les correspondances associées aux éléments du sous-groupe parabolique $P_{h,d}^{\text{op}}(F_o)$ de $\text{GL}_d(F_o)$, opposé au parabolique standard associé aux h premiers vecteurs de la base canonique et tel que

$$M_{I,s_o}^=h = M_{I,s_o,1}^=h \times_{P_{h,d}^{\text{op}}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)} \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n).$$

0.3. — Il s'avère que l'adhérence $M_{I,s_o,1}^{\geq h}$ des $M_{I,s_o,1}^{=h}$ est lisse de sorte que la non lissité des strates $M_{I,s_o}^{=h}$ provient des intersections entre ces différentes composantes et donc de l'intrication des parties connexes et étales des I -structures de niveau. Afin de démêler la situation on introduit les variétés d'Igusa de première et seconde espèce. Pour tout place o divisant I , on note $I = I^o \mathcal{M}_o^n$ où n est la multiplicité de o dans I de sorte que o ne divise pas I^o . Les variétés d'Igusa de première espèce $\mathcal{J}_{I^o,n}^{=h}$ sont des revêtements galoisiens de $M_{I^o,s_o}^{=h}$ de groupe de Galois $\mathrm{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$, définies par la donnée d'une structure de niveau \mathcal{M}_o^n sur la partie étale des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques de $M_{I^o,s_o}^{=h}$: on dispose alors d'un morphisme radiciel de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{=h}$ vers $M_{I,s_o,1}^{=h}$. Les variétés d'Igusa de seconde espèce sont des revêtements galoisiens $\mathcal{J}_{I^o,n}^{=h}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,n}^{=h}$ de groupe de Galois $(\mathcal{D}_{o,h}/(\Pi_{o,h}^s))^\times$ où $\mathcal{D}_{o,h}$ est l'ordre maximal de l'algèbre à division $D_{o,h}$ centrale sur F_o d'invariant $1/h$, avec $\Pi_{o,h}$ une uniformisante: elles sont définies via une rigidification modulo $\Pi_{o,h}^s$ de la partie connexe des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{=h}$.

On dispose alors pour toute représentation irréductible et admissible de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$, d'un système local dit de Harris-Taylor, sur $M_{I,s_o,1}^{=h}$ qu'il est aisé de propager à toute la strate via l'action de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$. Afin de mieux suivre les actions, on partira plutôt d'une représentation irréductible τ_o de $D_{o,h}^\times$ dont on prendra la restriction à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ de sorte que le système local obtenu \mathcal{F}_{τ_o} ne sera pas irréductible.

0.4. — Suivant [16], on est en mesure de décrire assez simplement le complété formel de $M_{I,o}$ le long de la strate $M_{I,s_o,1}^{=h}$. D'après les résultats de Berkovich, on en déduit alors une expression de la restriction à $M_{I,s_o,1}^{=h}$ des faisceaux des cycles évanescents en termes des systèmes locaux d'Harris-Taylor et des faisceaux des cycles évanescents $\Psi_{F_o,n}^{h,i}$ associés par Berkovich aux anneaux Def_n^h tout en suivant l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times W_o$.

0.5. — Décrivons succinctement le contenu des différents paragraphes. Le premier paragraphe est consacré aux rappels de [24] et [3] sur les \mathcal{O}_o -modules formels §I.1.1, sur les \mathcal{D} -faisceaux elliptiques et leurs structures de niveau §I.1.2, les variétés de modules $M_{I,o}$ munies d'une action par correspondances de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ §I.1.3. On rappelle ensuite §I.1.4, selon [24], la construction des systèmes locaux $\mathcal{L}_{\rho_\infty}$ sur les variétés de $M_{I,o}$ associés à une représentation irréductible ρ_∞ des inversibles de l'algèbre à division \bar{D}_∞ centrale sur F_∞ d'invariant $-1/d$. On rappelle enfin §I.1.5, la stratification de la fibre spéciale et comme application du théorème de Serre-Tate §I.1.6, on montre la lissité des $M_{I,s_o,1}^{\geq h}$.

0.6. — Le deuxième paragraphe s'intéresse plus en détail aux structures de niveau en y démêlant parties étales et connexes. À tout S -point de M_{I,s_o} est associé un ϕ -faisceau: si $S \rightarrow M_{I,s_o}$ se factorise par $M_{I,s_o}^{=h}$, le ϕ -faisceau associé se décompose alors en partie étale et connexe. L'un des résultats clef de ce premier paragraphe est la

proposition I.2.1.1 qui montre qu'après extension des scalaires par une puissance assez grande du Frobenius, la décomposition en composantes étale et connexe du ϕ -faisceau d'un S -point de $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$ est scindée modulo π_o^n . On a aussi des résultats au niveau des déformations de points de $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$, corollaire I.2.1.3 et proposition I.2.2.6. On montre enfin la relation de congruence, proposition I.2.3.1, qui permet de vérifier §I.3.3, la compatibilité des diverses définitions des correspondances de Hecke.

0.7. — On introduit §I.3, suivant [16], *les variétés d'Igusa de première espèce* $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$. On peut comprendre la démarche des définitions de celles-ci, de leurs versions formelles $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(t)$ et de leurs liens aux variétés de Drinfeld, comme la différence entre la donnée d'une structure de niveau sur un ϕ -faisceau et la donnée de structures de niveaux sur les parties étale et connexe du même ϕ -faisceau. Les résultats dans ce sens sont les propositions I.3.1.2 et I.3.2.1. En particulier on a un morphisme radiciel de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$ vers $M_{I,s_o,1}^{\overline{h}}$ où n est la multiplicité de o dans I . Au niveau des complétés formels, le résultat clef est la proposition I.3.2.1 qui donne l'existence d'un isomorphisme canonique de $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,n}(n)$ vers $\widehat{M}_{I^o,=h,1}$. On définit ensuite §I.3.3, les correspondances de Hecke associées aux éléments de $\mathrm{GL}_h(F_o) \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ sur la tour des $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(t)$, de manière compatible au théorème de Serre-Tate et à l'isomorphisme de la proposition I.3.2.1.

0.8. — *Les variétés d'Igusa de seconde espèce* $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s)$ de niveau s , sont introduites §I.4: le revêtement $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s) \rightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,m}^{\overline{h}}$ est étale de groupe de Galois

$$\mathcal{D}_{o,h,s}^\times := (\mathcal{D}_{o,h}/(\Pi_{o,h}^{s+1}))^\times$$

où $\mathcal{D}_{o,h}$ est l'ordre maximal de l'algèbre à division centrale sur F_o d'invariant $1/h$ et où $\Pi_{o,h}$ est un uniformisante de $\mathcal{D}_{o,h}$. On définit §I.4.2, les correspondances de Hecke sur la tour des $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s)$ associées aux éléments de

$$(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathrm{GDW}}_o(h)^0$$

où $\widetilde{\mathrm{GDW}}_o(h)^0$ est le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_h(F_o) \times D_{o,h}^\times \times W_o \rightarrow \mathbb{Z}$ qui au triplet (g_o^c, δ_o, c_o) associe la valuation de $\det(g_o^c) \mathrm{rn}(\delta_o) \mathrm{cl}(c_o)$ où $\mathrm{rn} : D_{o,h}^\times \rightarrow F_o^\times$ est la norme réduite et $\mathrm{cl} : W_o \rightarrow F_o^\times$ est l'application de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques sur les uniformisantes. Les résultats principaux sur les variétés d'Igusa sont ceux de §I.4.3. Brièvement on se sert des $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s)$ pour "détordre" le schéma formel $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(t)$ (cf. la proposition I.4.3.4 et la remarque qui suit). Ce paragraphe est très proche du texte de [16]; en particulier en suivant *loc. cit.*, on montre à la proposition I.4.3.7, une version à niveau fini de ces résultats.

0.9. — Le cinquième paragraphe traite des cycles évanescents. *À partir de ce point et jusqu'à la fin, sauf mention expresse du contraire, on considère l'action naturelle, i.e.*

celle de [3], de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ sur Def_n^d tordue par l'application $g_o \mapsto {}^t g_o^{-1}$; on pointera cette modification par un tilde sur les espaces concernés. On s'intéresse en premier lieu à la restriction du faisceau des cycles évanescents $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de $M_{I,o} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ à la strate $M_{I,s_o,a}^=h$, en fonction du faisceau des cycles évanescents $\widetilde{\Psi}_{F_o,\ell,h,n}^i$ du modèle local, i.e. de Def_n^h (cf. §I.5.1). L'énoncé principal, théorème I.5.2.6, décrit cette restriction munie de son action de $(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times P_{h,d}(F_o) \times W_o$. Formulons en rapidement l'énoncé: soit $\mathrm{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,n}^=h(\infty)}(\widetilde{\Psi}_{F_o,\ell,h,n}^i)$ le faisceau sur $\mathcal{J}_{I^o,n}^=h$ tel que sa restriction à $\mathcal{J}_{I^o,n}^=h(s)$ muni de l'action naturelle de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ est le faisceau constant $\widetilde{\Psi}_{F_o,\ell,h,n}^i$ muni de l'action "diagonale" de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$. Ce faisceau est naturellement muni d'une action de $(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times P_{h,d}^{\mathrm{op}}(F_o) \times W_o$ et on a un isomorphisme équivariant naturel

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{M_{I,s_o,a}^=h} \simeq \mathrm{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,n}^=h(\infty)}(\widetilde{\Psi}_{F_o,\ell,h,n}^i)$$

On relie ensuite §I.5.3 ces faisceaux aux systèmes locaux⁽¹⁾ \mathcal{F}_{τ_o} sur $M_{I,s_o,a}^=h$ associés aux revêtements d'Igusa de seconde espèce et à une représentation admissible, irréductible τ_o de $D_{o,h}^\times$. Cette description est donnée à la proposition I.5.3.5.

0.10. — Enfin dans le dernier paragraphe, on donne, au niveau des complétés formels, des équations explicites définissant les variétés d'Igusa de seconde espèce.

I.1. Modules formels et variétés de Drinfeld: rappels

I.1.1. Rappels sur les déformations des \mathcal{O}_o -modules formels

DÉFINITION I.1.1.1. – Étant donné une \mathcal{O}_o -algèbre R et $i : \mathcal{O}_o \rightarrow R$ son morphisme structural, un \mathcal{O}_o -module formel sur R est un couple $G = (F, (f_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{O}_o})$ où $F \in R[[X, Y]]$ et $f_\lambda \in R[[X]]$ avec $f_\lambda(X) = i(\lambda)X$ modulo (X^2) , vérifiant les propriétés usuelles pour en faire un \mathcal{O}_o -module, F représentant l'addition et f_λ la multiplication par λ .

Remarques:

- ▷ Si R est un corps sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, il existe un entier d , éventuellement infini, appelé la hauteur de G , tel que $F(X, Y) = X + Y$ et $f_{\varpi_o}(X)$ est une série formelle en X^{q^d} .
- ▷ Sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, il existe à isomorphisme près un unique \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d donnée que l'on notera Σ_d .

⁽¹⁾ Non irréductibles, car la restriction de τ_o à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ est une somme directe de e_{τ_o} représentations irréductibles.

- ▷ L'anneau des endomorphismes de ce \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, est l'ordre maximal $\mathcal{D}_{o,d}$ de l'algèbre à division centrale sur F_o , $D_{o,d}$, d'invariant $1/d$.

DÉFINITIONS I.1.1.2. – On note $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr} = \overline{\mathbb{F}}_q[[\varpi_o]]$ et on considère la catégorie C dont les objets sont les $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ -algèbres artiniennes de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$. Une déformation sur $R \in \text{Ob}(C)$ “du” \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, Σ_d , est un \mathcal{O}_o -module formel $G = (F, (f_\lambda)_{\lambda \in \vartheta})$ sur R dont la réduction modulo l'idéal maximal \mathcal{M} de R est Σ_d . Deux déformations sont dites isomorphes si les deux modules formels qu'elles définissent sont isomorphes, la réduction modulo \mathcal{M} de cet isomorphisme étant égal à l'identité. Une structure de niveau n sur G , est la donnée d'un homomorphisme de \mathcal{O}_o -module,

$$\iota_n : (\varpi_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \longrightarrow \mathcal{M},$$

tel que $f_{\varpi_o}(X)$ est divisible par $\prod_{\alpha \in (\varpi_o^{-1}\vartheta_o/\vartheta_o)^d} (X - \iota_n(\alpha))$. Une déformation de niveau n définie sur R , est par définition une déformation sur R munie d'une structure de niveau n .

PROPOSITION I.1.1.3 (cf. [11], prop. 4.3). – Le foncteur des déformations de niveau n , à isomorphismes près, du \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, Σ_d , est représenté par l'anneau $\text{Def}_{d,n}$ vérifiant les propriétés suivantes:

- ▷ Pour $n = 0$, le \mathcal{O}_o -module formel universel sur $\text{Def}_{d,0}$ est de la forme

$$(X + Y, (f_\lambda)_{\lambda \in \vartheta_o})$$

avec $f_{\varpi_o}(X) = \varpi_o X + a_1 X^q + \dots + a_{d-1} X^{q^{d-1}} + X^{q^d}$ et $\text{Def}_{d,0} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q[[a_0, a_1, \dots, a_{d-1}]]$ avec $a_0 = \varpi_o$.

- ▷ Soit e_i le i -ième vecteur de la base canonique pour $1 \leq i \leq d$. Pour $n > 0$, le morphisme

$$\phi : \overline{\mathbb{F}}_q[[v_1^n, \dots, v_d^n]] \rightarrow \text{Def}_{d,n}$$

défini par $\phi(v_i^n) = \iota_n(e_i)$ où ι_n est la structure de niveau universelle, est un isomorphisme.

Remarque : quand on écrit dans la suite

$$\text{Def}_{d,n} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q[[v_1^n, \dots, v_d^n]] \quad (\text{resp. } \text{Def}_{d,0} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q[[a_0, a_1, \dots, a_{d-1}]], a_0 = \varpi_o),$$

on sous-entend qu'il s'agit de l'isomorphisme ci-dessus.

Remarque : le morphisme caractéristique $\overline{\mathbb{F}}_q[[\varpi_o]] \rightarrow \text{Def}_{d,n}$ peut se calculer de la façon suivante. Le morphisme $\text{Def}_0^d \rightarrow \text{Def}_1^d$ est donné par l'égalité de polynômes

$$\begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_d^1 & X \\ (v_1^1)^q & (v_2^1)^q & \cdots & (v_d^1)^q & X^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_1^1)^{q^d} & (v_2^1)^{q^d} & \cdots & (v_d^1)^{q^d} & X^{q^d} \end{vmatrix} = \lambda(\varpi_o X + a_1 X^q + \cdots + a_{d-1} X^{q^{d-1}} + X^{q^d}),$$

où λ est le coefficient dominant du polynôme de gauche. Ainsi l'image de ϖ_o dans $\text{Def}_{d,1}$ est

$$\begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_d^1 \\ (v_1^1)^q & (v_2^1)^q & \cdots & (v_d^1)^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (v_1^1)^{q^{d-1}} & (v_2^1)^{q^{d-1}} & \cdots & (v_d^1)^{q^{d-1}} \end{vmatrix}^{q^{-1}}.$$

En notant a_i^n pour $0 \leq i < d$, les images de $a_i \in \text{Def}_{d,0}$ dans $\text{Def}_{d,n}$, les morphismes $f_n : \text{Def}_{d,n} \rightarrow \text{Def}_{d,n+1}$ se calculent de proche en proche par l'égalité

$$f_n(v_i^n) = f_n(a_0^n)v_i^{n+1} + f_n(a_1^n)(v_i^{n+1})^q + \cdots + f_n(a_{d-1}^n)(v_i^{n+1})^{q^{d-1}} + (v_i^{n+1})^{q^d}.$$

PROPOSITION I.1.1.4 (Deligne, Carayol: cf. [9] ou [3, 2.3]). – *L'action naturelle de $\text{GL}_d(\mathcal{O}_o) \times \mathcal{D}_{o,d}^\times \times I_o$ sur $\text{Def}_{d,n}$, se prolonge à la limite, i.e. sur le système projectif $(\text{Def}_{d,n})_n$, au noyau $\text{GDW}_o(d)^0$ de l'application*

$$\text{GDW}_o(d) := \text{GL}_d(F_o) \times D_{o,d}^\times \times W_o \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (g, \delta, w) \longmapsto \text{val}(\det(g^{-1}) \text{rn}(\delta) \text{cl}(w))$$

où $\text{rn} : D_{o,d}^\times \rightarrow F_o^\times$ est la norme réduite.

Remarque : on revoie le lecteur à la notion de schéma de Hecke, définition IV.1.2.1, pour plus de rigueur sur l'expression "à la limite". On rappelle que l'action de $g^{-1} \in \text{GL}_d(F_o) \cap \mathbb{M}_d(F_o)$ se déduit de l'action naturelle à gauche de g sur la structure de niveau $\iota : (F_o/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathcal{M}$; par ailleurs celle de $\mathcal{D}_{o,d}^\times$ est définie via l'identification avec $\text{Aut}(\Sigma_d)$.

I.1.2. \mathcal{D} -faisceaux elliptiques et structures de niveau

DÉFINITION I.1.2.1 (cf. [24]). – Un \mathcal{D} -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ sur un schéma S est d'après [24] un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \hookrightarrow & \mathcal{E}_i & \xrightarrow{j_i} & \mathcal{E}_{i+1} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & & \nearrow t_i & & & \\ \cdots & \hookrightarrow & \tau \mathcal{E}_i & \xrightarrow{\tau j_i} & \tau \mathcal{E}_{i+1} & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

où:

▷ \mathcal{E}_i est un $\mathcal{D}_{X \times S}$ -module à droite localement libre de rang 1, et donc un $\mathcal{O}_{X \times S}$ -module localement libre de rang d^2 ;

▷ ${}^\tau \mathcal{E}_i$ est égal à $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^* \mathcal{E}_i$;

▷ j_i et t_i sont des injections $\mathcal{D}_{X \times S}$ -linéaires;

▷ $\mathcal{E}_{i+d} \simeq \mathcal{E}_i(\infty) := \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\infty)$ et le composé $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_{i+d}$ est induit par l'injection canonique $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\infty)$;

▷ $(\text{pr}_S)_*(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang d où $\text{pr}_S : X \times S \rightarrow S$ est la projection canonique. De manière équivalente, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est isomorphe à l'image directe $(\widetilde{i_\infty})_*(\Gamma_{\infty,i})$ d'un \mathcal{O}_S -module $\Gamma_{\infty,i}$ localement libre de rang d , par la section $\infty : (\widetilde{i_\infty}) : S \rightarrow X \times S, s \mapsto (\infty, s)$;

▷ l'image directe de $\text{Coker } t_i$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang d . Le support de $\text{Coker } t_i$ est disjoint de $\text{Bad} \cup \{\infty\} \times S$, où Bad désigne l'ensemble des places x de X telles que \mathcal{D}_x n'est pas isomorphe à $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_x)$. De manière équivalente, $\text{Coker } t_i$ est isomorphe à l'image directe $(\widetilde{i_{0,i}})_*(\Gamma_{0,i})$ d'un \mathcal{O}_S -module $\Gamma_{0,i}$ localement libre de rang d , par la section

$$(\widetilde{i_{0,i}}) : S \xrightarrow{(i_{0,i}, i_{dS})} X \times S$$

induite par un morphisme $i_{0,i} : S \rightarrow X$ tel que $i_{0,i}(S) \subset |X'|$.

Remarque : les inclusions $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ étant des isomorphismes sur $(X \setminus \{\infty\}) \times S$ et le support de $\text{Coker } t_i$ étant disjoint de $\infty \times S$, on en déduit que la donnée des morphismes $(t_i)_i$ est équivalente à la donnée d'un seul t_i . Les morphismes $i_{0,i}$ sont indépendants de i ; on le note i_0 , le morphisme caractéristique du \mathcal{D} -faisceau elliptique.

DÉFINITION I.1.2.2 (cf. [24]). – Étant donné $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un \mathcal{D} -faisceau elliptique défini sur S et I un idéal de A tel que $V(I) \cap i_0(S) = \emptyset$, une I -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{I \times S}$ -modules à droite, $\tilde{t}_I : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I \times S}$ tel que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tau \mathcal{E}_{I \times S} & \xrightarrow{t_{I \times S}} & \mathcal{E}_{I \times S} \\ & \swarrow \tau \tilde{t}_I & \nearrow \tilde{t}_I \\ & \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Pour définir la notion de structure de niveau en une place $v \in i_0(S)$ d'après [3], on est amené à considérer les objets suivants. Pour alléger les notations on prend $v = o$, ce qui sera d'ailleurs le cas dans la suite.

DÉFINITIONS I.1.2.3. – Le $(\mathcal{O}_o \otimes \mathcal{O}_S)$ -module $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_o$ est indépendant de i ; on le note \mathcal{E}_o . Un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ étant fixé, soit \mathcal{F}_o le $(\mathcal{O}_o \otimes \mathcal{O}_S)$ -module libre de rang d défini par $E_{1,1} \cdot \mathcal{E}_o$, où $E_{1,1}$ est l'idempotent de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ associé au premier vecteur de la base canonique. Par équivalence de Morita, on a un isomorphisme \mathcal{D}_o -équivalent $\mathcal{E}_o \simeq \mathcal{F}_o^d$. Les morphismes t_i induisent alors un morphisme $t'_o : {}^\tau \mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$.

▷ Le ϕ -faisceau associé est par définition le couple (\mathcal{F}_o, ϕ_o) avec $\phi_o = t'_o : {}^\tau \mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$.

▷ Le \mathcal{O}_o -module de Dieudonné sur B associé à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est le couple (V_o, φ_o) où V_o est le $(\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S)$ -module localement libre de rang d , $\mathcal{F}_o \otimes_{(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S)} (\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S)$ et $\varphi_o : (\text{Id}_{\mathcal{O}_o} \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \text{Frob}_{\kappa(o)})^* V_o \rightarrow V_o$ est l'application induite par ϕ_o . On notera $V_{o,n} := V_o \varpi_o^n \setminus V_o$ pour tout n .

▷ Pour tout n , on note $\mathcal{F}_{o,n} = \mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} (\mathcal{O}_o \setminus \mathcal{M}_o^{-n})$ et on considère $\text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})$, le S -schéma en \mathcal{O}_o -modules finis, d'ordre q^{nd} tués par ϖ_o^n , qui représente le foncteur de la catégorie des S -schémas dans celle des ensembles:

$$S' \longmapsto \{ u \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}_{o,n}, S') ; u(\phi_{o,n}(x)) = u(x)^q, \forall x \in \mathcal{F}_{o,n} \}$$

On a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n}) \xrightarrow{i_n} \text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n+1}) \xrightarrow{\varpi_o^n} \text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n+1}).$$

▷ Si P est un R -point d'un schéma Y , on note $[P]$ le sous- R -schéma de Y qu'il définit. Pour (P_i) une famille finie de tels points, on note $\sum [P_i]$ le sous-schéma de Y défini par le faisceau d'idéaux produit des faisceaux d'idéaux définissant les $[P_i]$.

▷ Une \mathcal{M}_o^n -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)/S$ est un homomorphisme de \mathcal{O}_o -modules $l'_{o,n} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ tel que le sous-schéma

$$\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{M}_o^n)^d} [l'_{o,n}(z)]$$

de $\text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})$ coïncide avec $\text{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})$.

Remarque : pour tout élément z de $(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^d$, $l'_{o,n}(z)$ est un élément de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ tel que $\phi_{o,n}^*(l'_{o,n}(z)) = l'_{o,n}(z)^q$. Le morphisme $l'_{o,n}$ fournit alors un homomorphisme de \mathcal{O}_o -modules $(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^d \rightarrow \mathcal{F}_{o,n}^*$ qui après équivalence de Morita, donne un homomorphisme de \mathcal{D}_o -modules $\iota_{o,n} : \mathcal{D}_{o,n} \rightarrow \mathcal{E}_{o,n}^*$ tel que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{o,n} & \xrightarrow{\iota_{o,n}} & \mathcal{E}_{o,n}^* \\ & \searrow \tau \iota_{o,n} & \swarrow t_{o,n}^* \\ & & {}^\tau \mathcal{E}_{o,n}^* \end{array}$$

Dans la suite, $\iota_{o,n}$ désignera la structure de niveau après équivalence de Morita.

PROPOSITION I.1.2.4 (cf. [3, prop. 7.1.3 et 7.1.4]). – Soit

$$\iota'_{o,n} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \longrightarrow \mathrm{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})(S)$$

une \mathcal{M}_o^n -structure de niveau définie sur un schéma S tel que S^o l'ouvert complémentaire de $i_0^{-1}(\mathrm{Spec} \kappa(o))$, est non vide. Alors $\iota'_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o)$ induit un isomorphisme de \mathcal{O}_o -modules

$$(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \longrightarrow (\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*.$$

Réciproquement soit S est un schéma intègre tel que S^o est non vide. Si l'homomorphisme de \mathcal{O}_o -modules $\iota'_{o,n} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathrm{Gr}(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ induit un isomorphisme sur S^o $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*$, alors $\iota'_{o,n}$ est une \mathcal{M}_o^n -structure de niveau.

I.1.3. Schémas de modules et correspondances de Hecke

PROPOSITION I.1.3.1 (cf. [24]). – Le classifiant des classes d'équivalence des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques munis d'une I -structure de niveau, définit un schéma régulier (un champ si $I = A$), $M_I \rightarrow X'$ de dimension relative $d - 1$.

DÉFINITION I.1.3.2. – On notera $M_{I,o} := M_I \times_{X'} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ et M_{I,s_o} (resp. M_{I,η_o}) la fibre spéciale (resp. générique) de M_I .

I.1.3.3. — On note \mathbb{A} l'anneau des adèles de F . Le schéma de Hecke $M_o := \varinjlim_I M_{I,o}$ au sens de IV.1.2.1 est munie d'une action par correspondances de Hecke de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times := (D \otimes_F \mathbb{A}^\infty)^\times$. Au-dessus de la fibre générique M_{η_o} de M_o et à niveau fini, pour $K_{\mathbb{A}}^\infty$ un sous-groupe compact ouvert de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$, l'action d'un élément g^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ se décrit par la correspondance géométrique

$$\begin{array}{ccc} & (M_{\eta_o})^{(K_{\mathbb{A}}^\infty \cap (g^\infty)^{-1} K_{\mathbb{A}}^\infty g^\infty)} & \\ c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\ (M_{\eta_o})^{K_{\mathbb{A}}^\infty} & \text{-----} & (M_{\eta_o})^{K_{\mathbb{A}}^\infty} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{Spec}(F_o) & \end{array}$$

où le morphisme c_1 (resp. c_2) est induit par l'inclusion, cf. [24], § 7:

$$(K_{\mathbb{A}}^\infty \cap (g^\infty)^{-1} K_{\mathbb{A}}^\infty g^\infty) \subset K_{\mathbb{A}}^\infty \text{ (resp. } K_{\mathbb{A}}^\infty \cap (g^\infty)^{-1} K_{\mathbb{A}}^\infty g^\infty) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g^\infty)} K_{\mathbb{A}}^\infty.$$

En particulier on note $K_{\mathbb{A},I}^\infty$ le noyau de $(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \rightarrow \prod_{x \neq \infty} (\mathcal{D}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x/\mathcal{M}_x^{n_x})^\times$, où n_x est la multiplicité de x dans I . On a $(M_{\eta_o})^{K_{\mathbb{A},I}^\infty} = M_{I,\eta_o}$.

I.1.3.4. — On montre dans [3, §7.3] que ces correspondances s'étendent de manière unique sur M_o tout entier. Si la composante g_o^∞ de g^∞ en o est triviale, le résultat est évident. Précisons la situation pour $g_o \in \mathrm{GL}_d(F_o) \cap \mathbb{M}_d(\theta_o)$. On pose $S := M_o$ et $S^o := M_{\eta_o}$ et on considère le \mathcal{D} -faisceau elliptique universel sur S muni de sa I -structure de niveau universelle pour tout idéal I de A . La structure de niveau fournit un morphisme

$$\iota'_o : (F_o/\theta_o)^d \times S \longrightarrow \mathcal{F}_o^* \otimes_{\theta_o} (F_o/\theta_o)$$

selon les notations précédentes. Sur l'ouvert S^o , $\iota'_o := \iota'_o \otimes_{\theta_o} F_o$ est un isomorphisme. On associe à g_o , d'après *loc. cit.*, la multiplication à gauche de ${}^t g_o \times$ sur $(F_o/\theta_o)^d$ et donc le morphisme

$$[g_o^*] : \mathcal{F}_o^* \otimes_{\theta_o} (F_o/\theta_o) \longrightarrow \mathcal{F}_o^* \otimes_{\theta_o} (F_o/\theta_o)$$

tel que sa restriction $[g_o^*]^o$ à S_o est par définition induite, via l'isomorphisme ι'_o , par la multiplication à gauche de ${}^t g_o$ sur $(F_o/\theta_o)^d$. On note $[g_o]$ l'endomorphisme de \mathcal{F}_o déduit de $[g_o^*]$. L'image par g_o du \mathcal{D} -faisceau elliptique universel $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_\infty)$ est le \mathcal{D} -faisceau $((\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i), \iota'_\infty)$ défini via les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'_i & \longrightarrow & \mathcal{F}_o \\ \downarrow & & \downarrow [g_o] \\ \mathcal{E}_i & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_o \end{array}$$

où i est l'injection canonique, ou de manière duale par $(\mathcal{E}')^* := \mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{E}_o^*, [g_o^*]} \mathcal{E}_o^*$. La structure de niveau est alors définie de manière naturelle comme suit. Soient n et m tels que $\mathrm{Ker} {}^t g_o \subset (\mathcal{M}_o^{-n}/\theta_o)^d$ et $(\mathcal{M}_o^{-m}/\theta_o)^d \subset \mathrm{Im} g_o$. Si $\iota_{o,n}$ est la structure de niveau n sur $\mathcal{F}_{o,n}$, la composée

$$(\mathcal{M}_o^{-m}/\theta_o)^d \longrightarrow (\mathcal{M}_o^{-n}/\theta_o)^d / \mathrm{Ker} g_o \xrightarrow{\iota_{o,n}} \mathcal{F}_{o,n}^* \xrightarrow{[g_o^*]} \mathcal{F}_{o,m}^*$$

définit une flèche $\iota'_{o,m} : (\mathcal{M}_o^{-m}/\theta_o)^d \rightarrow (\mathcal{F}'_{o,n})^*$ dont on vérifie aisément en utilisant la proposition I.1.2.4, qu'elle définit une structure de niveau m .

I.1.4. Structures de niveau à l'infini. — Ce qui suit est un résumé du paragraphe 8 de [24].

I.1.4.1. — Étant donné un \mathbb{F}_q -schéma S et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un \mathcal{D} -faisceau elliptique sur S , on considère pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les $\theta_\infty \widehat{\otimes} \theta_S$ -modules localement libre de rang d^2 :

$$\check{M}_i := \mathcal{E}_i^\vee | (X \times S)^\vee_\infty$$

où \mathcal{E}_i^\vee est le faisceau dual de \mathcal{E}_i et $(X \times S)^\vee_\infty$ est la complétion de $X \times S$ le long de $\{\infty\} \times S$. Les j_i définissent alors un système inductif $\check{M} := \dots \hookrightarrow \check{M}_i \hookrightarrow \check{M}_{i+1} \hookrightarrow \dots$

et l'on identifie les \check{M}_i avec leur image dans \check{M} qui est donc un $F_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -module de rang d^2 . Les t_i induisent alors un isomorphisme

$$\check{M} \xrightarrow{\sim} {}^\tau \check{M} = (F_\infty \widehat{\otimes} \text{Frob}_S)^* \check{M}$$

qui envoie \check{M}_i surjectivement sur ${}^\tau \check{M}_{i+1}$. On définit alors $\check{\psi} : {}^\tau \check{M} \rightarrow \check{M}$ comme l'inverse de l'isomorphisme ci-dessus; $\check{\psi}({}^\tau \check{M}_i) = \check{M}_{i-1} \subset \check{M}_i$.

1.1.4.2. — L'action à droite de \mathcal{D} sur les \mathcal{E}_i induit une action à gauche sur \check{M} qui commute à $\check{\psi}$ et qui stabilise $\check{M}_i \subset \check{M}$. Un isomorphisme $\mathcal{D}_\infty \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_\infty)$ étant fixé, on a une équivalence de Morita

$$(\check{M}, \check{\psi}) = (\check{N}, \check{\psi})^d \quad \text{et} \quad \check{M}_i = (\check{N}_i)^d.$$

Ainsi \check{N} est un $F_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -module de rang d et $\check{N}_i \subset \check{N}$ en est un $\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -sous-module localement libre de rang d vérifiant

$$\varpi_\infty \check{N}_i = \check{N}_{i-(\deg \infty)d} \subset \cdots \subset \check{N}_{i-1} \subset \check{N}_i, \quad \check{\psi}({}^\tau \check{N}_i) = \check{N}_{i-1}$$

tel que le quotient $\check{N}_i / \varpi_\infty \check{N}_i \rightarrow \check{N}_i / \check{\psi}({}^\tau \check{N}_i)$ est un $\mathcal{O}_{\{\infty\}} \times_S$ -module supporté par le graphe d'un \mathbb{F}_q -morphisme de schéma $i_{\infty,i} : S \rightarrow \{\infty\}$ et est localement libre de rang 1 sur son support avec $i_{\infty,i+1} = i_{\infty,i} \circ \text{Frob}_S$.

1.1.4.3. — Soit S un schéma muni d'un \mathbb{F}_q -morphisme de schéma $i_{\infty,0} : S \rightarrow \{\infty\}$. Tout autre \mathbb{F}_q -morphisme de schéma de S vers $\{\infty\}$ est alors de la forme $i_{\infty,i} := i_{\infty,0} \circ \text{Frob}_S^i$ pour un unique $i \in \mathbb{Z} / \deg(\infty)\mathbb{Z}$. On associe au couple $(S, i_{\infty,0})$ le triplet $(N_{d,1}, \psi_{d,1}, \mathcal{N}_{d,1})$ où

$$N_{d,1} = (F_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^d = \bigoplus_{i=0}^{\deg(\infty)-1} (F_\infty \widehat{\otimes}_{\kappa(\infty), i^*, i} \mathcal{O}_S)^d,$$

de base canonique $(e_{i,j})_{0 \leq i < \deg(\infty), 1 \leq j \leq d}$, $\psi_{d,1} : {}^\tau N_{d,1} \xrightarrow{\sim} N_{d,1}$ est défini par $\psi_{d,1}(e_{i,j}) = e_{i+1,j}$ pour $i \neq \deg(\infty) - 1$ et $\psi_{d,1}(e_{\deg(\infty)-1,j}) = e_{0,j-1}$ pour $j \neq 1$ et $\varpi_\infty e_{0,d}$ pour $j = 1$, et

$$\mathcal{N}_{d,1} = (\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^d = \bigoplus_{i=0}^{\deg(\infty)-1} (\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes}_{\kappa(\infty), i^*, i} \mathcal{O}_S)^d.$$

1.1.4.4. — Soit $\kappa(\infty)_d$ l'extension de degré d de $\kappa(\infty)$ et soient $F_{\infty,d} = F_\infty \widehat{\otimes}_{\kappa(\infty)} \kappa(\infty)_d$, $\mathcal{O}_{\infty,d}$ son anneau des entiers et $\sigma_{\infty,d} = F_\infty \widehat{\otimes}_{\kappa(\infty)} \text{Frob}_q^{\deg(\infty)}$. Soit $F_{\infty,d}[\tau_\infty]$ l'algèbre de polynômes sur $F_{\infty,d}$, non commutative avec la règle de commutation $\tau_\infty a = \sigma_{\infty,d}^{-1}(a)\tau_\infty$ pour tout $a \in F_{\infty,d}$. L'élément $\tau_\infty^d - \varpi_\infty$ est alors central dans $F_{\infty,d}[\tau_\infty]$ et

$$\bar{D}_\infty := F_{\infty,d}[\tau_\infty] / (\tau_\infty^d - \varpi_\infty)$$

est alors "T"algèbre à division centrale sur F_∞ d'invariant $-1/d$, d'ordre maximal $\bar{\mathcal{D}}_\infty := \mathcal{O}_{\infty,d}[\tau_\infty] / (\tau_\infty^d - \varpi_\infty)$.

I.1.4.5. — Si $\lambda : S \rightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$ est un \mathbb{F}_q -morphisme de schémas, on peut construire une injection de F_∞ -algèbres

$$\lambda^* : \overline{D}_\infty \hookrightarrow \text{End}(N_{d,1}, \psi_{d,1})$$

de la façon suivante où $i_{\infty,0} : S \xrightarrow{\lambda} \text{Spec}(\kappa(\infty)_d) \xrightarrow{\text{can}} \{\infty\}$. Pour $\alpha \in \kappa(\infty)_d$, l'image de $1 \widehat{\otimes} \alpha \in F_{\infty,d} \subset \overline{D}_\infty$ est donnée par

$$\lambda^*(1 \widehat{\otimes} \alpha)(e_{i,j}) = (1 \widehat{\otimes} \lambda^*(\text{Frob}_q^{i-j \deg(\infty)}(\alpha))) e_{i,j}$$

et l'image de $\tau_\infty \in \overline{D}_\infty$ par

$$\lambda^*(\tau_\infty)(e_{i,j}) = \begin{cases} \varpi_\infty e_{i,d} & \text{si } j = 1, \\ e_{i,j-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si λ et λ' sont deux \mathbb{F}_q -morphisms de schémas de S vers $\text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$ qui relèvent $i_{\infty,0}$, on a $\lambda' = \lambda \circ \text{Frob}_S^{n \deg(\infty)}$ pour $n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et alors $(\lambda')^* = \lambda^* \circ \text{Ad}(\tau_\infty^{-n})$. On vérifie aussi que $\lambda^*(\overline{D}_\infty)$ laisse $\mathcal{N}_{d,1}$ stable.

DÉFINITION I.1.4.6. — Une structure de niveau à l'infini sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est une paire (λ, α) où $\lambda : S \rightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$ est un \mathbb{F}_q -morphisme de schémas qui relève le pôle $i_{\infty,0}$ et où $\alpha : \mathcal{N}_{d,1} \xrightarrow{\sim} \check{N}_0$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -modules tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tau \check{\mathcal{N}}_{d,1} & \xrightarrow[\sim]{\tau_\alpha} & \tau \check{N}_0 \\ \downarrow \psi_{d,1} & & \downarrow \check{\psi} \\ \mathcal{N}_{d,1} & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \check{N}_0 \end{array}$$

I.1.4.7. — On a une notion évidente d'isomorphisme entre \mathcal{D} -faisceaux elliptiques sur S munis d'une structure de niveau à l'infini; on note \mathcal{M}_I (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_I(S)$) la catégorie des classes d'isomorphismes des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques sur S munis d'une structure de niveau I (resp. et d'une structure de niveau à l'infini). On obtient ainsi une catégorie fibrée $\widetilde{\mathcal{M}}_I$ qui est un pro-champ; en effet se donner un isomorphisme $\alpha : \mathcal{N}_{d,1} \xrightarrow{\sim} \check{N}_0$ de $\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -modules, revient à se donner un système projectif $(\alpha_n = \alpha \bmod \varpi_\infty^{n+1})_{n \geq 0}$ d'isomorphismes de $\mathcal{O}_\infty / (\varpi_\infty^{n+1}) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -modules et α commute avec les ψ si et seulement si les ψ_n commutent avec les ψ modulo ϖ_∞^{n+1} .

I.1.4.8. — On a en outre un morphisme d'oubli

$$r_{\infty,I} : \widetilde{\mathcal{M}}_I \longrightarrow \mathcal{M}_I$$

qui envoie $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I, (\lambda, \alpha))$ sur $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$, ainsi qu'un morphisme de structure

$$\lambda_I : \widetilde{\mathcal{M}}_I \longrightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$$

qui envoie $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I, (\lambda, \alpha))$ sur α et qui relève $i_{\infty,0} \circ r_{\infty,I}$. Pour $I \subset J \subset X \setminus \{\infty\}$, on a des 2-diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}_J & \xrightarrow{\tilde{r}_{J,I}} & \widetilde{\mathcal{M}}_I \\ \downarrow r_{\infty,J} & & \downarrow r_{\infty,I} \\ \mathcal{M}_J & \xrightarrow{r_{J,I}} & \mathcal{M}_I \end{array}$$

I.1.4.9. — Sur $\widetilde{\mathcal{M}}_I$, on a des actions continues à droites du groupe profini $\bar{\mathcal{D}}_\infty^\times$ et de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: $\delta \in \bar{\mathcal{D}}_\infty^\times$ (resp. $n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) envoie $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I, (\lambda, \alpha))$ sur

$$((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I, (\lambda, \alpha \circ \lambda^*(\delta))) \quad (\text{resp. } ((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I, (\lambda \circ \text{Frob}_S^{n \deg(\infty)}, \alpha))).$$

Comme on a

$$(\lambda \circ \text{Frob}_S^{n \deg(\infty)})^* = \lambda^* \circ \text{Ad}(\tau_\infty^{-n})$$

ces deux actions induisent une action à droite continue du groupe profini

$$\bar{\mathcal{D}}_\infty^\times \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

où $n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit sur $\bar{\mathcal{D}}_\infty^\times$ par $\text{Ad}(\tau_\infty^{-n})$. On identifie alors ce produit semi-direct avec

$$\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$$

en envoyant (δ, n) sur $\delta \tau_\infty^{-n}$. On obtient ainsi une action à droite de $\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$ qui commutent aux $r_{\infty,I}$, $\tilde{r}_{J,I}$ et λ_I si on fait agir $\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$ sur $\text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$ à travers son quotient

$$-\infty \circ \text{rn} : \bar{D}_\infty^\times \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

$$(\text{Gal}(\kappa(\infty)_d / \kappa(\infty))) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

THÉORÈME I.1.4.10 (cf. [24], th. 8.10 et prop. 8.8). — *Le morphisme de pro-champs*

$$r_{\infty,I} : \widetilde{\mathcal{M}}_I \longrightarrow \mathcal{M}_I$$

est représentable et est un revêtement pro-galoisien de groupe de Galois $\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$; $\widetilde{\mathcal{M}}_I$ est alors un schéma que l'on notera \widetilde{M}_I .

Les correspondances de Hecke sur les M_I associées aux éléments de $(D_\mathbb{A}^\infty)^\times \times \mathbb{Z}$ se relèvent sur \widetilde{M}_I et commutent à l'action de $\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$. De plus F^\times envoyé diagonalement dans $(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) \times (D_\mathbb{A}^\infty)^\times$ agit trivialement sur les \widetilde{M}_I .

Remarque : la caractéristique étant disjointe de ∞ , les arguments de *loc. cit.* s'appliquent sans modification sur les variétés M_I même dans le cas de mauvaise réduction.

I.1.5. Stratification de la fibre spéciale

DÉFINITION I.1.5.1. – Pour tout $1 \leq h \leq d$, on notera $P_{h,d}$ le parabolique standard associé aux h premières coordonnées et soit $P_{h,d}^{\text{op}}$ le parabolique opposé

PROPOSITION I.1.5.2 (cf. [23, prop. 2.4.6] et [3, lemme 6.2.3]). – (a) *Tout \mathcal{O}_o -module de Dieudonné (V_o, φ_o) sur une extension k de $\kappa(o) = \mathbb{F}_q$ se décompose en une somme directe $(V_o^c, \varphi_o^c) \oplus (V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}})$ où φ_o^c est topologiquement nilpotent et φ_o^{et} est bijective.*

(b) *Tout \mathcal{O}_o -module de Dieudonné (V_o, φ_o) sur un épaissement R de $\kappa(o)$, se dévise en une suite exacte*

$$0 \rightarrow (V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}}) \longrightarrow (V_o, \varphi_o) \longrightarrow (V_o^c, \varphi_o^c) \rightarrow 0$$

où φ_o^c est topologiquement nilpotent et φ_o^{et} est bijective.

DÉFINITION I.1.5.3. – Pour tout $1 \leq h \leq d$, on définit dans [3] un sous-schéma $M_{I,s_o}^{\text{=h}}$ de M_{I,s_o} de pure dimension $d-h$, stabilisé par les correspondances de Hecke et caractérisé par l'une des propriétés équivalentes suivantes: en tout point géométrique de $M_{I,s_o}^{\text{=h}}$,

- ▷ le \mathcal{O}_o -module de Dieudonné qui lui est associé, a sa composante connexe de hauteur h .
- ▷ le ϕ -faisceau (\mathcal{F}_o, ϕ_o) qui lui est associé est tel que si on note $M_{o,1}$ la matrice de $\phi_{o,1} := \phi_o \otimes_{\mathcal{O}_o} (\mathcal{O}_o \setminus \mathcal{M}_o^{-1})$ dans une base quelconque de $\mathcal{F}_{o,1}^* := \mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{O}_o)$, alors d'après *loc. cit.*,

$$M_{o,1}^{\text{!h}} := M_{o,1}(\tau M_{o,1}) \cdots (\tau^{h-1} M_{o,1})$$

a un mineur d'ordre $d-h$ inversible et tous ses mineurs d'ordre $r > d-h$ sont nuls.

Remarque : dans [3, déf. 10.1.1], le schéma $M_{I,s_o}^{\text{=h}}$, contrairement à la situation de la caractéristique nulle, peut être défini schématiquement avec “ses nilpotents”; celle-ci n'est alors pas réduite sauf si la multiplicité de o dans I est nulle. Dans ce texte nous avons préféré ne pas introduire la version avec nilpotents de la stratification.

DÉFINITIONS I.1.5.4. – Soit $I = I^o \mathcal{M}_o^n$ un idéal de A , n étant la multiplicité de o dans I . L'ensemble

$$G/P(d, h, n) := \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)/P_{h,d}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

classifie les facteurs directs a de rang h de $(\mathcal{M}_o^n/\mathcal{O}_o)^d$. Pour tout $a \in G/P(d, h, n)$, on notera

$$P_{h,d;a}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n) := aP_{h,d}(\mathcal{O}_o)a^{-1}, \quad K_{o^n} := \text{Ker}(\text{GL}_d(\mathcal{O}_o) \rightarrow \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)),$$

$$K_{o,h,d,n}(a) = K_{o^n} \cap P_{h,d;a}^{\text{op}}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

DÉFINITION I.1.5.5 (cf. [3, déf. 10.4.1]). – Pour tout $a \in G/P(d, h, n)$, il existe un sous-schéma fermé $M_{I,s_o,a}^{\leq h}$ de $M_{I,s_o}^{\leq h}$ stable sous l'action des correspondances de Hecke associées aux éléments de

$$K_{\mathbb{A}}^{\infty}/K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times K_{o,h,d,n}(a)$$

Remarque : concrètement si $\iota_{o,n}$ est la \mathcal{M}_o^n -structure de niveau universelle sur $M_{I,o}$ alors le noyau de $\iota_{o,n}^{\text{ét}} := (\iota_{o,n} \times_{M_{I,o}} M_{I,s_o,a}^{\leq h})|_{\mathcal{F}_o^{\text{ét}}} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathcal{F}_o^{\text{ét},*}$, où $\mathcal{F}_o^{\text{ét}}$ est la partie étale du ϕ -faisceau universel sur $M_{I,s_o,a}^{\leq h}$ donnée par la proposition I.1.5.2, est le facteur direct a de $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$.

I.1.5.6. — On en déduit alors le fait fondamental suivant.

Propriété géométrique fondamentale: *les strates non supersingulières sont induites, i.e.*⁽²⁾

$$M_{I,s_o}^{\leq h} = M_{I,s_o,1}^{\leq h} \times_{P_{h,d}^{\text{op}}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)} \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où $M_{I,s_o,1}^{\leq h}$ est la composante associée à la classe de I_d dans $G/P(d, h, n)$.

PROPOSITION I.1.5.7. – L'ensemble des points géométriques de $M_{I,s_o,a}^{\leq h}$ au-dessus d'un point géométrique donné de $M_{I^o,s_o}^{\leq h}$ est en bijection avec les isomorphismes

$$\iota_{o,n}^{\text{ét}} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d/a \longrightarrow \mathcal{F}_{o,n}^{\text{ét},*}$$

tels que $\phi_{o,n}^{\text{ét},*} \circ \iota_{o,n}^{\text{ét}} = \tau_{o,n}^{\text{ét}}$ où n est la multiplicité de o dans I . Cet ensemble est alors de cardinal égal à $\# \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$.

DÉFINITION I.1.5.8. – On notera $M_{I,s_o}^{\geq h}$ (resp. $M_{I,s_o,a}^{\geq h}$) l'adhérence schématique de $M_{I,s_o}^{\leq h}$ (resp. $M_{I,s_o,a}^{\leq h}$) dans M_{I,s_o} .

Il découle du deuxième point de la définition I.1.5.3 que l'inclusion $M_{I,s_o}^{\leq h} \hookrightarrow M_{I,s_o,a}^{\geq h}$ est affine.

⁽²⁾ On rappelle que l'application canonique $\text{GL}_d(\mathcal{O}_o) \rightarrow \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$ est surjective.

I.1.6. Théorème de Serre-Tate et conséquences. – D'après la théorie du module de coordonnées, cf. [15], $\text{Def}_{d,n}$ représente aussi les déformations de niveau n , du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ connexe de hauteur d ⁽³⁾.

DÉFINITION I.1.6.1. – Pour tout $1 \leq h \leq d$, soit $\text{Def}_{d,n}^{\leq h}$ la $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ -algèbre qui classe les déformations de niveau n de Σ_d telle que la composante connexe du \mathcal{O} -module de Dieudonné associé est de hauteur h . On note $\text{Def}_{d,n}^{\geq h}$ son adhérence.

Remarque : concrètement, cf. [3, §9], en notant M_1 la matrice modulo $\varpi_o \otimes 1$, de φ dans une base du $\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_\kappa \text{Def}_{d,n}$ -module V , $\text{Def}_{d,n}^{\geq h}$ est le réduit du quotient de $\text{Def}_{d,n}$ par l'idéal engendré par tous les mineurs d'ordre supérieur strictement à $d - h$ de

$$M_1^{!h} := M_1(\tau M_1) \cdots (\tau^{h-1} M_1).$$

PROPOSITION-DÉFINITION I.1.6.2 (cf. [3, prop. 9.3.2]). – *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow (V_h^{\text{et}}, \varphi_h^{\text{et}}) \longrightarrow (V, \varphi) \otimes_{\text{Def}_{d,n}} \text{Def}_{d,n}^{\leq h} \longrightarrow (V_h^c, \varphi_h^c) \rightarrow 0$$

où $(V_h^{\text{et}}, \varphi_h^{\text{et}})$ (resp. (V_h^c, φ_h^c)) est un \mathcal{O} -module de Dieudonné étale (resp. topologiquement nilpotent) de dimension $d - h$ (resp. h). La structure de niveau n universelle sur $\text{Def}_{d,n}$,

$$\iota_n : (\mathcal{M}^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathcal{M}_n^d$$

où \mathcal{M}_n^d est l'idéal maximal de $\text{Def}_{d,n}$, est alors telle que le noyau de

$$\iota_n^{\text{et}} := (\iota_n \otimes_{\text{Def}_{d,n}} \text{Def}_{d,n}^{\leq h})|_{V_h^{\text{et}}} : (\mathcal{M}^{-n}/\mathcal{O})^d \longrightarrow \mathcal{M}_n^d \otimes_{\text{Def}_{d,n}} \text{Def}_{d,n}^{\leq h}$$

est un facteur direct a de $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$, de sorte que

$$\text{Def}_{d,n}^{\leq h} = \prod_{a \in G/P(d,h,n)} \text{Def}_{d,n,a}^{\leq h}$$

où $\text{Def}_{d,n,a}^{\leq h}$ est muni d'une action de $K_{o^n} \cap P_{h,d;a}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$.

PROPOSITION I.1.6.3 (théorème de Serre-Tate, cf. [3, th. 7.4.4]). – *Le morphisme naturel du foncteur des déformations d'un point géométrique de $M_{I,o}$ vers le foncteur des déformations de niveau $n = \text{mult}_o(I)$ du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné qui lui est associé, est une équivalence de catégories. En outre l'action d'un élément $(g_o^c, \text{Frob}_o^r) \in \text{GL}_h(F_o) \times W_o$ tel que $r = -\text{val}(\det g_o^c)$ sur $M_{I,o}$, induit l'action de $({}^t(g_o^c)^{-1}, \text{Frob}_o^r) \in \text{GDW}_o(d)^0$ sur $\text{Def}_{d,n}$.*

⁽³⁾ On montre plus généralement qu'il y a une équivalence de catégories, des déformations de niveau n du \mathcal{O}_o -module divisible de type (h, j) (la composante connexe est de hauteur h et la partie étale de hauteur j , cf. [11]) sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ vers les déformations de niveau n du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ dont la partie connexe est de rang h et la partie étale de rang j . Le foncteur de ces déformations est représentable (cf. [11]) par l'anneau $\text{Def}_n^{h,j} \simeq \text{Def}_n^h[[w_1^n, \dots, w_j^n]]$.

Preuve. – Par rapport à *loc. cit.*, remarquons en effet que l'action de g_o^c sur le \mathcal{O}_o -module de Dieudonné (V_o, φ_o) est donnée par la multiplication à gauche par g_o^c , de sorte qu'étant donnée une structure de niveau $\iota_{o,n} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \text{Gr}(V_{o,n}, \varphi_{o,n})$, l'action de g_o^c est donnée par la multiplication à gauche de ${}^t g_o^c$ sur $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$ à comparer avec l'action définie au paragraphe précédent qui est donnée par la multiplication de $(g_o^c)^{-1}$ à gauche sur $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$. \square

COROLLAIRE I.1.6.4. – (a) *Le complété formel de l'anneau local de $M_{I,o}$ en un point géométrique quelconque de $M_{I,s_o}^{\leq h}$, est non canoniquement isomorphe⁽⁴⁾ à l'anneau représentant les déformations d'un \mathcal{O}_o -module divisible de hauteur d , extension d'un \mathcal{O}_o -module formel de hauteur h par sa partie étale, $\text{Def}_n^{h,d-h}$ où n est la multiplicité de o dans I .*

(b) *Le complété formel de l'anneau local de $M_{I,s_o}^{\geq h}$ en un point géométrique de $M_{I,s_o}^{\leq h'}$ pour $h' \geq h$ est isomorphe par le théorème de Serre-Tate à $\text{Def}_n^{h',d-h'; \geq h}$ défini comme suit avec $j' = d - h'$:*

$$\text{Def}_n^{h',j'; \geq h} \simeq \text{Def}_n^{h'; \geq h} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^n, \dots, w_{j'}^n]]$$

où $\text{Def}_n^{h'; \geq h}$ est le réduct du quotient de $\text{Def}_n^{h'}$ par l'idéal engendré par $\varphi_{0 \rightarrow n}(u_i)$ pour $1 \leq i < h$ où

$$\varphi_{0 \rightarrow n} : \text{Def}_{h',0} = \overline{\mathbb{F}}_q[[\varpi_o, a_1, \dots, a_{h'-1}]] \rightarrow \text{Def}_{h',n}$$

est le morphisme d'oubli du niveau.

(c) *Le complété formel de l'anneau local de $M_{I,s_o,a_h}^{\geq h}$ en un point géométrique de $M_{I,s_o,a_{h'}}^{\leq h'}$ pour $h' \geq h$ et $a_h \subset a_{h'}$ est isomorphe par le théorème de Serre-Tate à $\text{Def}_{n,a_h \subset a_{h'}}^{h',d-h'; \geq h}$ défini comme suit avec $j' = d - h'$:*

$$\text{Def}_{n,a_h \subset a_{h'}}^{h',j'; \geq h} \simeq \text{Def}_{n,a_h'}^{h'; \geq h} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^n, \dots, w_{j'}^n]]$$

où a_h' est le facteur direct de rang $h' - h$ de $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{h'}$ associé au quotient $a_{h'}/a_h$ et où $\text{Def}_{n,a_h'}^{h'; \geq h}$ est le réduct du quotient de $\text{Def}_{h',n}$ par l'idéal engendré par les $\iota_n(e_i)$ pour $1 \leq i \leq h$ et (e_1, \dots, e_h) une base de a_h' , où ι_n est la structure de niveau n universelle sur $\text{Def}_{h';n}$.

PROPOSITION I.1.6.5. – *Pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in G/P(d, h, n)$, $\text{Def}_{d,n,a}^{\geq h}$ est régulier de dimension $d - h$.*

Preuve. – Soit (w_1, \dots, w_h) une base de a ; pour $1 \leq i \leq h$, on écrit $w_i = \lambda_1^i e_1 + \dots + \lambda_d^i e_d$, où (e_1, \dots, e_d) est la base canonique de $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$ et $\lambda_k^i \in \mathcal{O}_o$. Pour tout

(4) On reviendra plus précisément sur ce point au paragraphe I.4.3.

$1 \leq i \leq h$, l'idéal $(\lambda_1^i, \dots, \lambda_d^i)$ est égal à \mathcal{O}_o . Notons $(F, (f_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{O}_o})$ le \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d universel avec

$$F(X, Y) = X + Y + \dots \quad \text{et pour tout } \lambda \in \mathcal{O}_o, \quad f_\lambda(X) = i(\lambda)X + \dots$$

où i est l'injection naturelle $\mathcal{O}_o \rightarrow \text{Def}_{d,n}$. Soit \mathfrak{J}_a l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[[v_1^n, \dots, v_d^n]]$ engendré par les éléments

$$F(f_{\lambda_1^i}(v_1^n), \dots, F(f_{\lambda_{d-1}^i}(v_{d-1}^n), f_{\lambda_d^i}(v_d^n)) \dots), \quad 1 \leq i \leq h.$$

Pour tout $1 \leq i \leq h$, les équations

$$F(f_{\lambda_1^i}(v_1^n), F(f_{\lambda_2^i}(v_2^n), \dots, F(f_{\lambda_{d-1}^i}(v_{d-1}^n), f_{\lambda_h^i}(v_d^n)))) \dots) = 0.$$

s'écrivent sous la forme

$$i(\lambda_1^j)v_1^n + \dots + i(\lambda_d^j)v_d^n + \text{termes de degré } > 1.$$

La matrice $(d \times h)$ des $(\bar{\lambda}_k^j)_{1 \leq k \leq j \leq d}$ étant de rang h , $\overline{\mathbb{F}}_q[[v_1^n, \dots, v_h^n]]/\mathfrak{J}_a$ est alors isomorphe à $\overline{\mathbb{F}}_q[[u_1, \dots, u_{d-h}]]$. En notant \mathcal{J}_a l'idéal de définition de $\text{Def}_{d,n,a}^h$, on a clairement $\mathcal{J}_a \subset \mathcal{J}_a$. En outre $\mathcal{J}_a \subset \sqrt{\mathcal{J}_a}$ car d'après la proposition (9.3.3) de [3], $(\iota_n \otimes_{\text{Def}_{d,n}} \text{Def}_{d,n,a}^h)(z)$ est nilpotent pour tout $z \in a$, d'où le résultat. \square

COROLLAIRE I.1.6.6. – *Les schémas fermés réduits $M_{I,s_o}^{\geq h}$ sont réguliers pour tout a dans $G/P(d, h, n)$ où n est la multiplicité de o dans I .*

REMARQUE I.1.6.7. – Soit Y^h une composante irréductible, donc connexe, de $M_{I^o, s_o}^{\geq h}$. On note⁽⁵⁾

$$Y^{h+i} = Y^h \times_{M_{I^o, s_o}^{\geq h}} M_{I^o, s_o}^{\geq h+i}$$

et pour tout n la multiplicité de o dans I , $Y_n^h = Y^h \times_{M_{I^o, s_o}^{\geq h}} M_{I, s_o}^{\geq h} = \bigcup_{a \in G/P(d, h, n)} Y_{n,a}^h$.

Pour tout $a, a' \in G/P(d, h, n)$, on a

$$Y_{n,a}^h \cap Y_{n,a'}^h = Y_{n, a+a'}^{\dim(a+a')}$$

où l'on considère a, a' comme des facteurs directs de rang h de $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$. En particulier si Y^d est non vide, alors les $Y_{n,a}^h$ sont connexes, lisses et donc irréductibles.

Preuve. – Au-dessus de $M_{I^o, s_o}^{\geq h}$, on a $Y_n^h = \coprod_{a \in G/P(d, h, n)} Y_{n,a}^h$. En outre au-dessus de tout point géométrique de Y^h , il y a exactement $|G/P(d, h, n)| \times |\text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)|$ points géométriques de Y_n^h , de sorte que pour tout $a \in G/P(d, h, n)$, $Y_{n,a}^h$ est la réunion disjointes de $|\text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)|$ composantes irréductibles. L'inclusion $Y_{n,a}^h \cap$

(5) On ne sait pas *a priori* si Y^{h+i} est vide ou pas.

$Y_{n,a'}^h \subset Y_{n,a+a'}^{\dim(a+a')}$ est évidente. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $z \in Y_{n,a+a'}^{\dim(a+a')}$. Le complété de l'anneau local de Y_n^h en z est

$$\text{Def}_{n,a+a'}^{\dim(a+a'), d-\dim(a+a'); h} = \bigcup_{b \in G/P(\dim(a+a'), h, n)} \text{Def}_{n,b+a'}^{\dim(a+a'), d-\dim(a+a'); h}$$

de sorte que $z \in Y_{n,\tilde{a}}^h$, pour tout $\tilde{a} \subset a + a'$. □

I.2. Compléments sur la géométrie des strates

Nous verrons §I.3 et §I.4 que les relations entre les variétés d'Igusa de première et seconde espèce avec les variétés $M_{I,o}$ de Drinfeld-Stuhler, sont directement en rapport avec les liens entre la structure de niveau $\iota_{o,n}$ et la donnée d'une structure de niveau sur la partie étale, $\iota_{o,n}^{\text{ét}}$, et connexe, $\iota_{o,n}^c$, séparément, ce qui sera abordée au paragraphe suivant. Pour définir précisément les parties connexes et étales de $\iota_{o,n}$, on est amené à étudier plus précisément le scindage en parties connexe et étale des \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné sur un \mathbb{F}_q -schéma ou sur un épaissement infinitésimal.

I.2.1. Scindage en partie étale et connexe des \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné.

– On rappelle que par hypothèse le corps résiduel $\kappa(o)$ de \mathcal{O}_o est isomorphe à \mathbb{F}_q .

PROPOSITION I.2.1.1. – *Soit S un $\kappa(o)$ -schéma. Pour tout S -point de M_{I,s_o}^h , on note (V_o, φ_o) , le $(\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S)$ -module de Dieudonné qui lui est associé. Il existe alors un sous-module canonique $V_o^{\text{ét}}$ de V_o de rang $(d - h)$ stable sous l'action de φ_o tel que*

▷ $\varphi_o^{\text{ét}} := (\varphi_o)|_{V_o^{\text{ét}}} : \tau V_o^{\text{ét}} \rightarrow V_o^{\text{ét}}$ est inversible;

▷ $\varphi_o^c : \tau V_o^c \rightarrow V_o^c := V_o/V_o^{\text{ét}}$, l'application induite par φ_o , est topologiquement nilpotente;

▷ pour tout $n \geq 0$, la suite exacte⁽⁶⁾

$$0 \rightarrow (V_{o,n}^{\text{ét}}, \varphi_{o,n}^{\text{ét}}) \longrightarrow (V_{o,n}, \varphi_{o,n}) \longrightarrow (V_{o,n}^c, \varphi_{o,n}^c) \rightarrow 0$$

se scinde après le changement de base $S \xrightarrow{\text{Fr}_o^{nh}} S$.

Preuve. – On note $\tau^i \varphi_o : \tau^{i+1} V_o \rightarrow \tau^i V_o$, pour tout entier $i \geq 0$, l'application $(\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S)$ -linéaire déduite de $\varphi_o : \tau V_o \rightarrow V_o$. On pose

$$\varphi_o^{!h} := \varphi_o \circ \tau \varphi_o \circ \dots \circ \tau^{h-1} \varphi_o : \tau^h V_o \rightarrow V_o.$$

Soit $\text{Spec } R \rightarrow S$ un ouvert affine de S tel que $V_o \times_S \text{Spec } R$ est libre. Si $M_{o,R}$ est la matrice de $\varphi_o \times_S \text{Spec } R$ par rapport à une base $(b_i)_i$ de V_o , alors

$$M_{o,R}^{!h} = M_{o,R}(\tau M_{o,R}) \cdots (\tau^{h-1} M_{o,R})$$

⁽⁶⁾ On rappelle que l'indice n signifie que l'on prend la réduction modulo ϖ_o^n : $V_{o,n} = V_o/(\varpi_o^n)$, cf. la définition I.1.2.3.

est celle de $\varphi_{o,R}^{!h} := \varphi_o^{!h} \times_S \text{Spec } R$ par rapport à cette même base $(b_i)_i$.

D'après I.1.5.2 (b), pour tout $h' \geq h$, $M_{o,R,1}^{!h'}$ a un mineur inversible d'ordre $d - h$ de sorte que⁽⁷⁾ $\varphi_{o,R,1}^{!h'}(\tau^{h'} V_{o,R,1})$ est un facteur direct de $V_{o,R,1}$ de rang $d - h$ car tous les mineurs d'ordre supérieure à $d - h + 1$ sont nuls. En remarquant que pour $h_1 \leq h_2$, on a

$$\varphi_{o,R}^{!h_2}(\tau^{h_2} V_{o,R}) \subset \varphi_{o,R}^{!h_1}(\tau^{h_1} V_{o,R}),$$

on pose pour tout $h' \geq h$

$$V_{o,R,1}^{\text{et}} := \varphi_{o,R,1}^{!h'}(\tau^{h'} V_{o,R,1}) = \varphi_{o,R,1}^{!h}(\tau^h V_{o,R,1}).$$

LEMME I.2.1.2. – L'application $\varphi_{o,R,1}$ induit une application bijective

$$\varphi_{o,R,1}^{\text{et}} : \tau V_{o,R,1}^{\text{et}} \longrightarrow V_{o,R,1}^{\text{et}}.$$

Preuve. – Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau^{h+1} V_{o,R} & \xrightarrow{\tau \varphi_{o,R}^{!h}} & \tau V_{o,R} \\ & \searrow \varphi_{o,R}^{!(h+1)} & \downarrow \varphi_{o,R} \\ & & V_{o,R} \end{array}$$

permet de définir $\varphi_{o,R,1}^{\text{et}} : \tau V_{o,R,1}^{\text{et}} \rightarrow V_{o,R,1}^{\text{et}}$. En effet, étant donné $v \in V_{o,R,1}^{\text{et}}$, il existe $w \in \tau^{h+1} V_{o,R,1}$ tel que $v = \varphi_{o,R,1}^{!h}(w)$, de sorte que

$$\varphi_{o,R,1}(v \otimes \lambda) = \varphi_{o,R,1} \circ \tau \varphi_{o,R,1}^{!h}(w \otimes \lambda) = \varphi_{o,R,1}^{!h+1}(w \otimes \lambda) \in V_{o,R,1}^{\text{et}},$$

d'où l'existence de $\varphi_{o,R,1}^{\text{et}}$.

En ce qui concerne la surjectivité de $\varphi_{o,R,1}^{\text{et}}$, soit $v = \varphi_{o,R,1}^{!h+1}(w) \in V_{o,R,1}^{\text{et}}$ avec $w \in \tau^{h+1} V_{o,R,1}$. On a alors $v = \varphi_{o,R,1} \circ \tau \varphi_{o,R,1}^{!h}(w)$ avec $\tau \varphi_{o,R,1}^{!h}(w) \in \tau V_{o,R,1}^{\text{et}}$ d'où le résultat.

Pour l'injectivité soit $(e_{1,R}, \dots, e_{j,R})$ une base de $V_{o,R,1}^{\text{et}}$ en tant que R -module: $(e_{i,R} \otimes 1)_{i=1, \dots, j}$ est alors une base de $\tau V_{o,R,1}^{\text{et}}$ et $(\varphi(e_{i,R} \otimes 1))_{i=1, \dots, j}$ est d'après la surjectivité de $\varphi_{o,R,1}^{\text{et}}$ une base de $V_{o,R,1}^{\text{et}}$. Ainsi si $v = \sum_{i=1}^j e_{i,R} \otimes \lambda_j$ appartient à $\text{Ker } \varphi_{o,R,1}^{\text{et}}$, on en déduit que l'on a $\sum_{i=1}^j \lambda_i \varphi_{o,R,1}(e_{i,R} \otimes 1) = 0$ soit $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, j$. \square

On remarque par ailleurs que $(\varphi_{o,R,1}^c)^{!h} : \tau^h V_{o,R,1}^c \rightarrow V_{o,R,1}^c$ est nulle. On définit alors globalement sur S , $V_{o,1}^{\text{et}} := \varphi_{o,1}^{!h}(V_{o,1})$ ainsi que $V_{o,1}^c = V_{o,1}/V_{o,1}^{\text{et}}$. Pour tout entier n , on définit de même

$$V_{o,n}^{\text{et}} := \varphi_{o,n}^{!nh}(\tau^{nh} V_{o,n})$$

(7) L'indice 1 désigne la réduction modulo ϖ_o

qui est un facteur direct de $V_{o,n}$ de rang $n(d-h)$. De la même façon $\varphi_{o,n}^{\text{et}} : \tau V_{o,n}^{\text{et}} \rightarrow V_{o,n}^{\text{et}}$ est bijective et $(\varphi_{o,n}^c)^{\text{!nh}}$ est nulle. Pour $n \geq n'$, on a une flèche naturelle

$$V_{o,n}^{\text{et}} = \varphi_{o,n}^{\text{!nh}}(\tau^{nh} V_{o,n}) \xrightarrow{r_{n',n}} \varphi_{o,n'}^{\text{!nh}}(\tau^{nh} V_{o,n}) = \varphi_{o,n'}^{\text{!nh}}(\tau^{n'h} V_{o,n'}) = V_{o,n'}^{\text{et}}$$

telle que pour $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, on a $r_{n_3,n_1} = r_{n_3,n_2} \circ r_{n_2,n_1}$. On pose alors

$$V_o^{\text{et}} := \varinjlim_n V_{o,n}^{\text{et}}$$

qui est ainsi stable sous l'action de φ_o . Soit $V_o^c := V_o/V_o^{\text{et}}$ de sorte que $\varphi_o^c : \tau V_o^c \rightarrow V_o^c$ est topologiquement nilpotente.

Montrons que le noyau $N_{o,n}$ de $\varphi_{o,n}^{\text{!nh}} : \tau^{nh} V_{o,n} \rightarrow V_{o,n}$ est un relèvement de $\tau^{nh} V_{o,n}^c$. L'application $\varphi_{o,n}^{\text{et}}$ étant injective, on a $N_{o,n} \cap \tau^{nh} V_{o,n}^{\text{et}} = \{0\}$. Soit alors $x \in \tau^{nh} V_{o,n}$ et $v = \varphi_{o,n}^{\text{!nh}}(x)$. D'après la surjectivité de $\varphi_{o,n}^{\text{et}}$, soit $w \in \tau^{nh} V_{o,n}^{\text{et}}$ tel que $v = \varphi_{o,n}^{\text{et,!nh}}(w)$. On a alors $x - w \in N_{o,n}$ de sorte que

$$\tau^{nh} V_{o,n} = N_{o,n} \oplus \tau^{nh} V_{o,n}^{\text{et}}$$

Par ailleurs l'égalité $\varphi_{o,n}^{\text{!nh}} \circ \varphi_{o,n}^{\text{nh}} = \varphi_{o,n}^{\text{!nh+1}} = \varphi_{o,n} \circ \tau \varphi_{o,n}^{\text{!nh}}$, montre que $\tau^{nh} \varphi_{o,n} : \tau^{nh+1} V_{o,n} \rightarrow \tau^{nh} V_{o,n}$ induit une application $\varphi_{o,n}^c : \tau N_{o,n} \rightarrow N_{o,n}$, d'où le résultat. \square

En ce qui concerne les déformations, on a la proposition suivante.

COROLLAIRE I.2.1.3. – *Soit S un $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ schéma artinien de réduit \bar{S} et $S \rightarrow M_{I,o}$ tel que $\bar{S} \rightarrow M_{I,o}$ se factorise par $M_{I,s_o}^{\text{!h}}$. En notant (V_o, φ_o) le \mathcal{O}_o -module de Dieudonné associé à $S \rightarrow M_{I,o}$, il existe alors un sous- \mathcal{O}_o -module de Dieudonné étale $(V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}})$ tel que $V_{o,n}^{\text{et}}$ soit l'image de $\varphi_{o,n}^{\text{!nh}}$. De plus, si on définit (V_o^c, φ_o^c) par la suite exacte*

$$0 \rightarrow (V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}}) \rightarrow (V_o, \varphi_o) \rightarrow (V_o^c, \varphi_o^c) \rightarrow 0,$$

alors φ_o^c est topologiquement nilpotente.

Preuve. – On raisonne localement sur un ouvert affine $\text{Spec } R \rightarrow S$, pour R une \mathcal{O}_o -algèbre artinienne et \mathcal{M} un idéal nilpotent de R . Classiquement on peut se ramener à $\mathcal{M}^2 = (0)$. On choisit sur \bar{R} une décomposition $\bar{V}_o = \bar{V}_o^{\text{et}} \oplus \bar{V}_o^c$ ainsi que des bases $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{d-h})$ de \bar{V}_o^{et} et $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_h)$ de \bar{V}_o^c de sorte que la matrice de $\bar{\varphi}_o$ par rapport à cette base est

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_{\text{et}} & \bar{M}_{\text{ext}} \\ 0 & \bar{M}_c \end{pmatrix}.$$

On fixe des relèvements quelconques (e_1, \dots, e_{d-h}) et (f_1, \dots, f_h) ; la matrice de φ_o dans ces bases est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{\text{et}} & M_{\text{ext}} \\ M_1 & M_c \end{pmatrix}$$

où \mathcal{M}_1 est à coefficient dans \mathcal{M} . En effectuant le changement de base via la matrice $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ P_0 & \text{Id} \end{pmatrix}$, où P_0 est à coefficients dans \mathcal{M} de sorte que ${}^\tau P_0$ est la matrice nulle, on obtient

$$\begin{pmatrix} M_{\text{et}} & M_{\text{ext}} \\ P_0 M_{\text{et}} + \mathcal{M}_1 & P_0 M_{\text{ext}} + M_c \end{pmatrix}$$

de sorte qu'en choisissant $P_0 = -\mathcal{M}_1 M_{\text{et}}^{-1}$, on obtient une décomposition $V_o = V_o^{\text{et}} \oplus V_o^c$ dans laquelle la matrice de φ_o est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{\text{et}} & M_{\text{ext}} \\ 0 & M'_c \end{pmatrix}$$

avec M'_c topologiquement nilpotente. On remarque par ailleurs que V_o^{et} est à nouveau défini globalement sur S comme l'image de $\varphi_{o,n}^{\text{lnh}}$. \square

DÉFINITION I.2.1.4. – Dans la suite, dans la situation du corollaire I.2.1.3, on notera $\mathcal{F}_o^{*,c}$ le sous- \mathcal{O}_o -module de \mathcal{F}_o^* des formes qui s'annulent sur $\mathcal{F}_o^{\text{et}}$. Celui ci est stable sous ϕ_o^* et on notera $\phi_o^{*,c}$ la restriction de ϕ_o^* à $\mathcal{F}_o^{*,c}$. On remarque ainsi que $\mathcal{F}_o^{\text{et},*}$ est isomorphe au quotient $\mathcal{F}_o^*/\mathcal{F}_o^{*,c}$ et on note $\phi_o^{\text{et},*}$ l'application induite par ϕ_o^* . On notera parfois $\mathcal{F}_o^{*,\text{et}}$ un supplémentaire de $\mathcal{F}_o^{*,c}$, qui est isomorphe à $\mathcal{F}_o^{\text{et},*}$ mais qui n'est pas stable par ϕ_o^* .

I.2.2. Retour sur les structures de niveaux. – Soit S un $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ -schéma artinien, \mathcal{I} un faisceau d'idéaux nilpotents et \bar{S} le sous-schéma fermé associé. Soit $S \rightarrow M_{I,o}$ un S -point tel que $\bar{S} \rightarrow M_{I,o}$ se factorise par $M_{I,s_o,a}^{\text{=h}}$. On note $(\mathcal{F}_{o,n}, \phi_{o,n})$ le ϕ -faisceau associé sur S . D'après le paragraphe précédent, on écrit $\mathcal{F}_{o,n}^*$ comme une somme directe $\mathcal{F}_{o,n}^{*,\text{et}} \oplus \mathcal{F}_{o,n}^{*,c}$ où la matrice de $\phi_{o,n}^*$ dans une base adaptée à cette décomposition est de la forme

$$M_{o,n}^* = \begin{pmatrix} M_{o,n}^{*,\text{et}} & 0 \\ M_{o,n}^{*,\text{ext}} & M_{o,n}^{*,c} \end{pmatrix}.$$

On note $\iota_{o,n} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathcal{F}_{o,n}^*$ la structure de niveau n associée. Pour tout élément $z \in (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$, on a

$$M_{o,n}^* \iota_{o,n}(z) = \iota_{o,n}(z)^q,$$

c'est-à-dire en écrivant $\iota_{o,n}(z) = \iota_{o,n}^{\text{et}}(z) + \iota_{o,n}^c(z)$:

$$(I.2.2.1) \quad M_{o,n}^{*,\text{et}} \iota_{o,n}^{\text{et}}(z) = \iota_{o,n}^{\text{et}}(z)^q,$$

$$(I.2.2.2) \quad M_{o,n}^{*,\text{ext}} \iota_{o,n}^{\text{et}}(z) + M_{o,n}^{*,c} \iota_{o,n}^c(z) = \iota_{o,n}^c(z)^q.$$

I.2.2.1. — Par définition, l'ensemble $\{z \in (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d / \iota_{o,n}^{\text{et}}(z) = 0\}$ est égal au sous-module a . La condition de Drinfeld s'exprime alors comme suit:

▷ $\iota_{o,n}^{\text{et}} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d/a \times S \simeq (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h} \times S \rightarrow \mathcal{F}_{o,n}^{\text{et},*} \simeq \mathcal{F}_{o,n}^{*,\text{et}}$ est un isomorphisme vérifiant I.2.2.1;

▷ $\iota_{o,n}^c : a \rightarrow \mathcal{F}_{o,n}^{*,c}$ est une structure de niveau au sens de Drinfeld.

Remarque : réciproquement si on se donne $\iota_{o,n}^{\text{et}}$ et $\iota_{o,n}^c$ comme ci-dessus, le choix d'un supplémentaire de a permet de définir une application

$$\iota_{o,n} = \iota_{o,n}^{\text{et}} \oplus \iota_{o,n}^c.$$

Le problème est qu'elle ne vérifiera pas obligatoirement la relation I.2.2.2 sauf par exemple si $M_{o,n}^{\text{ext}}$ est nulle. En outre il n'est pas certain que l'on puisse définir $\iota_{o,n}^c$ sur b telle que I.2.2.2 soit vérifiée.

PROPOSITION I.2.2.2. – *Si R est un $\kappa(o)$ -anneau réduit et $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ un R -point de $M_{I,s_o,a}^{\overline{h}}$, alors $\iota_{o,n}^c : a \rightarrow \mathcal{F}_{o,n}^{*,c}$ est nulle.*

Preuve. – Soit \mathcal{M} un idéal maximal de R ; $\iota_{o,n}^c \otimes_R R/\mathcal{M}$ est alors nulle, de sorte que $\iota_{o,n}^c$ est à coefficients dans $\bigcap_{\mathcal{M} \text{ maximal}} \mathcal{M}$ qui est l'idéal nul car R est réduit. \square

PROPOSITION I.2.2.3. – *Le morphisme d'oubli du niveau $M_{I,s_o,\text{red}}^{\overline{h}} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$ est fini et plat de degré*

$$\# \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n) / \# \text{GL}_h(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où n est la multiplicité de o dans I .

Preuve. – La platitude découle de l'équivalent du théorème de Serre-Tate, proposition I.1.6.3, et des résultats de Drinfeld rappelés au paragraphe I.1.1. Calculons alors les degrés. L'ensemble des points géométriques de $M_{I,\overline{s}_o}^{\overline{h}} := M_{I,s_o}^{\overline{h}} \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spec } \overline{\kappa}(o)$ au-dessus d'un point géométrique donné de $M_{I^o,\overline{s}_o}^{\overline{h}}$, est de cardinal

$$\#G/P(d, h, n) \# \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n).$$

Soit s_I un tel point géométrique de $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$ au-dessus d'un point s de $M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$. Soient alors $(M_{I,s_o,\text{red}}^{\overline{h}})_{s_I}^{\widehat{}}$ et $(M_{I^o,s_o}^{\overline{h}})_s^{\widehat{}}$ les complétés formels de respectivement $M_{I,s_o,\text{red}}^{\overline{h}}$ et $M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$ aux points s_I et s . D'après l'équivalent du théorème de Serre-Tate, et avec les notations du paragraphe I.1.1 et plus particulièrement de la note 3, on a

$$(M_{I^o,s_o}^{\overline{h}})_s^{\widehat{}} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^0, \dots, w_{d-h}^0]] \quad \text{et} \quad (M_{I,s_o,\text{red}}^{\overline{h}})_{s_I}^{\widehat{}} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^n, \dots, w_{d-h}^n]].$$

D'après [11], le degré de $\overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^0, \dots, w_{d-h}^0]] \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_q[[w_1^n, \dots, w_{d-h}^n]]$ est égal à

$$q^{nh(d-h)} = \#(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^{h(d-h)},$$

d'où le résultat. \square

COROLLAIRE I.2.2.4. – *Le morphisme $M_{I,s_o,a,\text{red}}^{\overline{h}} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$ est fini et plat de degré*

$$\#(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^{h(d-h)} \# \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où n est la multiplicité de o dans I .

I.2.2.5. — La proposition suivante justifie l'existence du morphisme de la proposition I.3.2.1. En langage clair, étant donné un point $\bar{S} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\bar{h}}$ et une déformation de $\bar{S} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$, obtenu via le morphisme d'oubli $M_{I,s_o,a}^{\bar{h}} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$, ainsi que des déformations des parties étale et connexe de la structure de niveau en la place o , on construit une déformation canonique de $\bar{S} \xrightarrow{\text{Frob}_o^{n_h}} \bar{S} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\bar{h}}$, où n est la multiplicité de o dans I .

PROPOSITION I.2.2.6. — *Soit S un $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ -schéma artinien, un sous-faisceau d'idéaux nilpotents \mathcal{I}_S de \mathcal{O}_S et \bar{S} le fermé de S associé. Soit $\bar{S} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\bar{h}}$ et $S \rightarrow M_{I^o,o}$ une déformation du morphisme composé*

$$\bar{S} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\bar{h}} \longrightarrow M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}.$$

Soit $(V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}})$ le sous- \mathcal{O}_o -module de Dieudonné étale de (V_o, φ_o) associé à $S \rightarrow M_{I^o,o}$, donné par le corollaire I.2.1.3. On note $V_o^{,c}$ le sous- \mathcal{O}_o -module des éléments de V_o^* qui s'annulent sur V_o^{et} . Soient b un supplémentaire de a dans $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$, où n est la multiplicité de o dans I , et*

$$\iota_{o,n}^{\text{et}} : b \longrightarrow V_{o,n}^{\text{et},*} = V_{o,n}^*/V_{o,n}^{*,c} \quad \text{et} \quad \iota_{o,n}^c : a \longrightarrow V_{o,n}^{*,c}$$

des déformations respectives de

$$\bar{\iota}_{o,n}^{\text{et}} : b \longrightarrow \bar{V}_{o,n}^{\text{et},*} = \bar{V}_{o,n}^*/\bar{V}_{o,n}^{*,c} \quad \text{et} \quad \bar{\iota}_{o,n}^c : a \longrightarrow \bar{V}_{o,n}^{*,c}.$$

Associée à toutes ces données, il existe alors une déformation canonique de

$$\bar{S} \xrightarrow{\text{Frob}_o^{n_h}} \bar{S} \longrightarrow M_{I,s_o,a}^{\bar{h}}$$

telle que son \mathcal{O}_o -module de Dieudonné $(\tilde{V}_o, \tilde{\varphi}_o)$ se scinde modulo ϖ_o^n en partie étale et connexe.

Preuve. — D'après la proposition I.1.6.3, il suffit de donner une déformation de $(\tau^{nh} \bar{V}_o, \tau^{nh} \bar{\varphi}_o)$ munie de sa structure de niveau n , $\tau^{nh} \bar{\iota}_{o,n}$. Soit (V_o, φ_o) le \mathcal{O}_o -module de Dieudonné associé à $S \rightarrow M_{I^o,o}$. D'après le corollaire I.2.1.3, on a $V_o = V_o^{\text{et}} \oplus V_o^c$, où V_o^{et} est défini canoniquement et est stable par φ_o dont la matrice dans une base associée à cette décomposition est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_o^{\text{et}} & M_o^{\text{ext}} \\ 0 & M_o^c \end{pmatrix}$$

avec M_o^{et} inversible. On considère alors $\tilde{V}_o = V_o^{\text{et}} \oplus V_o^c \varpi_o^n$ défini canoniquement et muni de l'application $\tilde{\varphi}_o$ déduite de φ_o , dont une matrice dans une base adaptée à l'écriture ci-dessus est

$$\begin{pmatrix} M_o^{\text{et}} & \varpi_o^n M_o^{\text{ext}} \\ 0 & M_o^c \end{pmatrix}$$

de sorte que $(\tilde{V}_{o,n}, \tilde{\varphi}_{o,n})$ se scinde en partie étale et connexe. En outre comme $\tilde{\varphi}_o^{!nh}$ induit un isomorphisme $\tau^{nh}\tilde{V}_o \simeq \tilde{V}_o^{\text{ét}} \oplus \tilde{V}_o^c \varpi_o^n$, on en déduit que $(\tilde{V}_o, \tilde{\varphi}_o)$ est une déformation de $(\tau^{nh}\tilde{V}_o, \tilde{\varphi}_o^{nh})$. La structure de niveau $\tilde{t}_{o,n}$ est alors définie comme la composée de $t_{o,n}^c \oplus t_{o,n}^{\text{ét}}$ et de l'inclusion $V_o^* \hookrightarrow \tilde{V}_o^*$, définition licite car $(\tilde{V}_{o,n}, \tilde{\varphi}_{o,n})$ se scinde en partie étale et connexe. \square

REMARQUE I.2.2.7. – On reprend les notations de la proposition précédente. À $f : S \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\text{ét}}$, on associe $S \rightarrow M_{I,o}$ ainsi que des déformations $t_{o,n}^{\text{ét}}$ et $t_{o,n}^c$ de respectivement $\tilde{t}_{o,n}^{\text{ét}}$ et $\tilde{t}_{o,n}^c$. La proposition précédente fournit alors une déformation $S \rightarrow M_{I,o}$ de $\tilde{S} \xrightarrow{\text{Frob}_o^{\text{ét}}} \tilde{S} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\text{ét}}$. Le morphisme ainsi défini n'est alors rien d'autre que $f \circ \text{Frob}_o^{nh}$.

DÉFINITION I.2.2.8. – On note $\widehat{M}_{I,o,=h,a}$ l'ouvert au-dessus de la fibre géométrique $M_{I,s_o,a}^{\text{ét}} := M_{I,s_o,a}^{\text{ét}} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ du complété formel $\widehat{M}_{I,o,h,a}$ de $M_{I,o} \times_{\emptyset} \mathcal{O}_o^{nr}$ le long de $M_{I,s_o,a}^{\geq h}$.

I.2.3. Relation de congruence

PROPOSITION I.2.3.1. – *L'action d'un élément*

$$g_o = (g_o^c, 1) \in \text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$$

(resp. $(\varpi_o, 1)$) sur $\lim_{\leftarrow I} M_{I,s_o,1}^{\text{ét}}$ (resp. $\widehat{M}_{I,o,=h,1}$) est donnée par $\text{Frob}_o^{\text{val}(\det g_o^c)}$ (resp. Frob_o^h).

Preuve. – On reprend les notations du paragraphe I.1.3. Remarquons en premier lieu qu'il suffit de montrer le résultat pour $g_o^c \in \text{GL}_h(F_o) \cap M_h(\mathcal{O}_o)$. On rappelle que l'action de W_o sur $M_{I,o}$ est telle que l'image du \mathcal{D} -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ par un frobenius géométrique est $(\tau \mathcal{E}_i, \tau j_i, \tau t_i)$. On raisonne sur le ϕ -faisceau universel (\mathcal{F}_o, ϕ_o) sur $\lim_{\leftarrow I} S_I$ avec $S_I = M_{I,o}$. À la décomposition $(F_o/\mathcal{O}_o)^d = (F_o/\mathcal{O}_o)^h \oplus (F_o/\mathcal{O}_o)^{d-h}$ on associe la décomposition

$$(\mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o)) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o} = \mathcal{F}_{o,h}^o \oplus \mathcal{F}_{o,d-h}^o$$

L'action de g_o sur S^o est alors induite par celle à droite de $({}^t g_o^c, \text{Id})$ sur $\mathcal{F}_{o,h}^o \oplus \mathcal{F}_{o,d-h}^o$.

LEMME I.2.3.2. – *Il existe des faisceaux en \mathcal{O}_S -modules $\mathcal{F}_{o,h}$ et $\mathcal{F}_{o,d-h}$ contenus respectivement dans $\mathcal{F}_{o,h}^o$ et $\mathcal{F}_{o,d-h}^o$ tels que*

$$\mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o) = \mathcal{F}_{o,h} \oplus \mathcal{F}_{o,d-h}$$

Preuve. – On rappelle que S étant régulier, $\mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o)$ s'injecte canoniquement dans $(\mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o)) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$. On note $\mathcal{F}_{o,h}$ (resp. $\mathcal{F}_{o,d-h}$) le faisceau en \mathcal{O}_S -modules défini localement pour tout ouvert affine $\text{Spec } R \rightarrow S$, comme le R -module engendré par l'ensemble des $f_{h,R}$ (resp. $f_{d-h,R}$) tels qu'il existe $f_R \in \mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o)$ tel que $f_R \otimes 1 = f_{h,R} + f_{d-h,R}$ dans $(\mathcal{F}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} (F_o/\mathcal{O}_o)) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$. Pour tout entier n ,

$g_o^n(f_R)$ est un élément de $\mathcal{F}_{o,R}^*$ qui se décompose sous la forme $f_{d-h,R} + \varpi_o^n f_{h,R}$. Or pour n assez grand, $\varpi_o^n f_{h,R}$ appartient à $\mathcal{F}_{o,R}^*$ de sorte que $\mathcal{F}_{o,d-h} = \mathcal{F}_o^* \cap \mathcal{F}_{o,d-h}^o$ et donc $\mathcal{F}_{o,h} = \mathcal{F}_o^* \cap \mathcal{F}_{o,h}^o$ et finalement $\mathcal{F}_o^* = \mathcal{F}_{o,h} \oplus \mathcal{F}_{o,d-h}$. \square

1.2.3.3. — On note $((\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i), \iota')$ le \mathcal{D} -faisceau elliptique muni de sa structure de niveau infinie, obtenu comme l'image par g_o du \mathcal{D} -faisceau elliptique universel sur S , $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i, \iota)$. Il est alors défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}_{o,h} & \oplus & \mathcal{F}_{o,d-h})^d \longrightarrow \mathcal{E}^* \\ \downarrow g_o^c & & \downarrow \text{Id} \\ (\mathcal{F}_{o,h} & \oplus & \mathcal{F}_{o,d-h})^d \longrightarrow (\mathcal{E}'_i)^* \end{array}$$

En termes de modules de Dieudonné, d'après la proposition I.2.1.1, sur $M_{I,s_o,1}^{\equiv h}$, $\mathcal{F}_{o,d-h}$ correspond au dual de la composante étale $V_o^{\text{ét}}$ de V_o . On note $m = \text{val}(\det g_o^c)$. On rappelle que $\varphi_o^{!m} : \tau^m V_o \rightarrow V_o$ est injective et a pour image $V_o^{\text{ét}} \oplus (g_o^c \cdot V_o^c)$, de sorte que sur $M_{I,s_o,1}^{\equiv h}$, $t_i^{!m} : \tau^m \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_i$ se factorise en un isomorphisme $\tau^m \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}'_i$.

1.2.3.4. — En ce qui concerne les structures de niveaux, le seul problème se situe à la place o . Soient donc $\iota_{o,n+r} : (\mathcal{M}_o^{-n-r}/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow \mathcal{F}_{o,n+r}^*$ la structure de niveau $n+r$ en o sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ où r est assez grand. On rappelle qu'alors la structure de niveau n en o sur $(\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ est définie comme la composée de l'inclusion

$$(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \hookrightarrow (\mathcal{M}_o^{-n-r}/\mathcal{O}_o)^h / (\mathcal{M}_o^{-r}/\mathcal{O}_o)^h \oplus (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h}$$

avec $\iota_{o,n+r} \circ (\times^t g_o)$ et de l'identification de $[g_o^*] \mathcal{F}_o^*$ avec $(\mathcal{F}'_o)^*$. Sur la fibre spéciale, la partie connexe de la structure de niveau est nulle, il n'y a donc rien de plus à vérifier. Pour les déformations, on remarque que la matrice de $\phi_o^{!h}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \varpi_o' & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$ pour une uniformisante ϖ_o' de \mathcal{O}_o , d'où le résultat. \square

COROLLAIRE I.2.3.5. — Soient $(g_o^c, g_o^{\text{ét}}) \in \text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$ et $n \geq m$ assez grand tel que $(g_o^c, g_o^{\text{ét}})$ définit un morphisme

$$M_{I^o \mathcal{M}_o^n, s_o, 1}^{\equiv h} \xrightarrow{(g_o^c, g_o^{\text{ét}})} M_{I^o \mathcal{M}_o^m, s_o, 1}^{\equiv h}$$

Le diagramme suivant, où c_1 est le morphisme de restriction du niveau, est alors commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_{I^o \mathcal{M}_o^n, s_o, 1}^{\equiv h} & \xrightarrow{(g_o^c, g_o^{\text{ét}})} & M_{I^o \mathcal{M}_o^m, s_o, 1}^{\equiv h} \\ \downarrow c_1 & & \downarrow c_1 \\ M_{I^o, s_o}^{\equiv h} & \xrightarrow{\text{Frob}_o^{\text{val}(\det g_o^c)}} & M_{I^o, s_o}^{\equiv h} \end{array}$$

COROLLAIRE I.2.3.6. – L'action d'un élément de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$ de la forme $\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ * & I_{d-h} \end{pmatrix}$ est triviale sur $M_{I,s_o,1}^{\overline{h}}$

I.3. Variétés d'Igusa de première espèce

I.3.1. Définition. – Soit $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(S)$ le $\kappa(o)$ -schéma dont les S -points sont les S -points de $M_{I^o,s_o}^{\overline{h}}$ munis d'un isomorphisme

$$\iota_{o,n}^{\mathrm{et}} : (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h} \times S \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{o,n}^{*,\mathrm{et}} \simeq \mathcal{F}_{o,n}^{\mathrm{et},*} = \mathcal{F}_{o,n}^*/\mathcal{F}_{o,n}^{*,c}$$

tel que $\phi_{o,n}^{*,\mathrm{et}}, \circ \iota_{o,n} = \tau \iota_{o,n}$, selon les notations habituelles.

I.3.1.1. — On a alors un morphisme d'oubli de la partie connexe de la structure de niveau

$$i : M_{I,s_o,a}^{\overline{h}} \longrightarrow \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$$

où n est la multiplicité de o dans I et où i est donné par

$$((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I^o}, \iota_{o,n}) \longmapsto ((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I^o}, \iota_{o,n}^{\mathrm{et}}).$$

PROPOSITION I.3.1.2. – Pour tout élément a de $G/P(d, h, n)$, il existe un morphisme $g_{n,a} : \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \rightarrow M_{I,s_o,a}^{\overline{h}}$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M_{I,s_o,a}^{\overline{h}} & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_o^{nh}} & M_{I,s_o,a}^{\overline{h}} & & \\ & \searrow i & \nearrow g_{n,a} & & \\ & & \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_o^{nh}} & \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & M_{I^o,s_o}^{\overline{h}} & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_o^{nh}} & M_{I^o,s_o}^{\overline{h}} \end{array}$$

où n est la multiplicité de o dans I . Ainsi le morphisme radiciel $g_{n,a}$ se factorise en une isomorphisme $g_{n,a,\mathrm{red}} : \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \rightarrow M_{I,s_o,a,\mathrm{red}}^{\overline{h}}$.

Preuve. – Le morphisme de schéma $g_{m,a}$ est défini de la façon suivante. Étant donné un S -point de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}$, il lui correspond un \mathcal{D} -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)/S$ muni d'une I^o -structure de niveau et de l'isomorphisme $\iota_{o,m}^{\mathrm{et}}/S$. On lui associe alors le S -point

$$\tau^{mh}(\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \tau^{mh} \iota_{I^o}, \iota_{o,m}$$

de $M_{o,m,a}$ défini comme suit. D'après la proposition I.2.1.1, $\tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^*, \phi_{o,m}^*)$ se scinde en partie étale et connexe. Soit b un supplémentaire de a dans $(\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d$. On définit alors la structure de niveau m :

$$\iota_{o,m} : (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d = a \oplus b \longrightarrow \tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^*)^* = \tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^c)^* \oplus \tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^{\mathrm{et}})^*$$

comme étant triviale sur a et telle que sa restriction à b soit donnée par $\tau^{mh}(\iota_{o,m}^{\text{et}})$. Vu la stabilité de $\tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^c)^*$ et de $\tau^{mh}(\mathcal{F}_{o,m}^{\text{et}})^*$ par $\tau^{mh}\phi_{o,m}^*$, on définit bien ainsi une \mathcal{M}_o^m -structure de niveau sur $\tau^{mh}(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ de telle sorte que la classe d'équivalence de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ est indépendante du choix de b et de $(\mathcal{F}_{o,m}^{\text{et}})^*$.

Vérifions alors la commutativité du triangle

$$\begin{array}{ccc}
 M_{I,s_o,a}^{\bar{h}} & \xrightarrow{\text{Frob}_o^{nh}} & M_{I,s_o,a}^{\bar{h}} \\
 & \searrow i & \nearrow g_{n,a} \\
 & \mathcal{J}_{I^o,n}^{\bar{h}} &
 \end{array}$$

de l'énoncé, les autres commutativités en découlant de manière immédiate. Soit $S' = \text{Spec } R \rightarrow S$ un ouvert affine tel que $\mathcal{F}_{o,R}$ est libre et soit $\iota_{o,m}^c/S'$ une structure de niveau m sur $(\mathcal{F}_{o,R,m}^c)^*$. On peut choisir une base de $(\mathcal{F}_{o,R,m}^c)^*$ de sorte que la matrice de $\phi_{o,m}^{c,*}$ relativement à ce choix soit de la forme

$$\begin{pmatrix}
 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 1 & \ddots & & \vdots \\
 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Soit $z \in (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^h$, on pose $\iota_{o,m}^c(z) = {}^t(x_1, \dots, x_h)$ avec $x_i = \sum_{k=0}^{m-1} x_i^k \omega_o^k$. La relation ${}^t(x_1^q, \dots, x_h^q) = \phi_{o,m}^{c,*}({}^t(x_1, \dots, x_h))$ permet d'exprimer tous les x_i^k en fonction des $(x_1^0)^{q^i}$ pour $0 \leq i \leq mh$. De plus, comme $(M_{o,n}^{\text{ext},1,mh})^*$ est nulle d'après I.2.2.6, la condition de Drinfeld s'exprime par $(x_1^0)^{q^{mh}} = 0$ de sorte que $\tau^{mh}(\iota_{o,m}^c)$ est triviale.

Le schéma $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\bar{h}}$ étant réduit, $g_{n,a}$ se factorise en un morphisme $g_{n,a,\text{red}} : \mathcal{J}_{I^o,n}^{\bar{h}} \rightarrow M_{I,s_o,a,\text{red}}^{\bar{h}}$ qui est, d'après ce qui précède, une bijection au niveau des points géométriques et tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{J}_{I^o,n}^{\bar{h}} & \xrightarrow{g_{n,a,\text{red}}} & M_{I,s_o,a,\text{red}}^{\bar{h}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_{I^o,s_o}^{\bar{h}} & \xrightarrow{\text{Frob}_o^{nh}} & M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}
 \end{array}$$

D'après le corollaire I.2.2.4, $M_{I,s_o,a,\text{red}}^{\bar{h}} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$ est fini et plat de degré

$$\#(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^{h(d-h)} \# \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où n est la multiplicité de o dans I . De même $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\bar{h}} \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$ est fini et plat de degré $\# \text{GL}_{d-h}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$ et $M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$ étant régulier de dimension $d - h$, $M_{I^o,s_o}^{\bar{h}} \xrightarrow{\text{Frob}_o^{nh}} M_{I^o,s_o}^{\bar{h}}$

est de degré $\#(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^{h(d-h)}$. Comme $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\neq h}$ et $M_{I,s_o,a,\text{red}}^{\neq h}$ sont lisses, on en déduit que $g_{n,a,\text{red}}$ est un isomorphisme. \square

COROLLAIRE I.3.1.3. – *Pour tout $m \geq m'$, on a des morphismes de transitions*

$$\mathcal{J}_{I^o,m}^{\neq h} \xrightarrow{\text{Frob}_o^{(m-m')h}} \mathcal{J}_{I^o,m'}^{\neq h}$$

et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{I^o,m}^{\neq h} & \xrightarrow{\text{Frob}_o^{(m-m')h}} & \mathcal{J}_{I^o,m'}^{\neq h} \\ \downarrow g_{m,a} & & \downarrow g_{m',a'} \\ M_{I^o,\mathcal{M}_o^m,s_o,a}^{\neq h} & \xrightarrow{c_1} & M_{I^o,\mathcal{M}_o^{m'},s_o,a'}^{\neq h} \end{array}$$

où c_1 est le morphisme de restriction du niveau.

I.3.2. Expression du complété formel de $M_{I,o}$ le long d'une strate. – Pour un idéal I de A et m un entier, on considère l'extension étale

$$\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m} \longrightarrow \widehat{M_{I^o,=h}}$$

de fibre spéciale $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\neq h} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q \rightarrow M_{I^o,s_o}^{\neq h}$. On considère aussi

$$\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(t) \longrightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}$$

l'espace classifiant des structures de niveau t sur la partie connexe du φ -faisceau universel sur $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}$.

PROPOSITION I.3.2.1. – *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\hat{g}_{n,a} : \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,n}(n) \longrightarrow \widehat{M_{I^o,=h,a}}$$

qui prolonge le morphisme $g_{n,a} : \mathcal{J}_{I^o,n}^{\neq h} \rightarrow M_{I^o,s_o,a}^{\neq h}$ défini au paragraphe précédent et tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,n}(n) & \xrightarrow{\hat{g}_{n,a}} & \widehat{M_{I^o,=h,a}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{M_{I^o,=h}} & \xrightarrow{\text{Frob}_o^{nh}} & \widehat{M_{I^o,=h}} \end{array}$$

Preuve. – La définition de $\hat{g}_{m,a}$ découle directement de la proposition I.2.2.6, il ne reste plus qu'à voir qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit donc S un $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ -schéma muni d'un sous-faisceau d'idéaux nilpotents de \mathcal{O}_S dont le fermé associé est \bar{S} et $(S \xrightarrow{f_i} \mathcal{J}_{I^o,m}^{\neq h}, i_{o,n}^c)$ pour $i = 1, 2$, dont les images par $\hat{g}_{m,a}$ sont des déformations

isomorphes de $\bar{S} \rightarrow \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}} \rightarrow M_{I, s_o, a}^{\bar{h}}$. Notons $({}_i V_o, {}_i \varphi_o)$ les \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné sur S associés à f_i pour $i = 1, 2$. Par hypothèse, on a un isomorphisme

$$h : {}_1 \tilde{V}_o = {}_1 V_o^{\text{et}} + \varpi_o^n {}_1 V_o^c \xrightarrow{\sim} {}_2 \tilde{V}_o = {}_2 V_o^{\text{et}} + \varpi_o^n {}_2 V_o^c$$

tel que \bar{h} est l'identité et commute aux actions de ${}_i \varphi_o$. Clairement h induit un isomorphisme $h^{\text{et}} : {}_1 V_o^{\text{et}} \xrightarrow{\sim} {}_2 V_o^{\text{et}}$. Soit donc $v_1 \in {}_1 V_o^c$: $h(\varpi_o^n v_1) = \varpi_o^n v_2 + w$ avec $v_2 \in {}_2 V_o^c$ et $w \in {}_2 V_o^{\text{et}}$. On a

$$\begin{aligned} h({}_1 \varphi_o^{\text{lnh}}(\varpi_o^n v_1)) &= h(\varpi_o^n(\varpi_o^n u_1 + u_2)) && \text{avec } u_1 \in {}_1 V_o^c, u_2 \in {}_1 V_o^{\text{et}} \\ &= \varpi_o^n w' && \text{avec } w' \in {}_2 V_o \\ &= {}_2 \varphi_o^{\text{lnh}}(\varpi_o^n v_2 + w) \end{aligned}$$

soit ${}_2(\varphi_o^{\text{et}})^{\text{lnh}}(w) \in \varpi_o^n {}_2 V_o^{\text{et}}$, soit $w \in \varpi_o^n {}_2 V_o^{\text{et}}$. On en déduit donc un morphisme ${}_1 V_o^c \rightarrow {}_2 V_o$ et finalement h provient d'un isomorphisme ${}_1 V_o \simeq {}_2 V_o$. Si en outre $\iota_{o, n, 1}$ et $\iota_{o, n, 2}$ sont isomorphes, il est clair du fait que les ${}_i \tilde{V}_{o, n}$, pour $i = 1, 2$, se scindent en partie étale et connexe, que les triplés $({}_i V_o, \iota_{o, n}^{\text{et}}, \iota_{o, n}^c)$ pour $i = 1, 2$, sont isomorphes. Pour des raisons de dimension, $\hat{g}_{m, a}$ induit alors un isomorphisme sur les espaces tangents, c'est donc un isomorphisme. \square

Remarque : soit $i : \widehat{M}_{I^o, =h, a} \rightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, n}(n)$ la flèche donnée par

$$i((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I^o}, \iota_{o, n}) = ((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I^o}, \iota_{o, n}^{\text{et}}, \iota_{o, n}^c)$$

qui prolonge celle définie au paragraphe précédent. Le composé

$$\widehat{M}_{I^o, =h, a} \longrightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, n}(n) \xrightarrow{\hat{g}_{n, a}} \widehat{M}_{I^o, =h, a}$$

est $\text{Frob}_o^{\text{nh}}$.

I.3.3. Correspondances de Hecke

PROPOSITION I.3.3.1. – *La tour $(\mathcal{J}_{I^o, n}^{\bar{h}})_n$ est munie de correspondances de Hecke associées aux éléments de $\text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$, compatibles aux morphisme $g_{m, a}$, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 0$, et tout élément $(g_o^{\text{et}}, r) \in \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$, il existe $m_0 \geq n$ ainsi que des morphismes $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}} \xrightarrow{(g_o^{\text{et}}, r)} \mathcal{J}_{I^o, n}^{\bar{h}}$ pour tout $m \geq m_0$ compatibles aux morphismes de restriction du niveau, tels que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}} & \xrightarrow{(g_o^{\text{et}}, r)} & \mathcal{J}_{I^o, n}^{\bar{h}} \\ \downarrow g_{m, a_m} & & \downarrow g_{n, a_n} \\ M_{I^o}^{\bar{h}} \mathcal{M}_{o, s_o, a_m}^m & \xrightarrow{(g_o^{\text{et}}, g_o^c)} & M_{I^o}^{\bar{h}} \mathcal{M}_{o, s_o, a_n}^n \end{array}$$

pour a_n, a_m des éléments de $G/P(d, h, n)$ et $G/P(d, h, m)$ respectivement tels que a_n soit l'image de a_m par la surjection canonique, et où g_o^c est un élément quelconque de $GL_h(F_o)$ tel que $r = \text{val}(\det g_o^c)$.

Preuve. – On définit les correspondances de Hecke sur $\mathcal{J}_{I_o, m}^{-h}$ associées aux éléments de $GL_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$, en procédant comme suit.

– Soit $g_o^{\text{et}} \in GL_{d-h}(F_o)$ tel que $g_o^{\text{et}} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$. On choisit m et n tels que le noyau de ${}^t g_o^{\text{et}} : (F_o/\mathcal{O}_o)^{d-h} \rightarrow (F_o/\mathcal{O}_o)^{d-h}$ est contenu dans $(\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h}$ et tels que $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h}$ est contenu dans

$$\text{Im}({}^t g_o^{\text{et}} : (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h}) \longrightarrow (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h}.$$

Soient $S = \mathcal{J}_{I_o, m}^{-h}$ et $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I_o}, \iota_{o, m}^{\text{et}})$ l'objet universel de $\mathcal{J}_{I_o, m}^{-h}$. À g_o^{et} on associe via la structure de niveau $\iota_{o, m}^{\text{et}}$, le morphisme $[g_o^{\text{et}}] : \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}} \rightarrow \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}}$ défini comme au paragraphe I.1.3 du chapitre précédent.

▷ L'action de $(g_o^{\text{et}}, -k)$ pour $g_o^{\text{et}} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$ et k un entier naturel assez grand tel que $\varpi_o^{[k/h]}(g_o^{\text{et}})^{-1} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$, de sorte que $\varpi_o^{[k/h]} \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}} \subset [g_o^{\text{et}}] \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}}$, est alors définie comme suit. Soit \mathcal{E}'_i défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_{o, n}^{\text{et}} + (\varphi_o^c)^{!k}(\tau^k \mathcal{E}_{o, n}^c) \\ \downarrow & & \downarrow [g_o^{\text{et}}] + i_o^c \\ \mathcal{E}_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_{o, m} = \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}} \oplus \mathcal{E}_{o, m}^c \end{array}$$

où i_o^c est l'inclusion canonique.

On rappelle que modulo $\mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}}$, on a $(\varphi_o^c)^{!h}(\tau^h \mathcal{E}_o^c) = \varpi_o \mathcal{E}_o^c$, et donc l'image par φ_o de $\tau((\varphi_o^c)^{!k}(\tau^k \mathcal{E}_o^c))$ est incluse dans $[g_o^{\text{et}}](\mathcal{E}_{o, n}^{\text{et}}) + (\varphi_o^c)^{!k}(\tau^k \mathcal{E}_{o, n}^c)$, ce qui permet de définir des applications $t'_i : \tau \mathcal{E}'_i \rightarrow \mathcal{E}'_{i+1}$ déduites des t_i . Les \mathcal{E}'_i peuvent ainsi être organisés en un \mathcal{D} -faisceau elliptique et on peut de plus le munir de la \mathcal{M}_o^n -structure de niveau $\iota'_{o, n}$ sur la partie étale déduite de $\iota_{o, m}^{\text{et}}$. Le \mathcal{D} -faisceau elliptique image par (g_o^{et}, k) de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I_o}, \iota_{o, m}^{\text{et}})$ est alors $((\tau^{m-n} \mathcal{E}'_i, \tau^{m-n} j'_i, \tau^{m-n} t'_i), \tau^{m-n} \iota'_{I_o}, \tau^{m-n} \iota'_{o, n})$.

▷ On fait agir un élément ϖ_o^k , $k \geq 0$ du centre de $GL_{d-h}(F_o)$ en tordant $\mathcal{E}_o^{\text{et}}$ par le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(k, o)$, c'est-à-dire avec des notations similaires à celles introduites ci-dessus, $\mathcal{E}'_o := \varpi_o^k \mathcal{E}_o^{\text{et}} \oplus \mathcal{E}_o^c$. On peut de manière évidente définir des applications t'_i et donc organiser les \mathcal{E}'_i en un \mathcal{D} -faisceau elliptique muni d'une \mathcal{M}_o^n -structure de niveau sur la partie étale.

Soient $r \in \mathbb{Z}$ et $m \geq n$ tels que $m - n - r \geq 0$. On définit le morphisme $[r] : \mathcal{J}_{I_o, m}^{-h} \rightarrow \mathcal{J}_{I_o, n}^{-h}$ comme étant égal à Frob_o^{m-n-r} .

En remarquant que pour $k \geq 0$, $\varphi_o^{!k}$ induit un isomorphisme entre $\tau^k(\mathcal{E}_o^{\text{et}} \oplus \mathcal{E}_o^c)$ et $\mathcal{E}_o^{\text{et}} + (\varphi_o^c)^k(\mathcal{E}_o^c)$, il est facile⁽⁸⁾ de vérifier que l'on définit bien ainsi une action de $\text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$ sur $\varprojlim_m (\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h})$.

En vertu de la proposition I.2.3.1 du chapitre précédent, il est immédiat de vérifier la commutativité du diagramme de l'énoncé. \square

PROPOSITION I.3.3.2. – *La tour $(\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, n}(n))_n$ est munie de correspondances de Hecke associées aux éléments de $\text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o)$, compatibles aux morphisme $\hat{g}_{m, a}$, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 0$, et tout élément $(g_o^{\text{et}}, g_o^c) \in \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o)$, il existe $m_0 \geq n$ ainsi que des morphismes*

$$\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(m) \xrightarrow{(g_o^{\text{et}}, g_o^c)} \widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, n}(n)$$

pour tout $m \geq m_0$ compatibles aux morphismes de restriction du niveau, tels que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(m) & \xrightarrow{(g_o^{\text{et}} \times g_o^c)} & \widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, n}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h} & \xrightarrow{(g_o^{\text{et}}, \text{val}(\det g_o^c))} & \mathcal{J}_{I_o, n}^{\neq h} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(m) & \xrightarrow{(g_o^{\text{et}} \times g_o^c)} & \widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, n}(n) \\ \downarrow \hat{g}_{m, a} & & \downarrow \hat{g}_{n, a'} \\ \widehat{M}_{I_o, h, a} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_o^{\text{et}} & 0 \\ 0 & g_o^c \end{pmatrix}} & \widehat{M}_{I_o, h, a'} \end{array}$$

Preuve. – On définit une correspondance de Hecke associée à un élément (g_o^{et}, g_o^c) de $\text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o)$ sur $\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(m)$, de telle sorte que l'action induite sur $\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}$ est donnée par $(g_o^{\text{et}}, \text{val}(\det g_o^c)) \in \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$ telle qu'elle est définie ci-dessus.

\triangleright Soit g_o^c (resp. g_o^{et}) un élément de $\text{GL}_h(F_o)$ (resp. de $\text{GL}_{d-h}(F_o)$) tel que $g_o^c \in \mathbb{M}_h(\mathcal{O}_o)$ (resp. $g_o^{\text{et}} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$) et $\varpi_o^{\text{val}(\det g_o^c)/h} (g_o^{\text{et}})^{-1} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$ de sorte que $\varpi_o^{\text{val}(\det g_o^c)/h} \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}}$ est contenu dans $[g_o^{\text{et}}] \mathcal{E}_{o, m}^{\text{et}}$. On choisit m et n tels que les noyaux de ${}^t g_o^c : (F_o/\mathcal{O}_o)^h \rightarrow F_o/\mathcal{O}_o$ et ${}^t g_o^{\text{et}} : (F_o/\mathcal{O}_o)^{d-h} \rightarrow (F_o/\mathcal{O}_o)^{d-h}$ sont contenus dans $(\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^h$ et tels que $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^h$ (resp. $(\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h}$) est contenu dans

$$\text{Im}({}^t g_o^c : (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^h \rightarrow \mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)$$

(resp. dans $\text{Im}({}^t g_o^{\text{et}} : (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h} \rightarrow (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h})$). Soient S un $(\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr})$ -schéma et $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_{I_o}, \iota_{o, m}^c, \iota_{o, m}^{\text{et}})$ un S -point de $\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(m)$. Pour définir l'action du couple (g_o^{et}, g_o^c) , il suffit de définir une structure de niveau n sur $(\varphi_o^c)^{\text{val}(\det g_o^c)}(\mathcal{E}_o^c) \simeq \tau^{\text{val}(\det g_o^c)} \mathcal{E}_o^c$. Soit $[g_o^c] : \mathcal{E}_{o, m}^c \rightarrow \mathcal{E}_{o, m}^c$ le morphisme associé à g_o^c défini via $\iota_{o, m}^c$, la structure de niveau m (cf. le paragraphe I.1.3). On a déjà vu que $[g_o^c](\mathcal{E}_{o, m}^c) \simeq \tau^{\text{val}(\det g_o^c)} \mathcal{E}_{o, m}^c$ de sorte que la structure de niveau n déduite de $\iota_{o, m}^c$ convient.

⁽⁸⁾ Il s'agit essentiellement de vérifier que l'action de $(g_o^{\text{et}}, k+s)$ est égale à celle de $(g_o^{\text{et}}, k)(1, s)$ pour $(g_o^{\text{et}})^{-1} \in \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$, $s \geq 0$ et k assez grand

▷ L'action d'un élément du centre de $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ est définie de manière évidente. De même l'action de ϖ_o^k vu comme élément du centre de $\mathrm{GL}_h(F_o)$ se définit de manière naturelle $\widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,m}(m) \rightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,n}(n)$ pour m et n tels que $m - n + hk \geq 0$, et relève

$$\mathrm{Frob}_o^{m-n+hk} : \mathcal{J}_{I^\circ,m}^{=h} \longrightarrow \mathcal{J}_{I^\circ,n}^{=h}.$$

On vérifie aisément que l'on définit bien ainsi une action de $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathrm{GL}_h(F_o)$ sur $\varprojlim_m \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,m}(m)$ de telle sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,m}(m) & \xrightarrow{(g_o^{\mathrm{et}} \times g_o^c)} & \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,n}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{I^\circ,m}^{=h} & \xrightarrow{(g_o^{\mathrm{et}}, \mathrm{val}(\det g_o^c))} & \mathcal{J}_{I^\circ,n}^{=h} \end{array}$$

En vertu de la proposition I.2.2.6 et de la définition de $\hat{g}_{m,a}$, le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,m}(m) & \xrightarrow{(g_o^{\mathrm{et}} \times g_o^c)} & \widehat{\mathcal{J}}_{I^\circ,=h,n}(n) \\ \downarrow \hat{g}_{m,a} & & \downarrow \hat{g}_{n,a'} \\ \widehat{M}_{I,o,h,a} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_o^{\mathrm{et}} & 0 \\ 0 & g_o^c \end{pmatrix}} & \widehat{M}_{I,o,h,a'} \end{array}$$

□

I.4. Variétés d'Igusa de seconde espèce

On rappelle que pour un idéal I de A , on note $I = I^\circ \mathcal{M}_o^n$ avec $o \notin V(I^\circ)$. Soit $\Pi_{o,d}$ l'élément suivant de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \varpi_o \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.4.1. Définition. – Étant donné un $\kappa(o)$ -schéma S , ainsi qu'un S -point de $\mathcal{J}_{I^\circ,m}^{=h}$, on a un $\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} \mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang d , \mathcal{F}_o ainsi qu'un morphisme $\phi_o :$

$\tau\mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$ linéaire injectif. Considérons la catégorie fibrée $\mathfrak{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(s)$ sur la catégorie des $\kappa(o)$ -schémas dont les objets sont

$$S \longmapsto \begin{cases} S \longrightarrow \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}, \\ \text{une section globale } \sigma \text{ de } \mathcal{F}_o/\phi_o^{!(s)}(\tau^s \mathcal{F}_o) \text{ telle que } \phi_o^{!h}(\sigma \otimes 1) = \varpi_o \sigma \\ \text{et telle que l'application } \theta_S \rightarrow \mathcal{F}_o/\phi_o(\tau \mathcal{F}_o), a \mapsto a\bar{\sigma}, \text{ est inversible} \end{cases}$$

Dans la suite, on notera $\mathcal{F}_{o, s}$ le quotient $\mathcal{F}_o/\phi_o^{!s}(\tau^s \mathcal{F}_o)$.

PROPOSITION I.4.1.1. – *Pour tout $s > 0$, $\mathfrak{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}$ est relativement représentable par un schéma $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}$ étale galoisien de groupe de Galois $\mathcal{D}_{o, h, s}^\times := (\mathcal{D}_{o, h}/(\Pi_{o, h}^s))^\times$. En outre le diagramme suivant est cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(s) & \longrightarrow & \mathcal{J}_{I^o, 0}^{\bar{h}}(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}} & \longrightarrow & M_{I^o, s_o}^{\bar{h}} \end{array}$$

Preuve. – La représentabilité est immédiate et le diagramme est clairement cartésien. Soit alors $\text{Spec } R \rightarrow S$ un ouvert affine tel que $\mathcal{F}_{o, R} := \mathcal{F}_o \otimes_{\theta_S} R$ est libre. D'après la proposition I.2.1.1, il existe une décomposition

$$\mathcal{F}_{o, R} = \mathcal{F}_{o, R}^c \oplus \mathcal{F}_{o, R}^{\text{et}}$$

dans laquelle la matrice de ϕ_o est de la forme $\begin{pmatrix} M_c & 0 \\ M_{\text{ext}} & M_{\text{et}} \end{pmatrix}$ avec M_{et} inversible de taille $d-h$, de sorte que $\mathcal{F}_{o, R}^{\text{et}} \subset \phi_o^{!(s+1)}(\tau^{s+1} \mathcal{F}_{o, R})$ pour tout $s > 0$. En outre $\mathcal{F}_{o, R}/\phi_o(\tau \mathcal{F}_{o, R})$ étant un R -module libre de rang 1, il existe donc $e_0 \in \mathcal{F}_{o, R}^c$ tel que $(e_0, \phi_o(e_0 \otimes 1), \dots, \phi_o^{!(h-1)}(e_0 \otimes 1))$ soit une base de $\mathcal{F}_{o, R}^c$ avec

$$\phi_o^{!h}(e_0 \otimes 1) = \varpi_o \otimes 1 \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i \phi_o^{!i}(e_0 \otimes 1) \quad \text{modulo } \mathcal{F}_o^{\text{et}}$$

où $\gamma_i \in \theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} R$. Il s'agit ainsi de trouver $\sigma = \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \cdot \phi_o^{!i}(e_0 \otimes 1)$ avec $\alpha_i = \sum_{0 \leq j, i+jh \leq s} \beta_i^j \varpi_o^j$ telle que $\phi_o^{!h}(\sigma \otimes 1) = \varpi_o \sigma$ et β_0^0 inversible. Notons

$$(W_{h, S, o}, \phi_{h, S, o})$$

le ϕ -faisceau $W_{h, S, o} := (\theta_o \otimes_{\kappa(o)} \theta_S)^h$ tel que la matrice de

$$\phi_{h, S, o} : \tau W_{h, S, o} \longrightarrow W_{h, S, o}$$

dans la base canonique est donnée par $\phi_{h, S, o}(e_i \otimes 1) = e_{i+1}$ pour $1 \leq i < h$ et $\phi_{h, S, o}(e_h \otimes 1) = \varpi_o \cdot e_1$. Le groupe $\text{Aut}(W_{h, S, o}, \phi_{h, S, o})$ est

$$\mathcal{D}_{o, h}^\times \simeq \{P \in \text{GL}_h(\theta_o) ; P\Pi_{o, h} = \Pi_{o, h}P\}$$

Trouver σ revient alors à *rigidifier la partie connexe de \mathcal{F}_o* , i.e. à donner un isomorphisme

$$(\mathcal{F}_o^c, \phi_o^c) \simeq (W_{h,S,o}, \phi_{h,S,o})$$

modulo $\Pi_{o,h}^s$. On peut ainsi obtenir aisément des équations du revêtement à partir des éléments de la matrice M_c . On en déduit en outre que le revêtement est étale de groupe de Galois:

$$\text{Aut}(W_{h,S,o,/s}, \phi_{h,S,o,/s}) \simeq \{P \in \text{GL}_h(\mathcal{O}_o)/(1 + \Pi_{o,h}^s \mathbb{M}_h(\mathcal{O}_o); P\Pi_{o,h} = \Pi_{o,h}P)\}. \quad \square$$

Remarque : si S est le spectre d'un corps ou d'un anneau artinien, il correspond, par la théorie du module de coordonnées (cf. [15]), à (V_o^c, φ_o^c) un \mathcal{O}_o -module formel de hauteur h , de sorte que les S -points de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s)$ sont ceux de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}$ muni d'une rigidification à l'ordre s du \mathcal{O}_o -module formel de hauteur h qui leur est associé. Ainsi $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(s)$ est la variété d'Igusa de seconde espèce telle qu'elle est définie dans [16].

I.4.2. Correspondances de Hecke sur $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s)$

PROPOSITION I.4.2.1. – *La tour $(\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s))_{s,n}$ est munie de correspondances de Hecke associées aux éléments du noyau $\widetilde{\mathcal{N}}_o$ de l'application*

$$\text{GL}_h(F_o) \times D_{o,h}^\times \times W_o \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \longmapsto \text{val}(\det(g_o^c) \text{rn}(\delta_o) \text{cl}(\sigma_o))$$

où $\text{rn} : D_{o,h}^\times \rightarrow F_o^\times$ est la norme réduite, et $\text{cl} : W_o \rightarrow F_o^\times$ est l'application de la théorie du corps de classe, de manière compatible aux morphismes $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$, i.e. pour tout n, s , il existe $m_0 \geq n$ et $t_0 \geq s$ tels que pour tout $m \geq m_0$ et $t \geq t_0$, on ait des morphismes

$$\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(t) \xrightarrow{g_o^{\text{et}} \times g_o^c \times \delta_o \times \sigma_o} \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s)$$

compatibles aux morphismes de restriction du niveau et tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(t) & \xrightarrow{g_o^{\text{et}} \times g_o^c \times \delta_o \times \sigma_o} & \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}} & \xrightarrow{g_o^{\text{et}} \times (\text{val}(\det(g_o^c)))} & \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \end{array}$$

Preuve. – Les correspondances géométriques sur $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$ associées aux éléments de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_h(\mathcal{O}_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$ se remontent aisément sur $\mathcal{J}_{I^o,n,o}^{\overline{h}}(m)$.

▷ Celles associées aux éléments de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ sont données via l'isomorphisme $\text{Aut}(V_o^c, \varphi_o^c) \simeq \mathcal{D}_{o,h}^\times$, de sorte que

$$\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s) = \left(\lim_{s'} \mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}(s') \right)^{(1 + \Pi_{o,h}^s \mathcal{D}_{o,h})}.$$

▷ Soit $(g_o^c, \delta_o, 1)$ un élément de $\widetilde{\mathcal{N}}_o$ avec $g_o^c \in \mathbb{M}_h(\mathcal{O}_o)$. On choisit $m \geq n$ tels que

$$\text{Ker}({}^t g_o^{\text{et}}) \subset (\mathcal{M}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^{d-h}, \quad (\mathcal{M}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^{d-h} \subset \text{Im}({}^t g_o^{\text{et}})$$

et $\varpi_o^{\text{val}(\det g_o^c)/h} (g_o^{\text{et}})^{-1} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_o)$, de sorte que (g_o^{et}, g_o^c) définisse une correspondance de Hecke

$$\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \longrightarrow \mathcal{J}_{I^o, n}^{\overline{h}}.$$

Il reste alors à définir, pour t assez grand, à partir d'un isomorphisme

$$\alpha_t : (\mathcal{F}_{o, /t}^c, \phi_{o, /t}^c) \simeq (W_{h, S, o, /t}, \phi_{h, S, o, /t}),$$

un isomorphisme

$$\alpha'_s : (\mathcal{F}_{o, /s}^{c'}, \phi_{o, /s}^{c'}) \simeq (W_{h, S, o, /s}, \phi_{h, S, o, /s}),$$

où $(\mathcal{F}_{o, /s}^{c'}, \phi_{o, /s}^{c'})$ est le ϕ -faisceau connexe associé à $(\mathcal{F}_o^c, \phi_o^c)$ par ${}^t g_o^c$. Rappelons que l'application $(\phi_o^c)^{\text{!val}(\det(g_o^c))}$ (resp. $\phi_{h, S, o}^{\text{!val}(\text{rn}(\delta_o^{-1}))}$) réalise un isomorphisme de ϕ -faisceau de $\tau^{\text{val}(\det(g_o^c))} \mathcal{F}_o$ (resp. $\tau^{\text{val}(\text{rn}(\delta_o^{-1}))} W_{h, S, o}$) vers $\mathcal{F}_{o, /s}^{c'}$ (resp. $\delta_o^{-1}(W_{h, S, o})$), de sorte que

$$\delta_o \circ \phi_{h, S, o}^{\text{!val}(\text{rn}(\delta_o))} \circ \alpha_t \circ (\phi_o^c)^{\text{!val}(\det(g_o^c))^{-1}}$$

restreint à $\mathcal{F}_{o, /t-\text{val}(\det(g_o^c))}^{c'}$ définit une rigidification à l'ordre $s := t - \text{val}(\det(g_o^c))$ de la partie connexe du ϕ -faisceau $(\mathcal{F}'_o, \phi'_o)$.

▷ Pour $z \in F_o^\times \cap \mathcal{O}_o$, on fait agir $(z, z^{-1}, 1)$ de manière évidente, c'est-à-dire avec les notations ci-dessus, $\mathcal{F}_o^{c'} = z \mathcal{F}_o^c$ avec $\alpha'_s = z \circ \phi_{h, S, o}^{\text{!val}(z)} \circ \alpha_t \circ (\phi_o^c)^{\text{!val}(z)^{-1}}$.

▷ Le procédé est identique pour les éléments de $\widetilde{\mathcal{N}}_o$ de la forme $(1, \delta_o, c_o)$, en remarquant que $c_o \delta_o$ est un automorphisme de $(W_{h, S, o, /s}, \phi_{h, S, o, /s})$. \square

I.4.3. Complétés formels. – On se sert des $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s)$ pour “détordre” le schéma formel $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, m}(t)$. Le lemme suivant est immédiat.

LEMME I.4.3.1. – *En notant $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(\infty) := \lim_{\leftarrow s} \mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s)$, un point fermé sur κ de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(\infty)$ correspond à la donnée d'un point fermé de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$ et d'un isomorphisme de la partie connexe $(V_o^{*,c}, \varphi_o^{*,c})$ de son \mathcal{O}_o -module de Dieudonné associé, avec $(W_{h, \kappa, o}, \varphi_{h, \kappa, o})$.*

DÉFINITION I.4.3.2. – Pour tout s , en accord avec les notations de [16], on notera $\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(s)$ le quotient

$$\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s) \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf } \text{Def}_{h, t} / \mathcal{D}_{o, h}^\times$$

où $\mathcal{D}_{o, h}^\times$ agit diagonalement. L'espace topologique sous-jacent aux $\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(s)$ est $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$. On notera aussi $\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)$ la limite $\varprojlim_s \text{Tw}_{I^o, h, m, t}(s)$.

PROPOSITION I.4.3.3. – La tour $\mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)$ est munie de correspondances de Hecke associées aux éléments de

$$(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times} \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathcal{N}}_o,$$

vérifiant la propriété suivante: étant donné un point géométrique $x_{I^o, m}(\infty)$ de $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o, m}^h(\infty)$ au-dessus d'un point $x_{I^o, m}$ de $\mathcal{J}_{I^o, m}^h \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$, les morphismes canoniques

$$f_{x_{I^o, m}(\infty)} : (\widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, m}(t))_{x_{I^o, m}} \longrightarrow \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t}$$

ainsi que

$$h_{x_{I^o, m}(\infty)} : \mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)_{x_{I^o, m}} \longrightarrow \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t}$$

sont tels que pour tout élément $(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o)) \in (D^{\infty, o})^{\times} \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathcal{N}}_o$, les diagrammes suivant, où $(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, g_o^c, \sigma_o)x_{J^o, m'} = x_{I^o, m}$, sont commutatifs⁽⁹⁾:

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{\mathcal{J}}_{J^o, =h, m'}(t'))_{x_{J^o, m'}} & \xrightarrow{f_{x_{J^o, m'}(\infty)}} & \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t'} \\ \downarrow (g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, g_o^c) & & \downarrow ({}^t(g_o^c)^{-1}, \delta_o, \sigma_o) \\ (\widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, m}(t))_{x_{I^o, m}} & \xrightarrow{f_{(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))x_{J^o, m'}(\infty)}} & \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tw}_{J^o, h, m', t'}(\infty)_{x_{J^o, m'}} & \xrightarrow{h_{x_{J^o, m'}(\infty)}} & \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t'} \\ \downarrow (g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o)) & & \downarrow ({}^t(g_o^c)^{-1}, \delta_o, \sigma_o) \\ \mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)_{x_{I^o, m}} & \xrightarrow{h_{(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))x_{J^o, m'}(\infty)}} & \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t} \end{array}$$

Preuve. – Pour définir les correspondances sur la tour $\mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)$, il suffit de faire agir $\widetilde{\mathcal{N}}_o$ diagonalement⁽¹⁰⁾. Concrètement, étant donné

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times} \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathcal{N}}_o,$$

tel que $g_o^{\mathrm{et}} \in \mathbb{M}_{d-h}(\theta_o)$, $g_o^c \in \mathbb{M}_h(\theta_o)$ et $\delta_o \in \mathcal{D}_{o, h}^{\times}$, soient J^o, I^o des idéaux de A de multiplicité nulle en o , et m, m', t, t', s, s' des entiers tels que:

- ▷ $K_{\mathbb{A}, J^o}^{\infty, o} \subset K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}$;
- ▷ $\mathrm{Ker}({}^t g_o^{\mathrm{et}}) \subset (\mathcal{M}_o^{-m'} / \theta_o)^{d-h}$ et $(\mathcal{M}_o^{-m} / \theta_o)^{d-h} \subset \mathrm{Im}({}^t g_o^{\mathrm{et}})$;
- ▷ $\mathrm{Ker}({}^t g_o^c) \subset (\mathcal{M}_o^{-t'} / \theta_o)^h$ et $(\mathcal{M}_o^{-t} / \theta_o)^h \subset \mathrm{Im}({}^t g_o^c)$;
- ▷ $\varpi_o^{\mathrm{val}(\det(g_o^c)) / h} (g_o^{\mathrm{et}})^{-1} \in \mathbb{M}_{d-h}(\theta_o)$;
- ▷ $s' = s - \mathrm{val}(\det(\delta_o))$.

⁽⁹⁾ Pour un choix convenables de J^o, m', t' , comme ci-avant.

⁽¹⁰⁾ $(g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in \widetilde{\mathcal{N}}_o$ agit sur $\mathrm{Def}_{h, t}$ via $({}^t(g_o^c)^{-1}, \delta_o, \sigma_o) \in \mathcal{N}_o$ laquelle est définie par Deligne et Carayol, cf. § I.1.1

On a alors une correspondance de Hecke $(g^{\infty,o}, g_o^{\text{ét}}, g_o^c, \delta_o, \sigma_o)$:

$$\mathcal{J}_{J^o, m'}^{\overline{h}}(s') \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h, t'} \longrightarrow \mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s) \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h, t}$$

Les morphismes canoniques $f_{x_{I^o, m}(\infty)}$ et $h_{x_{I^o, m}(\infty)}$ sont définis à partir de l'isomorphisme fixé par le lemme I.4.3.1 et la commutativité des diagrammes est alors évidente. \square

Remarque : on notera en particulier que l'on peut munir les $\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(s)$ de correspondances de Hecke associées aux éléments

$$(g^{\infty,o}, g_o^{\text{ét}}, g_o^c, \sigma_o) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \times W_o,$$

à partir de celles définies ci-dessus, en choisissant un élément quelconque $\delta_o \in D_{o, h}^\times$ tel que $(g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in \widetilde{\mathcal{N}}_o$, le résultat ne dépendant pas de ce choix car on a quotienté par $\mathcal{D}_{o, h}^\times$.

PROPOSITION I.4.3.4. – *Au-dessus de tout ouvert affine S de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$, il existe des isomorphismes*

$$\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty) \times_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}} S \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, m}(t) \times_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}} S$$

tels qu'en tout point géométrique x de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty) \times_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}} S)_x & \xrightarrow{\sim} & (\widehat{\mathcal{J}}_{I^o, =h, m}(t) \times_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}} S)_x \\ \downarrow h_{x(\infty)} & & \downarrow f_{x(\infty)} \\ \text{Spf Def}_{h, t} & \xrightarrow{=} & \text{Spf Def}_{h, t} \end{array}$$

où $x(\infty)$ est un point géométrique de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(\infty)$ au-dessus de x .

Remarque : par analogie avec la caractéristique nulle, $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$ doit être affine. Cependant on n'est pas obligé d'utiliser ce fait. En effet bien que les isomorphismes en question ne soient pas canoniques et dépendent comme on le verra du choix d'une extension de la partie connexe par la partie étale des \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné, dans ce qui suit il ne sera pas utile de les recoller ni de les rendre compatibles aux actions des correspondances de Hecke. La propriété essentielle est en fait la commutativité du diagramme de l'énoncé, qui nous permettra comme on le verra au paragraphe I.5.2 de montrer que tous ces isomorphismes coïncident au niveau des cycles évanescents et se recollent de façon compatible aux actions de Hecke, en vertu de la proposition I.4.3.3. Moralement les cycles évanescents ne dépendent que de la partie connexe du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné et pas de l'extension de cette partie par la partie étale.

Preuve. – Commençons par construire la flèche. Soit donc R une $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ -algèbre artinienne, \mathcal{M} un idéal maximal de carré nul et $\bar{R} = R/\mathcal{M}$. Supposons donné un \bar{R} -point de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(\infty)$. Étant donnée $(W_{h, R, o}, \varphi_{h, R, o}, \iota_{h, R, t})$ une déformation de niveau t de $(W_{h, \bar{R}, o}, \varphi_{h, \bar{R}, o})$, il faut construire une déformation sur R , du \bar{R} -point correspondant de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}$. D'après l'équivalent du théorème de Serre-Tate (cf. prop. I.1.6.3), il suffit de construire une déformation de niveau $(m, t)^{(11)}$ du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné $(\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o)$ associé sur \bar{R} , cette construction devant être compatible à l'action diagonale de $\mathcal{D}_{o, h}^\times$ sur le produit $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\bar{h}}(\infty) \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h, t}$.

LEMME I.4.3.5. – *Soit R une \mathcal{O}_o -algèbre artinienne, \mathcal{M} un idéal maximal de carré nul et $\bar{R} = R/\mathcal{M}$. Soit $(\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o)$ un \mathcal{O}_o -module de Dieudonné sur \bar{R} , ainsi qu'une suite exacte*

$$0 \rightarrow (\bar{V}_o^{\text{ét}}, \bar{\varphi}_o^{\text{ét}}) \longrightarrow (\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o) \longrightarrow (\bar{V}_o^c, \bar{\varphi}_o^c) \rightarrow 0$$

avec $(\bar{V}_o^{\text{ét}}, \bar{\varphi}_o^{\text{ét}})$ étale et $(\bar{V}_o^c, \bar{\varphi}_o^c)$ connexe. Supposons en outre donnée une déformation (V_o^c, φ_o^c) sur R de $(\bar{V}_o^c, \bar{\varphi}_o^c)$. Il existe alors une déformation (V_o, φ_o) définie sur R de $(\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o)$ ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow (V_o^{\text{ét}}, \varphi_o^{\text{ét}}) \longrightarrow (V_o, \varphi_o) \longrightarrow (V_o^c, \varphi_o^c) \rightarrow 0$$

dont la réduction modulo \mathcal{M} est la suite exacte précédente sur \bar{R} .

Preuve. – Soit $(V_o^{\text{ét}}, \varphi_o^{\text{ét}})$ la déformation sur R de $(\bar{V}_o^{\text{ét}}, \bar{\varphi}_o^{\text{ét}})$. Le problème est alors de construire une extension de $(V_o^{\text{ét}}, \varphi_o^{\text{ét}})$ par (V_o^c, φ_o^c) . La question est classique et découle des résultats de [20, chap. 4, § 3]. L'obstruction à l'existence d'une extension V_o de \bar{V}_o par $\mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o$ réside⁽¹²⁾ dans

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^2(\bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$$

Si cette obstruction est nulle, une extension étant choisie, l'obstruction à l'existence d'une flèche $V_o^{\text{ét}} \rightarrow V_o$ (resp. $V_o \rightarrow V_o^c$) réside dans le groupe

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1(\bar{V}_o^{\text{ét}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) \quad (\text{resp. } \text{Ext}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1(\bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^c))$$

et l'ensemble de ces flèches est un tore sous

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}(\bar{V}_o^{\text{ét}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) \quad (\text{resp. } \text{Hom}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}(\bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^c)).$$

Si ces obstructions sont nulles, $V_o^{\text{ét}} \rightarrow V_o$ est injective et $V_o \rightarrow V_o^c$ est surjective. En outre l'ensemble des flèches $V_o^{\text{ét}} \rightarrow V_o^c$ est un tore sous

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}(\bar{V}_o^{\text{ét}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^c),$$

⁽¹¹⁾ Structure de niveau m (resp. t) sur la partie étale (resp. connexe)

⁽¹²⁾ Cette obstruction est nulle et de plus il n'y a qu'une seule extension possible car en utilisant l'argument de la fin de la preuve on peut montrer que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1(\bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$ est nul. Par contre les flèches $V_o^{\text{ét}} \rightarrow V_o \rightarrow V_o^c$ ne sont pas uniquement définies.

de sorte qu'il existe des flèches $V_o^{\text{et}} \rightarrow V_o$ et $V_o \rightarrow V_o^c$ tel que la suite $0 \rightarrow V_o^{\text{et}} \rightarrow V_o \rightarrow V_o^c \rightarrow 0$ soit exacte. Montrons que toutes ces obstructions sont nulles. En fait on va montrer que les groupes dans lesquelles elles vivent sont nuls. L'argument est identique pour tous ces groupes, traitons par exemple le cas de $\text{Ext}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1(\bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$. Les $\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}$ -modules \bar{V}_o et \bar{V}_o^{et} étant localement libres, les faisceaux $\underline{\text{Ext}}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^i(\bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$ sont nuls pour $i > 0$. La suite spectrale locale-globale pour le Ext^1 montre que $\text{Ext}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1(\bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$ est égal à

$$H^1(\text{Spec}(\bar{R}), \underline{\text{Ext}}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^0(\bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o))$$

qui est nul car $\text{Spec}(\bar{R})$ est affine.

Il faut alors construire $\varphi_o : {}^\tau V_o \rightarrow V_o$ qui soit compatible à φ_o^{et} et φ_o^c . On commence par remarquer que $\text{Frob}_o : R \rightarrow R$ se factorise par $\bar{\text{Frob}}_o : \bar{R} \rightarrow R$, de sorte ${}^\tau V_o = \bar{V}_o \otimes_{\bar{R}, \bar{\text{Frob}}_o} R$. Comme précédemment il n'y a pas d'obstruction à l'existence d'une application $\varphi'_o : {}^\tau V_o \rightarrow V_o$ et l'ensemble des telles applications est un toseur sous $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$. Fixons une telle application φ'_o . Les applications $V_o^{\text{et}} \rightarrow V_o$, φ'_o et φ_o^{et} fournissent alors un élément de $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}(\bullet, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$ à la suite exacte courte $0 \rightarrow {}^\tau \bar{V}_o^{\text{et}} \rightarrow {}^\tau \bar{V}_o \rightarrow {}^\tau \bar{V}_o^c \rightarrow 0$, on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) &\longrightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) \rightarrow \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^{\text{et}}, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car, de manière identique à ce qui précède, $\text{Ext}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$ est nul. On modifie donc φ'_o en un φ''_o qui soit compatible à φ_o^{et} ; l'ensemble des telles φ''_o est alors un toseur sous $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$. De même, $V_o \rightarrow V_o^c$, φ''_o et φ_o^c définissent un élément de $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o)$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \bullet)$, à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^{\text{et}} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^c \rightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^{\text{et}}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o) \rightarrow \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^c) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\text{Ext}_{\theta_o \widehat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R}}^1({}^\tau \bar{V}_o^c, \mathcal{M} \otimes_{\bar{R}} \bar{V}_o^{\text{et}})$ est nul. Il est alors possible de modifier φ''_o en un φ_o compatible à φ_o^{et} et φ_o^c . \square

Soit donc comme dans le lemme ci-dessus, $(V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}})$ le relèvement sur R de $(\bar{V}_o^{\text{et}}, \bar{\varphi}_o^{\text{et}})$. Soit aussi $\iota_{o,m}^{\text{et}}$ le relèvement sur R de $\bar{\iota}_{o,m}^{\text{et}}$: c'est une structure de niveau m sur $(V_o^{\text{et}}, \varphi_o^{\text{et}})$. De l'isomorphisme sur \bar{R}

$$(\bar{V}_o^{c*}, \bar{\varphi}_o^{c*}) \simeq (W_{h,\bar{R},o}, \varphi_{h,\bar{R},o}),$$

et de la déformation $(W_{h,R,o}, \varphi_{h,R,o})$, on en déduit une déformation (V_o^c, φ_o^c) définie sur R , de $(\bar{V}_o^c, \bar{\varphi}_o^c)$, munie de plus d'une structure de niveau t . Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent. Il est en outre immédiat que cette construction est invariante par l'action diagonale de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ sur le produit $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}(\infty) \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h,t}$ et que le diagramme de l'énoncé est bien commutatif.

Montrons ensuite que la flèche en question est un isomorphisme. Le problème se ramène immédiatement au cas $t = 0$. Il suffit alors de montrer que l'on obtient un isomorphisme au niveau des espaces tangents. Pour des raisons de dimension, il suffit de vérifier que l'on a une injection ce qui est clairement le cas. \square

I.4.3.6. — Dans la suite nous proposons suivant [16], une autre façon de voir cet isomorphisme en un cran fini. Notons

$$\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s) \longrightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}$$

l'extension étale de fibre spéciale $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}$. On note de même

$$\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s,t) \longrightarrow \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s)$$

le classifiant des structures de niveau t sur la partie connexe du φ -faisceau universel sur $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s)$. On définit de manière identique au paragraphe I.4.2, des correspondances de Hecke sur $\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s,t)$ associées aux éléments de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathcal{N}}_o$.

On note \mathcal{M}_t^h l'idéal maximal de $\text{Def}_{h,t}$ et soient pour S un ouvert affine de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}$:

$$S_s := \mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}(s) \times_{\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}} S, \quad \widehat{S}_{s,t} := \widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,m}(s,t) \times_{\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}} S.$$

Étant donné un point géométrique $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}(\infty)$, on a des morphismes canoniques

$$(S_s \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^N))_{x(\infty)} \longrightarrow \text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^N)$$

et $(\widehat{S}_{s,t})_{x(\infty)} \longrightarrow \text{Spf Def}_{h,t}$ ainsi qu'une compatibilité aux correspondances de Hecke comme dans la proposition I.4.3.3.

PROPOSITION I.4.3.7. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un s_0 assez grand tel que pour tout $s \geq s_0$, et S un ouvert affine de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{=h}}$, on ait un morphisme*

$$f_{N,S} : S_s \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h,t} \longrightarrow \widehat{S}_{s,t}$$

tel qu'en tout point géométrique $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I^o, m}^h(\infty)$, on ait le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (S_s \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^N))_{x(\infty)} & \xrightarrow{f_{N,s,t}} & (\widehat{S}_{s,t})_{x(\infty)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^N) & \hookrightarrow & \text{Spf Def}_{h,t} \end{array}$$

Preuve. – On commence par prouver le lemme suivant qui est l'équivalent pour les \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné du lemme (1.1.3) de [21].

LEMME I.4.3.8. – Soit R une \mathcal{O}_o -algèbre artinienne de morphisme structural $i : \mathcal{O}_o \rightarrow R$, et $r \in \mathbb{N}$ tel que $i(\varpi_o^r) = 0$ dans R . Soient (V_o, φ_o) et (W_o, ψ_o) deux \mathcal{O}_o -modules de Dieudonné connexes sur R . Soit \mathcal{M} l'idéal maximal de R et $\bar{R} = R/\mathcal{M}$: on suppose que $\mathcal{M}^k = (0)$. On note \bar{V}_o et \bar{W}_o la réduction modulo \mathcal{M} de V_o et W_o . On a alors

▷ $\text{Hom}((V_o, \varphi_o), (W_o, \psi_o)) \rightarrow \text{Hom}((\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o), (\bar{W}_o, \bar{\psi}_o))$ est injective;

▷ pour toute application $\bar{f} : (\bar{V}_o, \bar{\varphi}_o) \rightarrow (\bar{W}_o, \bar{\psi}_o)$, on peut trouver un relèvement de $\varpi_o^N \bar{f}$, où $N \geq r(\ln k / \ln q)$.

Preuve. – Commençons par montrer que $\varpi_o^N \otimes 1$ annule $\mathcal{M}W_o$ pour $N \geq r(\ln k / \ln q)$. Dans W_o , en considérant $\psi_o : W_o \rightarrow W_o$ comme une application τ -linéaire, on a $(\varpi_o^r \otimes 1)\text{Id} = (1 \otimes i(\varpi_o^r))\text{Id} + \sum_{i=1}^{r-h} a_i(\psi_o)^i$. Comme $i(\varpi_o^r)$ est nul dans R , on en déduit que pour $v \in \mathcal{M}W_o$, $(\varpi_o^r \otimes 1)v \in \mathcal{M}^p W_o$, d'où le résultat.

Soit donc $g : (V_o, \varphi_o) \rightarrow \mathcal{M}(W_o, \psi_o) : (\varpi_o^N \otimes 1)v \in \text{Ker } g$. Or (V_o, φ_o) étant connexe, on en déduit qu'il existe $w \in V_o/\varphi_o(V_o)$ tel que $(\varpi_o^N \otimes 1)v = (\varphi_o)^i(w)$. On a alors $(\psi_o)^i(g(w)) = 0$ soit $g(w) = 0$ et donc $g = 0$.

Pour le dernier point, on définit l'image d'un élément $v \in V_o$ comme $\varpi_o^N \otimes 1$ fois le relèvement quelconque de $\bar{f}(\bar{v})$. Cette définition ne dépend pas du choix de ce relèvement car $\mathcal{M}W_o$ est tué par $\varpi_o^N \otimes 1$. \square

LEMME I.4.3.9 (cf. [16], lemme III.2.6). – Il existe une fonction $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante de limite l'infini, telle que:

▷ tout élément de $\varpi_o^{s-t} \mathcal{D}_{o,h}$ se relève en un endomorphisme de

$$(W_{h, \text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)}, o}, \varphi_{h, \text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)}})$$

▷ tout élément de $(1 + \varpi_o^s \mathcal{D}_{o,h})$ agit trivialement sur $\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)}$.

Preuve. – On remarque tout d'abord que pour $t > 0$, $\varpi_o \in (\mathcal{M}_t^h)^{(q-1)q^{(t-1)h}}$. Le premier point découle alors du lemme précédent en prenant $\alpha(s)$ tel que

$$\alpha(s) \ln(\alpha(s)) \leq (s-t)(\ln q)(q-1)q^{(t-1)h}.$$

Le deuxième point est alors immédiat: en effet soit $\delta \in \mathcal{D}_{o,h}^\times$ tel que $\delta \equiv 1 \pmod{\varpi_o^s}$. Alors $(\delta-1)/\varpi_o^m$ se relève en un endomorphisme de

$$(W_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}}).$$

Il en est de même de $(\delta^{-1}-1)/\varpi_o^m$, de sorte que δ se relève en un automorphisme de

$$(W_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}})$$

qui est l'identité sur les points de ϖ_o^m -torsion. \square

Soit alors $S_{s,t}(N) := S_s \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^N)$. D'après le lemme ci-dessus, on a une action de $(1 + \varpi_o^s \mathcal{D}_{o,h})$ sur $(W_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o}})$ telle que pour tout $a \geq t$, $(1 + \varpi_o^{s-t+a} \mathcal{D}_{o,h})$ agit trivialement sur

$$(W_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o,a}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o,a}}).$$

Ainsi $(1 + \varpi_o^s \mathcal{D}_{o,h})/(1 + \varpi_o^{s+a-t} \mathcal{D}_{o,h})$ agit diagonalement sur

$$(W_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o,a}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s),o,a}}) \times S_{s+a-t,t}(\alpha(s))$$

et le quotient est un \mathcal{O}_o -module de Dieudonné tronqué à l'ordre a

$$(V_{o,a}^{c,s}, \varphi_{o,a}^{c,s})$$

connexe sur $S_{s,t}(\alpha(s))$. La limite projective des $(V_{o,a}^{c,s}, \varphi_{o,a}^{c,s})$ est alors un \mathcal{O}_o -module de Dieudonné $(V_o^{c,s}, \varphi_o^{c,s})$ sur $S_{s,t}(\alpha(s))$ tel que

$$(V_{o,t}^{c,s}, \varphi_{o,t}^{c,s}) \simeq (W_{h,\text{Def}_{h,t,o,t}}, \varphi_{h,\text{Def}_{h,t,o,t}})$$

de sorte que $(V_o^{c,s}, \varphi_o^{c,s})$ est muni d'une structure de niveau t . Étant donné un \bar{R} -point de $\mathcal{J}_{I_o,m}^{\bar{h}}(s)$, une \mathcal{O}_o -algèbre artinienne R_s , \mathcal{M} un idéal maximal de R_s tel que $\bar{R} = R_s/\mathcal{M}$, ainsi qu'un R_s -point de $\text{Spf}(\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)})$, on construit une déformation sur R_s de ce \bar{R} -point, en donnant une déformation de niveau (m,t) de son \mathcal{O}_o -module de Dieudonné. On procède comme dans la preuve de la proposition précédente. Soit $(V_o^{\text{et},s}, \varphi_o^{\text{et},s}, \iota_o^{\text{et},s})$ le relèvement sur R de $(\bar{V}_o^{\text{et}}, \bar{\varphi}_o^{\text{et}}, \bar{\iota}_o^{\text{et}})$. D'après le lemme I.4.3.5, il existe une extension (V_o^s, φ_o^s) de $(V_o^{\text{et},s}, \varphi_o^{\text{et},s})$ par $(V_o^{c,s}, \varphi_o^{c,s})/R$ ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow (V_o^{\text{et},s}, \varphi_o^{\text{et},s}) \rightarrow (V_o^s, \varphi_o^s) \rightarrow (V_o^{c,s}, \varphi_o^{c,s}) \rightarrow 0$$

sur R_s qui se restreigne sur $R_s \otimes_{\text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)}} \text{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s-1)}$ au pull-back de

$$0 \rightarrow (V_o^{\text{et},s-1}, \varphi_o^{\text{et},s-1}) \rightarrow (V_o^{s-1}, \varphi_o^{s-1}) \rightarrow (V_o^{c,s-1}, \varphi_o^{c,s-1}) \rightarrow 0$$

On en déduit donc l'existence d'un⁽¹³⁾ morphisme pour tout ouvert affine S de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}$,

$$f_{s,t} : S_{s,t}(\alpha(s)) \longrightarrow \widehat{S}_{s,t}$$

tel que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_{s,t}(\alpha(s)) & \xrightarrow{f_{s,t}} & \widehat{S}_{s,t} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_{s+1,t}(\alpha(s)) & \xrightarrow{f_{s+1,t}} & \widehat{S}_{s+1,t} \end{array}$$

En particulier si $x(\infty)$ est un point fermé de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (S_{s,t}(\alpha(s)))_{x(s)} & \xrightarrow{f_{s,t}} & (\widehat{S}_{s,t})_{x(s)} \\ \downarrow & & \downarrow j_{x(\infty)} \\ \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_{h,t} / (\mathcal{M}_t^h)^{\alpha(s)}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h,t} \end{array}$$

L'existence du morphisme $f_{N,s,t}$ de l'énoncé découle alors d'un lemme de Berkovich (cf. lemme 1 de l'annexe de [16], ou bien le lemme II.5.8 de *loc. cit.*) \square

I.5. Cycles évanescents et systèmes locaux de Harris-Taylor

On rappelle que le but des variétés d'Igusa est en particulier de décrire la restriction à $M_{I, s_o}^{\neq h}$ du faisceau des cycles évanescents de $M_{I, o} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$. Cette question se pose dans le contexte suivant : la cohomologie de la fibre générique de la tour des $(M_{I, o})_I$ est décrite dans [24] de manière "assez" précise. Cette cohomologie est aussi l'aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{p,q}(I) = H^p(M_{I, \bar{s}_o}, R^q \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \implies H^{p+q}(M_{I, \eta_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

Afin de séparer la contribution due aux différentes strates, entre en jeu la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q}(I, i) = H_c^{p+q}(M_{I, \bar{s}_o}^{\neq d-p}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \implies H^{p+q}(M_{I, \bar{s}_o}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

On cherche donc à avoir des renseignements sur $\lim_I H_c^i(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\neq h}, R^j \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ en tant que représentation de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times P_{h,d}(F_o) \times W_o$.

⁽¹³⁾ non unique

I.5.1. Rappels sur les cycles évanescents associés à $\text{Def}_{d,n}$. – Pour tout $n \geq 0$, $\text{Def}_{d,n}$ représente le foncteur des déformations de niveau n , par isogénies, du \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, cf. [11]. Soit alors $\Psi_{F_o, \ell, d, n}^i$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie obtenu via la théorie de Berkovich comme le i -ème foncteur des cycles évanescents associé au morphisme structural

$$\text{Spf Def}_{d,n} \longrightarrow \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}.$$

Cet espace vectoriel est muni entre autre d’une action de $\text{GL}_d(\mathcal{O}_o)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $\text{GL}_d(\mathcal{O}_o) \rightarrow \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$ et on pose

$$\Psi_{F_o, \ell, d}^i = \varinjlim_{m \geq n} \Psi_{F_o, \ell, d, m}^i$$

de sorte que pour $K_{o,n} := \text{Ker}(\mathcal{O}_o^\times \rightarrow (\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^\times)$, $\Psi_{F_o, \ell, d, n}^i = (\Psi_{F_o, \ell, d}^i)^{K_{o,n}}$. On introduit le groupe $\text{GDW}_o(d)^0$ (resp. $\text{GDW}_o(d)^1$) défini comme le noyau de

$(g_o, \delta_o, c_o) \in \text{GDW}_o(d) := \text{GL}_d(F_o) \times D_{o,d}^\times \times W_o \mapsto \text{val}(\det(g_o^{-1}) \text{rn}(\delta_o) \text{cl}(c_o)) \in \mathbb{Z}$
 (resp. composé avec la projection canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Comme rappelé au paragraphe I.1.1, pour ξ_o un caractère d’ordre fini de F_o^\times , $\Psi_{F_o, \ell, d}^i(\xi'_o)$ (resp. $\Psi_{F_o, \ell, d}^i$), où ξ'_o est la restriction de ξ_o à \mathcal{O}_o^\times , est muni d’une action de \mathcal{N}'_o (resp. de \mathcal{N}_o).

I.5.1.1. — Dans la définition de $\text{Def}_{d,n}$, il est agréable de considérer plutôt les déformations par quasi-isogénies de sorte que la construction précédente fourni des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d, n}^i \simeq (\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i)^{K_{o,n}}$ où

$$\mathcal{U}_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i := \text{Ind}_{\text{GDW}_o(d)^1}^{\text{GDW}_o(d)} \Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^d$$

est une représentation de $\text{GDW}_o(d)$.

Pour toute représentation admissible irréductible τ_o de $D_{o,d}^\times$, la réciprocity de Frobenius donne un isomorphisme

$$\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{G}_{o,d}^\times}(\text{res}_{\mathcal{G}_{o,d}^\times}^{D_{o,d}^\times} \tau_o, \Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i)$$

où ξ_o est le caractère central de τ_o et l’action de (g_o^c, σ_o) est donnée par celle de $(g_o, \delta_o, \sigma_o) \in \text{GDW}_o(d)^1$ pour $\delta_o \in D_{o,d}^\times$ quelconque. Afin d’avoir un théorème de Serre-Tate équivariant on introduit les modifications suivantes.

DÉFINITION I.5.1.2. – Pour tout d, i , $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i$ est la représentation $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i$ où l’action de $\text{GL}_d(F_o)$ est tordue par $g_o \mapsto {}^t g_o^{-1}$. On définit de même $\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, d}^i$ comme étant l’espace $\Psi_{F_o, \ell, d}^i$ muni d’une action de

$\widetilde{\text{GDW}}_o(d)^0 := \text{Ker}((g_o, \delta_o, c_o) \in \text{GL}_d(F_o) \times D_{o,d}^\times \times W_o \mapsto \text{val}(\det(g_o) \text{rn}(\delta_o) \text{cl}(c_o)) \in \mathbb{Z}$
 via l’action de $({}^t g_o^{-1}, \delta_o, c_o) \in \text{GDW}_o(d)^0$ sur $\Psi_{F_o, \ell, d}^i$.

I.5.2. Restriction aux strates ouvertes et variétés d'Igusa. — On rappelle le lemme suivant bien connu.

LEMME I.5.2.1. — Soit \mathcal{L} un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau lisse sur $M_{I,o}$. On a alors

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}) \simeq (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \otimes \mathcal{L}_{s_o}$$

où \mathcal{L}_{s_o} est la restriction de \mathcal{L} à la fibre spéciale M_{I,s_o} .

Appliqué au faisceau $\mathcal{L}_{\rho_\infty}$ cela nous conduit à étudier $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{M_{I,o}}$ le i -ème faisceau des cycles évanescents du morphisme structural $M_{I,o} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_o$. On notera aussi $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{M_{I,\overline{s}_o,a}}$ sa restriction à $M_{I,\overline{s}_o,a}^{\overline{h}}$. On considère le tiré en arrière $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q}^{\overline{h}}$ de $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{M_{I,\overline{s}_o,a}^{\overline{h}}}$ par le morphisme $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q \rightarrow M_{I,\overline{s}_o,a}^{\overline{h}}$, où n est la multiplicité de o dans I . On rappelle qu'étant donné un point géométrique $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\overline{h}}(\infty)$ au-dessus d'un point x de $M_{I,s_o}^{\overline{h}}$ (resp. y de $\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}}$), on a des isomorphismes canoniques

$$\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,d,n}^i} \simeq (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))_{(M_{I,o,=h,a})_x} \simeq (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{M_{I,\overline{s}_o,a}^{\overline{h}}})_x$$

$$\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,d,n}^i} \simeq (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))_{(\widehat{\mathcal{J}}_{I^o,=h,n(n)})_y} \simeq (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o,n}^{\overline{h}} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q})_y$$

que l'on note dans les deux cas $j_{x(\infty)}$. Le but de ce paragraphe et finalement des variétés d'Igusa est de décrire le faisceau $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{M_{I,\overline{s}_o,a}^{\overline{h}}}$. Selon *loc. cit.* nous introduisons les notations suivantes:

▷ soient \overline{Y} un schéma lisse sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, et $(\overline{Y}_n \rightarrow \overline{Y})$ un système projectif de revêtements étales de groupe de Galois $G = \varprojlim_n G_n$;

▷ soit \mathcal{L} un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau lisse sur \overline{Y} , muni d'une action de G se factorisant par un quotient fini G_N de G .

Le faisceau $\mathcal{L}_{|\overline{Y}_n}$ est ainsi muni d'une action de $G_n \times G_n$ et l'action diagonale de G_n est compatible à son action sur \overline{Y}_n de sorte qu'il existe sur \overline{Y} un faisceau

$$\text{Twist}_{(\overline{Y}_n)}(\mathcal{L})$$

tel que sa restriction à \overline{Y}_n munie de l'action naturelle de G_n coïncide avec $\mathcal{L}_{|\overline{Y}_n}$ muni de l'action diagonale de G_n .

I.5.2.2. — Rappelons l'énoncé suivant, donné dans l'appendice de [16], qui est dû à Berkovich. Supposons donné sur $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$, un schéma formel \mathcal{X} muni d'une action d'un groupe G agissant trivialement sur la fibre spéciale \mathcal{X}_s . On note $\mathcal{X}(n)$ le schéma formel $(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I}_{\mathcal{X}}^n)$ où $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ est un idéal de définition de \mathcal{X} . On suppose que $G = \varprojlim_n G(n)$ est tel que l'action de G sur $\mathcal{X}(n)$ se factorise par $G(n)$. Soient alors $\mathcal{X}_n \xrightarrow{\leftarrow n} \mathcal{X}$ des revêtements galoisiens de groupe de Galois $G(n)$; on fait les hypothèses :

▷ le quotient de $\mathcal{X}_n(n)$ par l'action diagonale de $G(n)$ est un schéma formel \mathcal{Y}^n (c'est le cas si par exemple \mathcal{X} est quasi-projectif sur $\mathrm{Spf} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$);

▷ il existe un schéma formel spécial \mathcal{Y} tel que $\mathcal{Y}(n) = \mathcal{Y}^n$;

▷ la famille des complétions formelles de \mathcal{X} le long d'un point fermé de \mathcal{X}_s , a un nombre fini de classes d'isomorphismes.

I.5.2.3. — On note $\Psi_m^i(\mathcal{X})$ (resp. $\Psi_m^i(\mathcal{Y})$) le i -ème faisceau des cycles évanescents du faisceau constant $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ associé à \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}). D'après les travaux de Berkovich (cf. [2]), il existe un entier N , tel que tout automorphisme sur \mathcal{X} trivial sur $\mathcal{X}(N)$, agit trivialement sur $\Psi_m^i(\mathcal{X})$. On fixe donc pour tout m , un tel entier $N(m)$, de sorte que l'action de G sur $\Psi_m^i(\mathcal{X})$ se factorise par $G(N(m))$. En particulier les faisceaux $\mathrm{Twist}_{\mathcal{X}_n}(\Psi_m^i(\mathcal{X}))$ sont indépendants de $n \geq N(m)$; on le note $\mathrm{Twist}_{\mathcal{X}_\infty}(\Psi_m^i(\mathcal{X}))$. Berkovich démontre alors le résultat suivant.

THÉORÈME I.5.2.4 (cf. l'appendice de Berkovich dans [16]). — *Il existe un système compatible d'isomorphismes canoniques de faisceaux:*

$$\Psi_m^i(\mathcal{Y}) \simeq \mathrm{Twist}_{\mathcal{X}_\infty}(\Psi_m^i(\mathcal{X})).$$

I.5.2.5. — On cherche à appliquer le théorème ci-dessus à $\mathcal{Y} = \mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)$. On pose donc $\mathcal{X} = \mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \times_{\mathrm{Spec} \kappa(o)} \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t}$ qui est muni d'une action de $G = \mathcal{D}_{o, h}^\times$ agissant trivialement sur $\mathcal{X}_s = \mathcal{J}_{I^o, n}^{\overline{h}} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. On note $\mathcal{M}_{h, t}$ l'idéal maximal de $\mathrm{Def}_{h, t}$ et soit $\mathcal{X}(n) := \mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \times_{\mathrm{Spec} \kappa(o)} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_{h, t} / (\mathcal{M}_{h, t})^n)$. On considère une fonction $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $\alpha \circ N = \mathrm{Id}$, où α est la fonction définie au lemme I.4.3.9, de sorte que l'action de G sur $\mathcal{X}(n)$ se factorise à travers $G(n) := \mathcal{D}_{o, h, N(n)}$. On considère ensuite $\mathcal{X}_s := \mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(N(s)) \times_{\mathrm{Spec} \kappa(o)} \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t}$ de sorte que $\mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{X}$ est galoisien de groupe de Galois $G(s) = \mathcal{D}_{o, h, N(s)}$. On est ainsi dans les conditions d'application du théorème ci-dessus d'où le résultat suivant.

THÉORÈME I.5.2.6. — *Il existe, sur $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \otimes_{\kappa(o)} \overline{\kappa}(o)$, un isomorphisme canonique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceaux*

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(\infty)}(\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)$$

vérifiant les propriétés suivantes

▷ 1) si x est un point géométrique de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$ et $x(\infty) = (x(s))_s$ un système projectif de points de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s)$ au-dessus d'un point x de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$, on a un isomorphisme

$$(\mathrm{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty))_x \longrightarrow (\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \times_{\mathrm{Spec} \kappa(o)} \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h, t})_x.$$

Par le théorème de changement de base lisse le faisceau des cycles évanescents sur $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h} \times_{\text{Spec } \kappa(o)} \text{Spf Def}_{h, t}$ est le faisceau constant $\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i$. On en déduit donc un isomorphisme

$$f_{x(\infty)} : \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \longrightarrow R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{h, m, t}(\infty)_x}.$$

De même la donnée de $x(\infty)$, donne un isomorphisme

$$h_{x(\infty)} : \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \longrightarrow (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)} \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)_x$$

et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)})_x & \xrightarrow{\sim} & (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i))_x \\ \downarrow & & \uparrow h_{x(\infty)} \\ R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)_x} & \xrightarrow{f_{x(\infty)}} & \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \end{array}$$

▷ 2) L'action par correspondances d'un élément

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o)$$

sur $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)}$ donne par l'isomorphisme de l'énoncé, une action par correspondances sur $\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)$ qui découle de l'action naturelle par correspondances d'un élément

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \sigma_o, \delta_o)) \in (D^{\infty, o})^\times / K_{\mathbb{A}, I}^{\infty, o} \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\text{GDW}}_o(h)^0$$

sur⁽¹⁴⁾ le produit $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(s) \times \text{Spf Def}_{h, t}$ où l'on rappelle que $(g_o^c, \sigma_o, \delta_o) \in \widetilde{\text{GDW}}_o(h)^0$ agit diagonalement.

Preuve. – Pour montrer que les correspondances de Hecke se décrivent comme indiqué au point 2), il suffit de travailler sur les germes aux points géométriques de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}$ en remarquant que les diagrammes suivant sont commutatifs, cf. la proposition I.4.3.3:

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{F_o, \ell, h, t'}^i & \xrightarrow{f_{x_{J^o, m'}(\infty)}} & R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{J^o, h, m', t'}(\infty)_{x_{J^o, m'}}} \\ \downarrow ({}^t(g_o^c)^{-1}, \delta_o, \sigma_o) & & \downarrow (g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o)) \\ \Psi_{F_o, \ell, h, t}^i & \xrightarrow{f_{(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))_{x_{J^o, m'}(\infty)}}} & R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{Tw}_{I^o, h, m, t}(\infty)_{x_{I^o, m}}} \end{array}$$

⁽¹⁴⁾ Le résultat ne dépend pas du choix de δ_o .

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi_{F_o, \ell, h, t'}^i & \xrightarrow{h_{x_{J^o, m'}(\infty)}} & (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m'}(\infty)}^{j=h} \widetilde{\Psi}_{F_o, t'}^{h, i})_{x_{J^o, m'}} \\
 \downarrow ({}^t(g_o^c)^{-1}, \delta_o, \sigma_o) & & \downarrow (g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o)) \\
 \Psi_{F_o, \ell, h, t}^i & \xrightarrow{h_{(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))x_{J^o, m'}(\infty)}} & (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}(\infty)}^{j=h} \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)_{x_{I^o, m}}
 \end{array}$$

où δ_o est un élément quelconque de $D_{o, h}^\times$ tel que $(g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in \widetilde{\text{GDW}}_o(h)^0$, et J^o, I^o, m, m', t, t' sont comme au paragraphe I.4.3, avec

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))(x_{J^o, m'}(\infty)) = x_{I^o, m}(\infty). \quad \square$$

COROLLAIRE I.5.2.7. – *Il existe un isomorphisme canonique*

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, =h, m}(t)} \longrightarrow \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}(\infty)}^{j=h} (\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)$$

tel qu'en tout point fermé x de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, =h, m}(t)})_x & \longrightarrow & (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}(\infty)}^{j=h} (\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i))_x \\
 \uparrow j_x(\infty) & & \uparrow h_x(\infty) \\
 \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i & \xrightarrow{\text{Id}} & \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i
 \end{array}$$

où les flèches verticales dépendent du choix d'un point fermé $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(\infty)$ au-dessus de x . En outre ces isomorphismes sont compatibles aux correspondances de Hecke associées aux éléments de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \times W_o$ de la manière suivante: si $(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c)$ est un élément de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o)$, qui induit donc, en particulier, une correspondance de Hecke $[g]$ sur $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 ([g], (\text{Fr}_o^{\text{deg } \sigma_o})^*)^* R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, =h, m'}(t')} & \xrightarrow{(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c, \sigma_o)} & R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, =h, m}(t)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 ([g], (\text{Fr}_o^{\text{deg } \sigma_o})^*)^* \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m'}(\infty)}^{j=h} (\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t'}^i) & \xrightarrow{\sigma_o^o(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c, \sigma_o)} & \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}(\infty)}^{j=h} (\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)
 \end{array}$$

où l'action de $(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c, \sigma_o)$ sur $\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}(\infty)}^{j=h} (\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)$ est précisée au point 2) du théorème précédent.

Preuve. – La démonstration découle directement du résultat précédent et de la proposition I.4.3.4 notamment la description des correspondances de Hecke se montre comme dans la preuve du théorème ci-dessus. On peut toutefois en donner une preuve directe à partir de la proposition I.4.3.7. D'après le théorème 4.1 de [2], pour tout

entier r , on peut choisir un entier N , tel que deux morphismes de schémas formels sur $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$

$$\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h,t}[[X_1, \dots, X_h]] \longrightarrow \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h,t}$$

qui coïncide sur $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_{h,t}/(\mathcal{M}_{h,t})^N)[[X_1, \dots, X_h]]$, induisent la même application sur les cycles évanescents du faisceau constant $\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$. De la proposition I.4.3.7, on en déduit donc un morphisme

$$f_s : R^i \Psi_{\eta_o}(\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})_{S_s \times_{\mathrm{Spec} \kappa(o)} \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{h,t}} = \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \longrightarrow R^i \Psi_{\eta_o}(\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})_{\widehat{S}_s}$$

tel que pour tout point fermé $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}(\infty)$, le morphisme

$$\widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \longrightarrow (R^i \Psi_{\eta_o}(\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})_{\widehat{S}_s})_{x_s}$$

est le morphisme $j_{x(\infty)}$, c'est en particulier un isomorphisme. Ce dernier se descend en un isomorphisme

$$\mathrm{Twist}_{\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}(s)} \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \longrightarrow R^i \Psi_{\eta_o}(\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})_{\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(t)}$$

tel qu'en tout point fermé $x(\infty)$ de $\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}(\infty)$ au-dessus d'un point x de $\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}$, on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Twist}_{\mathcal{J}_{I_o, m}^{\neq h}(s)} \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i)_x & \longrightarrow & (R^i \Psi_{\eta_o}(\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})_{\widehat{\mathcal{J}}_{I_o, =h, m}(t)})_x \\ \uparrow h_{x(\infty)} & & \uparrow j_{x(\infty)} \\ \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h, t}^i \end{array}$$

où les flèches verticales définies plus haut, dépendent du choix de $x(\infty)$. En travaillant au niveau des germes, on voit que ces isomorphismes sont compatibles lorsque r varie, de sorte que l'on peut les recoller en un isomorphisme vérifiant les propriétés de l'énoncé. \square

I.5.3. Systèmes locaux de Harris-Taylor. – Soit τ_o une représentation admissible irréductible de $D_{o,h}^\times$. L'espace que l'on souhaite étudier est le $(\mathrm{GL}_h(F_o) \times W_o)$ -module

$$\mathrm{Hom}_{D_{o,h}^\times}(\tau_o, \mathcal{U}_{F_o, \ell, h}^i) = \mathcal{U}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o) \simeq \Psi_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{o,h}^\times}(\tau_o, \widetilde{\Psi}_{F_o, \ell, h}^i)$$

ou de manière équivalente leur version avec un tilde, $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o)$ qui désigne l'espace $\mathcal{U}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o)$ muni de l'action tordue de $\mathrm{GL}_h(F_o) \times W_o$ par $g_o^\times \mapsto {}^t(g_o^c)^{-1}$.

DÉFINITION I.5.3.1. – Soit τ_o une représentation irréductible de $D_{o,h}^\times$, sa restriction à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ est une somme de représentations irréductibles

$$\rho_{o,1} \oplus \dots \oplus \rho_{o,e_{\tau_o}}$$

et on notera e_{τ_o} le nombre de celles ci. Étant donnée une représentation irréductible ρ_o de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$, soient alors τ_o et τ'_o des sous-représentations irréductibles de l'induite de $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ à $D_{o,h}^\times$ de ρ_o : d'après la réciprocity de Frobenius, ce sont exactement celles telles que leur restriction à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ contienne ρ_o . On en déduit alors que τ_o et τ'_o sont inertiuellement équivalentes, i.e. $\tau'_o \simeq \tau_o \otimes \xi_o$ avec $\xi_o : \delta \mapsto x^{v(\det \delta)}$ pour $x \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. On note \mathfrak{C}_h l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des représentations admissibles et irréductibles du groupe $D_{o,h}^\times$.

Comme $\Pi_{o,h}^h$ est dans le centre de $D_{o,h}^\times$, e_{τ_o} divise h . Soit Δ_{τ_o} un ensemble d'éléments de $D_{o,h}^\times$ tel que les congruences des $\text{val}(\det \delta)$ pour $\delta \in \Delta_{\tau_o}$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e_{\tau_o}\mathbb{Z}$.

I.5.3.2. — Pour tout τ_o , on a un morphisme naturel de $\text{GDW}_o(h)^0$ -modules:

$$\Psi_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) \otimes \tau_o \longrightarrow \Psi_{F_o,\ell,h}^i$$

qui envoie $f \otimes v$ sur $f(v)$. On note $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ l'image de ce morphisme et soit $\Psi_{F_o,\ell,h,m}^i[\tau_o]$ la préimage de $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ dans $\Psi_{F_o,\ell,h,m}^i$. Le sous-module $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de τ_o . Le groupe $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ étant compact, on a

$$\Psi_{F_o,\ell,h}^i = \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} \Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o].$$

On a alors le lemme suivant dont la preuve est claire.

LEMME I.5.3.3. — *L'application*

$$\Psi_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) \otimes \tau_o \longrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta_{\tau_o}} \Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]^\delta, \quad f \otimes v \longmapsto (f(\delta^{-1}v))_\delta$$

où $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]^\delta$ est l'espace $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ muni de la structure de \mathcal{N}_o -module où (g, d, w) agit via $(g, \delta^{-1}d\delta, w)$, est un isomorphisme de \mathcal{N}_o -modules.

LEMME I.5.3.4. — *Soit $\mathcal{F}_{\tau_o,1}$ le système local sur $M_{I,\bar{s}_o,1}^h$ associé à τ_o et au revêtement d'Igusa de seconde espèce. On a alors un isomorphisme naturel de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \times W_o$ -modules*

$$\left(\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,m}^h(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}) \right)^h \simeq \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (\mathcal{F}_{\tau_o,1} \otimes \widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}(\tau_o))^{h/e_{\tau_o}}.$$

Preuve. — D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,m}^h(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}) &= \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,m}^h(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}[\tau_o]), \\ \mathcal{F}_{\tau_o,1} \otimes \widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}(\tau_o) &\simeq \bigoplus_{\delta \in \Delta_{\tau_o}} \text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o,m}^h(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o,\ell,h,t}^i}[\tau_o]^\delta). \end{aligned}$$

D'après le point 2) du théorème I.5.2.6, tous les $\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h, t}^i[\tau_o]^\delta})$ sont isomorphes en tant que $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \times W_o$ -modules, d'où le résultat. \square

Remarque : pour tout $t \leq t' \leq \infty$, on a

$$\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h, t}^i}) = \left(\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h, t'}^i}) \right)^{K_{o, t}},$$

$$\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h, t}^i[\tau_o]}) = \left(\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h, t'}^i[\tau_o]}) \right)^{K_{o, t}},$$

où l'on rappelle que $K_{o, t} = \text{Ker}(\text{GL}_h(\theta_o) \rightarrow \text{GL}_h(\theta_o/\mathcal{M}_o^t))$.

D'après le corollaire I.5.2.7 et le théorème I.5.2.6, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION I.5.3.5. – (i) $(R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}})^h$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (\mathcal{F}_{\tau_o, 1} \otimes \widetilde{\mathcal{U}_{F_o, \ell, h, m}^i(\tau_o)})^{h/e_{\tau_o}}.$$

(ii) L'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times W_o$ sur $\varinjlim_m \mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}$ par les correspondances de Hecke, induit des morphismes $(g^{\infty, o} \times g_o^c \times g_o^{\text{et}} \times \sigma_o)$:

$$(g^{\infty, o}, \text{Frob}_o^{\text{val}(\det g_o^c) + \deg \sigma_o}, g_o^{\text{et}})^* R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}} \longrightarrow R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, m'}^{\neq h}},$$

(pour m, m' et I^o, J^o convenables) qui induisent par (i) le morphisme

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} [(\text{Frob}_o^{\deg \sigma_o})^* \circ (g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))^*] (\mathcal{F}_{\tau_o, 1} \otimes \widetilde{\mathcal{U}_{F_o, \ell, h, m}^i(\tau_o)}) \\ \downarrow (\sigma_o^* \circ (g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, g_o^c) \otimes (g_o^c, \delta_o, \sigma_o)) \\ \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (\mathcal{F}_{\tau_o, 1} \otimes \widetilde{\mathcal{U}_{F_o, \ell, h, m'}^i(\tau_o)}) \end{aligned}$$

où δ_o est un élément quelconque de $D_{o, h}^\times$ tel que $(g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in \widetilde{\text{GDW}}_o(h)^0$.

(iii) On a

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}} \simeq (\text{Twist}_{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\neq h}(\infty)}(\widetilde{\Psi_{F_o, \ell, h}^i}))^{1 + \varpi_o^m \mathbb{M}_h(\theta_o)}.$$

Soit $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{GDW}}_o(h)^0 / \mathcal{D}_{o, h}^\times$ l'isomorphisme défini par $n \mapsto \Pi_{o, h}^n$. On considère ainsi $\varinjlim_{I^o, n} H_c^j(\mathcal{J}_{I^o, n}^{\neq h} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F}_{\tau_o, 1})$ comme une représentation de

$$(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z} \text{ ou de } (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times (D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times).$$

En vertu du lemme I.5.2.1, on en déduit alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE I.5.3.6. – *On a un isomorphisme canonique*

$$H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\overline{h}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}_{\rho_\infty}))^h \simeq \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\overline{h}}, \mathcal{F}_{\tau_o, 1} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty}) \otimes \widetilde{\mathcal{W}}_{F_o, \ell, h, m}^i(\tau_o))^{h/e_{\tau_o}}$$

tel que l'action de $(g^{\infty, o}, g_o^c, g_o^{\text{et}}, \sigma_o) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times W_o$ sur la limite inductive indexée par les idéaux $I = I^o \mathcal{M}_o^m$ du membre de gauche, induit l'action de

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, -\text{val}(\det g_o^c) - \text{deg}(\sigma_o)) \otimes (g_o^c, \sigma_o)$$

sur la limite inductive du membre de droite.

DÉFINITION I.5.3.7. – On note $\mathcal{F}_{\tau_o} := \mathcal{F}_{\tau_o, 1} \times_{P_{h,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o)$ le faisceau sur $M_{I, \bar{s}_o}^{\overline{h}}$ induit par $\mathcal{F}_{\tau_o, 1}$.

NOTATION I.5.3.8. – Pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$, $\pi_o[t]_D$ désignera la représentation de $D_{o, tg}^\times$ qui correspond à la représentation de carré intégrable $\text{St}_t(\pi_o)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands. On notera aussi \mathcal{L} la correspondance de Langlands locale.

On déduit du corollaire précédent la proposition suivante dont la proposition II.2.0.12 nous permettra au paragraphe suivant de donner le cas Iwahori du théorème local.

PROPOSITION I.5.3.9. – *Soient $1 \leq tg < d$, π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$ et Π_t une représentation de $\text{GL}_{tg}(F_o)$. Pour $1 \leq i \leq t$ et pour tout j ,*

$$\lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{\overline{tg}}, \mathcal{F}_{\pi_o[t]_D} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty}) \otimes \Pi_t \otimes \mathcal{L}(\pi_o)$$

est muni d'une action naturelle de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times P_{tg,d}(F_o)^{\text{op}} \times W_o$ telle que $(g^{\infty, o}, g_o^c \times g_o^{\text{et}}, c_o)$ agisse via l'action naturelle de $(g^{\infty, o}, -\text{val}(\det(g_o^c)) - \text{deg}(c_o)) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \mathbb{Z}$ et celle de (g_o^c, c_o) sur $\Pi_t \otimes \mathcal{L}(\pi_o)$. Cet espace, en tant que représentation de $\text{GL}_d(F_o) \times W_o$ est alors de la forme

$$\bigoplus_{\xi} (\text{Ind}_{P_{tg,d}^{\text{op}}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)} \Pi_t \circ \xi(\text{val}(\det)) \otimes \pi_\xi) \otimes \mathcal{L}(\pi_o \circ \xi(\text{val}(\det)))$$

où ξ décrit les caractères $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et π_ξ est une représentation de $\text{GL}_{d-tg}(F_o)$.

Preuve. – Le faisceau $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D}$ étant induit à partir de $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, 1}$, on a

$$(I.5.3.3) \quad \lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{\overline{tg}}, \mathcal{F}_{\pi_o[t]_D} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \Pi_t) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \\ \simeq \text{Ind}_{P_{tg,d}^{\text{op}}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)} \lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\overline{tg}}, \mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, 1} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \Pi_t) \otimes \mathcal{L}(\pi_o)$$

tel que l'action de $((g_o^c, g_o^{\text{et}}), c_o) \in P_{tg,d}(F_o)^{\text{op}} \times W_o$ sur le membre de droite de (I.5.3.3), soit donnée par l'action de $(g_o^{\text{et}}, -\text{val}(\det g_o^c) - \text{deg}(c_o)) \times (g_o^c, c_o) \in \text{GL}_{d-tg}(F_o) \times \mathbb{Z} \times$

$\mathrm{GL}_{tg}(F_o) \times W_o$ où $\lim_{\rightarrow I} H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\bar{=}tg}, \mathcal{F}_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi_o))} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty})$ (resp. $\Pi_\ell \otimes \mathcal{L}(\pi_o)$) est vue comme un $\mathrm{GL}_{d-tg}(F_o) \times \mathbb{Z}$ -module (resp. $\mathrm{GL}_{tg}(F_o) \times W_o$ -module). Le résultat découle alors de l'écriture

$$\lim_{\rightarrow I} H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\bar{=}tg}, \mathcal{F}_{\pi_o[t]D} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty}) \simeq \bigoplus_{\xi} \xi \otimes \pi_\xi$$

où ξ décrit les caractères $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et où π_ξ est une représentation de $\mathrm{GL}_{d-tg}(F_o)$, *a priori* réductible. \square

I.6. Équations formelles des variétés d'Igusa de seconde espèce

On propose de donner au niveau des complétés formels des équations explicites du revêtement d'Igusa de seconde espèce, qui fournissent les systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_o} associés à une représentation irréductible τ_o de $D_{o,d}^\times$.

LEMME I.6.0.11. – Soit z un point géométrique de $M_{I_o, s_o}^{h'}$ avec $h' > h$. Le revêtement $\mathcal{J}_{I_o, 0}^{\bar{=}h} \rightarrow M_{I_o, s_o}^{\bar{=}h}$ donne au-dessus du complété formel $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h}$ de M_{I_o, s_o}^h en z , une extension

$$\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h} \hookrightarrow J_0^{h', d-h'; =h}(s)$$

qui provient d'une extension $\mathrm{Def}_0^{h'; =h} \rightarrow J_0^{h'; =h}(s)$; i.e. $J_0^{h', d-h'; =h}(s)$ est isomorphe à

$$J_0^{h'; =h}(s) \widehat{\otimes}_{\mathrm{Def}_0^{h'; =h}} \mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h}$$

où l'on rappelle que $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h} = \mathrm{Def}_{h', 0}^{\bar{=}h}[[w_1^0, \dots, w_{d-h'}^0]]$.

Preuve. – Par définition des variétés d'Igusa de seconde espèce (cf. I.4.1), l'extension $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h} \hookrightarrow J_0^{h', d-h'; =h}(s)$ est donnée par la rigidification à l'ordre s de la partie connexe du \mathcal{O}_o -module de Dieudonné universel sur $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h}$. Le résultat découle alors de la forme de ce \mathcal{O}_o -module de Dieudonné sur $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h}$ donnée à la proposition (9.9.1) de [3]. \square

I.6.0.12. — Soit alors z un point géométrique de $M_{I_o, s_o}^{h'}$ avec $h' > h$. Le complété de l'anneau local de M_{I_o, s_o}^h en z est $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h} \simeq \mathrm{Def}_{h', 0}^{\bar{=}h}[[w_1, \dots, w_{d-h'}]]$ avec $\mathrm{Def}_0^{h'; =h} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}[[a_h, \dots, a_{h'-1}]]$. L'ouvert correspondant à $M_{I_o, 0}^{\bar{=}h}$ est $\mathrm{Def}_0^{h', d-h'; =h} \simeq \mathrm{Def}_0^{h'; =h}[[w_1, \dots, w_{d-h'}]]$ avec $\mathrm{Def}_{h', 0}^{\bar{=}h} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}((a_h))[[a_{h+1}, \dots, a_{h'-1}]]$. D'après le lemme précédent, l'extension $\mathrm{Def}_{h', 0}^{\bar{=}h} \hookrightarrow J_0^{h'; =h}(s)$ est donnée par l'équation

$$\tau^h \circ \alpha = \alpha \circ (a_h \tau^h + \dots + a_{h'-1} \tau^{h'-1} + \tau^{h'}) \quad \text{modulo } \tau^{h+m}$$

avec $\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \tau^i$ avec α_0 non nul. On obtient alors le système

$$\begin{cases} \alpha_0^{p^h-1} = a_h, \\ \alpha_1^{p^h} = \alpha_0 a_{h+1} + \alpha_1 a_h^p, \\ \dots \\ \alpha_{h'-h-1}^{p^h} = \alpha_0 a_{h'-1} + \alpha_1 a_{h'-2}^p + \dots + \alpha_{h'-h-1} a_h^{p^{h'-h-1}}, \\ \alpha_{h'-h}^{p^h} = \alpha_0 + \alpha_1 a_{h'-1}^p + \dots + \alpha_{h'-h} a_h^{p^{h'-h}}, \\ \dots \\ \alpha_m^{p^h} = \alpha_{m-h'+h} + \alpha_{m-h'+h+1} a_{h'-1}^{p^{m-h'+h}} + \dots + \alpha_m a_h^{p^{m-1}}. \end{cases}$$

On peut effectuer le changement de variable $t_i = \alpha_i t_0^{-p^i}$ pour $i > 0$ avec $t_0 = \alpha_0$. Le système précédent s'écrit alors

$$\begin{cases} t_0^{p^h-1} = a_h, \\ t_1^{p^h} - t_1 = a_{h+1} t_0^{1-p^{h+1}}, \\ t_2^{p^h} - t_2 = a_{h+2} t_0^{1-p^{h+2}} + (a_{h+1} t_0^{1-p^{h+1}})^p t_1, \\ \dots \\ t_{h'-h-1}^{p^h} - t_{h'-h-1} = a_{h'-1} t_0^{1-p^{h'-1}} + \sum_{k=1}^{h'-h-2} t_k (a_{h'-1-k} t_0^{1-p^{h'-1-k}})^{p^k}, \\ t_{h'-h}^{p^h} - t_{h'-h} = t_0^{1-p^{h'}} + \sum_{k=1}^{h'-h-1} t_k (a_{h'-k} t_0^{1-p^{h'-k}})^{p^k}, \\ t_{h'-h+1}^{p^h} - t_{h'-h+1} = t_1 t_0^{p-p^{h'+1}} + \sum_{k=1}^{h'-h-1} t_{h'-h+1-k} (a_{h+k} t_0^{1-p^{h+k}})^{p^{h'-h+1-k}}, \\ \dots \\ t_s^{p^h} - t_s = t_{s-h'+h} t_0^{p^{s-h'+h}-p^{s+h}} + \sum_{k=1}^{h'-h-1} t_{s-k} (a_{h+k} t_0^{1-p^{h+k}})^{p^{s-k}}. \end{cases}$$

Pour $i \leq h' - h$ (resp. $i \geq h' - h$), on peut éliminer dans le membre de droite de l'équation dont le membre de gauche est $t_i^{p^h} - t_i$, les termes $t_0^{1-p^{h+k}} a_{h+k}$ pour $k < i$ (resp. $1 \leq k \leq h' - h - 1$ et $t_0^{1-p^{h'}}$); on obtient alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0^{p^h-1} = a_h, \\ t_1^{p^h} - t_1 = a_{h+1} t_0^{1-p^{h+1}}, \\ t_2^{p^h} - t_2 = a_{h+2} t_0^{1-p^{h+2}} + r_2, \\ \dots \\ t_{h'-h-1}^{p^h} - t_{h'-h-1} = a_{h'-1} t_0^{1-p^{h'-1}} + r_{h'-h-1}, \\ t_{h'-h}^{p^h} - t_{h'-h} = t_0^{1-p^{h'}} + r_{h'-h}, \\ t_{h'-h+1}^{p^h} - t_{h'-h+1} = r_{h'-h+1}, \\ \dots \\ t_s^{p^h} - t_s = r_s \end{array} \right.$$

avec $r_i \in \mathbb{F}_q[[t_1, \dots, t_{i-1}]]$ pour $1 \leq i \leq s$ définis par les relations

- ▷ $r_1 = 0$ et pour $2 \leq i \leq h' - h$, $r_i = \sum_{k=1}^{i-1} t_{i-k} (t_k^{p^h} - t_k - r_k)^{p^{i-k}}$;
- ▷ pour $i > h' - h$, $r_i = \sum_{k=1}^{h'-h} t_{i-k} (t_k^{p^h} - t_k - r_k)^{p^{i-k}}$.

CHAPITRE II

GROUPES DE COHOMOLOGIE DU MODÈLE LOCAL: CAS IWAHORI

Introduction

0.1. — On commence par des rappels sur les induites paraboliques d'après [28]. Les paraboliques que l'on considère sont les paraboliques opposés aux paraboliques standard. On s'intéresse tout particulièrement aux représentations elliptiques, d'après une terminologie de Dat, i.e. aux sous-quotients irréductibles de l'induite normalisée du parabolique $P_{g,2g,\dots,sg}^{\text{op}}(F_o)$ à $\text{GL}_{sg}(F_o)$,

$$\pi_o\left\{\frac{1}{2}(s-1)\right\} \times \cdots \times \pi_o\left\{\frac{1}{2}(1-s)\right\}$$

où π_o est une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$, celles-ci seront dites de type π_o . Ainsi on notera $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}$ (resp. $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o}$) l'unique quotient (resp. sous-espace) irréductible de cette induite, noté plus habituellement $\text{St}_s(\pi_o)$ (resp. $\text{Speh}_s(\pi_o)$). On rappelle que d'après [28], ces sous-quotients irréductibles sont paramétrés par les orientations $\vec{\Gamma}^s$ du graphe linéaire complet à s sommets

$$\Gamma^s : \circ \xrightarrow{\frac{1}{2}(s-1)} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\frac{1}{2}(1-s)} \circ$$

Étant données deux représentations π_1 et π_2 , elliptiques de type π_o , de respectivement $\text{GL}_{s_1g}(F_o)$ et $\text{GL}_{s_2g}(F_o)$, les induites normalisées du parabolique $P_{s_1g,(s_1+s_2)g}^{\text{op}}(F_o)$ à $\text{GL}_{(s_1+s_2)g}(F_o)$,

$$\pi_1\left\{-\frac{1}{2}s_2(g-1)\right\} \times \pi_2\left\{\frac{1}{2}s_1(g-1)\right\} \quad \text{et} \quad \pi_1\left\{-\frac{1}{2}s_2(g+1)\right\} \times \pi_2\left\{\frac{1}{2}s_1(g+1)\right\}$$

sont de longueur 2, chacun des constituant étant une représentation elliptique de type π_o , dont l'orientation de $\Gamma^{s_1+s_2}$ est une des deux qui prolonge celle du graphe partiellement orienté obtenu par la concaténation du graphe de π_1 avec celui de π_2 (resp. du graphe de π_2 avec celui de π_1)

$$\vec{\Gamma}^s : \underbrace{\circ \leftarrow \cdots \rightarrow \circ}_{\vec{\Gamma}^{s_1}} \longleftrightarrow \underbrace{\circ \rightarrow \cdots \rightarrow \circ}_{\vec{\Gamma}^{s_2}}$$

$$\text{(resp. } \vec{\Gamma}^s : \underbrace{\circ \leftarrow \circ \cdots \rightarrow \circ}_{\vec{\Gamma}^{s_2}} \longleftrightarrow \underbrace{\circ \rightarrow \circ \cdots \rightarrow \circ}_{\vec{\Gamma}^{s_1}} \text{)}.$$

On notera alors ces induites sous la forme $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ (resp. $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$). Ces notations sont compatibles au calcul des foncteurs de Jacquet pour les paraboliques opposés au paraboliques standard tandis qu'elles sont inversement orientées pour les foncteurs de Jacquet pour les paraboliques standard, cf. § II.1.2.

0.2. — On donne ensuite une preuve (théorème II.2.0.7) de IV.4.0.17 pour les représentations qui ont des vecteurs invariants sous le sous-groupe d'Iwahori standard Iw_o , i.e. les représentations elliptiques de type 1_o . Par un argument d'accouplement cohomologique, proposition II.2.0.4, on obtient le résultat pour les représentations elliptiques de type ξ_o , où ξ_o est un caractère de $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\times$.

Pour prouver le cas Iwahori, on utilise que $\text{Def}_{d,st}^d := (\text{Def}_{d,n})^{Iw_o/K_{o,n}}$ muni de son morphisme structurel, est semi-stable (cf. la proposition II.2.0.5) et possède une interprétation modulaire très simple en termes de drapeaux (cf. II.2.0.6). On dispose alors d'une description explicite du complexe des cycles évanescents associé, rappelée au théorème II.2.0.8, et on en déduit en particulier au corollaire II.2.0.9 que pour toute représentation irréductible τ_o de $D_{o,d}^\times$, $(\Psi_{F_o,\ell,d}^i(\tau_o))^{Iw_o}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension le coefficient binomial $\binom{d-1}{i}$, qui est pur de poids $2i$. Le reste de la preuve est alors purement combinatoire à partir de la proposition II.2.0.12.

II.1. Rappels sur les représentations de $\text{GL}_d(F_o)$

Depuis [28], tous les énoncés qui suivent sont bien connus des experts; les autres pourront aisément y retrouver les preuves.

II.1.1. Induites paraboliques

DÉFINITION II.1.1.1. — Pour une suite $0 < r_1 < \cdots < r_k = d$, on note P_{r_1, \dots, r_k} le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi $\text{GL}_{r_1}(F_o) \times \text{GL}_{r_2-r_1}(F_o) \times \cdots \times \text{GL}_{r_k-r_{k-1}}(F_o)$ et soit $P_{r_1, \dots, r_k}^{\text{op}}$ le parabolique opposé dont on note $N_{r_1, \dots, r_k}^{\text{op}}$ le radical unipotent.

II.1.1.2. — Soient π_1 et π_2 des représentations de respectivement $\text{GL}_{n_1}(F_o)$ et $\text{GL}_{n_2}(F_o)$; on note selon la coutume, $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite parabolique

$$\pi_1 \times \pi_2 := \text{Ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}^{\text{op}}(F_o)}^{\text{GL}_{n_1+n_2}(F_o)} \pi_1 \left\{ -\frac{1}{2}n_2 \right\} \otimes \pi_2 \left\{ \frac{1}{2}n_1 \right\}$$

où $\pi_o\{r\}$ désigne la représentation $\pi_o \otimes |\det|^r$.

Remarque : le symbole \times est associatif, i.e. $\pi_1 \times (\pi_2 \times \pi_3) = (\pi_1 \times \pi_2) \times \pi_3$ que l'on notera donc $\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3$.

DÉFINITIONS II.1.1.3. – Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_o)$:

▷ les sous-quotients irréductibles de

$$V(\pi_o, s) := \pi_o\left\{\frac{1}{2}(s-1)\right\} \times \pi_o\left\{\frac{1}{2}(s-3)\right\} \times \cdots \times \pi_o\left\{\frac{1}{2}(1-s)\right\}$$

seront dits *elliptiques de type π_o* ;

▷ $V(\pi_o, s)$ possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on notera

$$\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o} \quad (\text{resp. } \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o});$$

c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée notée habituellement $St_s(\pi_o)$ (resp. $Speh_s(\pi_o)$);

▷ pour π_1 et π_2 des représentations respectivement de $GL_{\ell_1 g}(F_o)$ et $GL_{\ell_2 g}(F_o)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 \quad (\text{resp. } \pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2)$$

l'induite parabolique $\pi_1\left\{\frac{1}{2}\ell_2\right\} \times \pi_2\left\{-\frac{1}{2}\ell_1\right\}$ (resp. $\pi_1\left\{-\frac{1}{2}\ell_2\right\} \times \pi_2\left\{\frac{1}{2}\ell_1\right\}$), l'entier g étant sous-entendu.

La propriété habituelle de transitivité des induites paraboliques donne le lemme suivant.

LEMME II.1.1.4. – Pour $(\pi_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des représentations de $GL_{\ell_i g}(F_o)$, on a les égalités

$$(\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2)^\vee \simeq \pi_1^\vee \overleftarrow{\times} \pi_2^\vee, \quad (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2) \overrightarrow{\times} \pi_3 = \pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3), \quad (\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2) \overleftarrow{\times} \pi_3 = \pi_1 \overleftarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3).$$

En outre si π_1 et π_2 sont elliptiques de type π_o , il en est de même de $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et donc de $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$.

Remarque : pour π_1, π_2 et π_3 des représentations elliptiques de type π_o , on a aussi

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3) = \pi_2 \overleftarrow{\times} (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_3)$$

PROPOSITION-DÉFINITION II.1.1.5. – Pour g un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_o)$, on a pour $1 \leq t \leq s$:

▷ $\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o}$ (resp. $\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_o}$) est de longueur 2; on notera

$$\overleftarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_o} \quad (\text{resp. } \overrightarrow{[t, s-t-1]}_{\pi_o})$$

son unique sous-espace irréductible, et

$$\overleftarrow{[t, s-t-1]}_{\pi_o} \quad (\text{resp. } \overrightarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_o})$$

son unique quotient irréductible;

▷ par dualité $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o}$ (resp. $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o}$) est de longueur 2 avec

$$[\overleftarrow{s-t-1}, \overleftarrow{t}]_{\pi_o} \quad (\text{resp. } [\overleftarrow{s-t}, \overleftarrow{t-1}]_{\pi_o})$$

pour unique sous-espace irréductible et

$$[\overleftarrow{s-t}, \overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \quad (\text{resp. } [\overleftarrow{s-t-1}, \overleftarrow{t}]_{\pi_o})$$

pour unique quotient irréductible;

on notera $[\pi]$ (resp. $[\pi]$) l'unique, s'il existe, sous-espace (resp. quotient) irréductible de π . Pour π_1 et π_2 des représentations irréductibles elliptiques de type π_o , $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$ ont un unique sous-espace et un unique quotient irréductible et on a

$$[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] = [\pi_2^\vee \overleftarrow{\times} \pi_1^\vee]^\vee \quad [\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2] = [\pi_2^\vee \overleftarrow{\times} \pi_1^\vee]^\vee.$$

Pour π_3 une troisième représentation irréductible elliptique de type π_o , on a

$$\begin{aligned} [[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] \overrightarrow{\times} \pi_3] &= [\pi_1 \overrightarrow{\times} [\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3]] = [\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3], \\ [[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] \overleftarrow{\times} \pi_3] &= [\pi_1 \overrightarrow{\times} [\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3]] = [\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3]. \end{aligned}$$

▷ Soient $r \geq 1$ et $\Gamma^s = (a_i, \epsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que les a_i sont des entiers strictement positifs avec $s-1 = a_1 + \dots + a_r$ et $\epsilon_i = \pm 1$; on notera Γ^s sous la forme $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$ où pour tout i la flèche au-dessus de a_i est \overleftarrow{a}_i (resp. \overrightarrow{a}_i) si $\epsilon_i = -1$ (resp. $\epsilon_i = 1$). On associe à Γ^s un sous-quotient irréductible $[\Gamma^s]$ de $V(s, \pi_o)$ que l'on note aussi sous la forme $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi_o}$. On convient par ailleurs des égalités

$$[\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o} = [\dots, \overleftarrow{a+b}, \dots]_{\pi_o} \quad [\dots, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \dots]_{\pi_o} = [\dots, \overrightarrow{a+b}, \dots]_{\pi_o}.$$

D'après [28], on obtient alors, modulo les identifications ci-dessus, une bijection entre les sous-quotients irréductibles de $V(s, \pi_o)$ et l'ensemble des $[\Gamma^s]$ telle que l'on ait les relations

$$\begin{aligned} [[\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o}] &= [\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o} \\ [[\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o}] &= [\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o} \\ [[\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{b}, \dots]_{\pi_o}] &= [\dots, \overleftarrow{b}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}, \dots]_{\pi_o} \\ [[\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_o}] &= [\dots, \overleftarrow{b}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}, \dots]_{\pi_o} \end{aligned}$$

où \overleftarrow{c} désigne arbitrairement \overleftarrow{c} ou \overrightarrow{c} .

REMARQUE II.1.1.6. – Dans [28], $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$ est représenté sous la forme

$$\circ \xleftarrow{\frac{1}{2}(s-1)} \circ \dots \circ \xleftarrow{\dots} \circ \xrightarrow{\dots} \circ \xrightarrow{\frac{1}{2}(1-s)}$$

où les a_1 premières flèches vont dans le sens de la flèche au-dessus de a_1 , les a_2 suivantes dans le sens de la flèche au-dessus de a_2 , ... Ainsi graphiquement on a

$$[\Gamma_1^{s_1}] \overrightarrow{\times} [\Gamma_2^{s_2}] : \circ \xleftarrow{\dots} \circ \xrightarrow{\dots} \circ \xleftrightarrow{\Gamma_1^{s_1}} \circ \xleftrightarrow{\Gamma_2^{s_2}} \circ \xrightarrow{\dots} \circ$$

$$(\text{resp. } [\Gamma_1^{s_1}] \overleftarrow{\times} [\Gamma_2^{s_2}] : \underbrace{\circ \leftarrow \circ \cdots \rightarrow \circ}_{\Gamma_2^{s_2}} \longleftrightarrow \underbrace{\circ \rightarrow \circ \cdots \rightarrow \circ}_{\Gamma_1^{s_1}}).$$

Exemples: la représentation cuspidale irréductible π_o de $GL_g(F_o)$ étant fixée, on a avec nos notations

$$\begin{aligned} \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o} &= \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} \cdots \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}]}^s = \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}]}^s \\ \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o} &= \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}]}^s = \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} \cdots \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}]}^s \\ \overleftarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_o} &= \overbrace{[[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o}]}^s = \overbrace{[[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t]}_{\pi_o}]}^s \\ &= \overbrace{[[\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}]}^s = \overbrace{[[\overrightarrow{s-t}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[t-2]}_{\pi_o}]}^s \end{aligned}$$

Notation: Dans la suite $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}$ désignera une représentation elliptique quelconque de type π_o de $GL_{sg}(F_o)$.

II.1.2. Foncteur de Jacquet. – Soit $P = MN$ un parabolique de GL_d de Lévi M et de radical unipotent N .

DÉFINITION II.1.2.1. – Pour π une représentation admissible de $GL_d(F_o)$, l'espace des vecteurs $N(F_o)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(F_o) \simeq P(F_o)/N(F_o)$. On notera $J_N(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

LEMME II.1.2.2. – Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_o)$. Pour $1 \leq h \leq d$, le foncteur de Jacquet vérifie les propriétés suivantes:

▷ si g ne divise pas h , alors

$$J_{N_{h,d}^{op}}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}) = J_{N_{h,d}^{op}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o}) = J_{N_{h,d}}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}) = J_{N_{h,d}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o}) = (0);$$

▷ si $h = tg$, alors

$$\begin{aligned} J_{N_{tg,sg}}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}) &= \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o\{(s-t)/2\}} \otimes \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_o\{-t/2\}}, \\ J_{N_{tg,sg}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o}) &= \overrightarrow{[t-1]}_{\pi_o\{(t-s)/2\}} \otimes \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o\{t/2\}}, \\ J_{N_{tg,sg}^{op}}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}) &= \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o\{(t-s)/2\}} \otimes \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_o\{t/2\}}, \\ J_{N_{tg,sg}^{op}}(\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_o}) &= \overrightarrow{[t-1]}_{\pi_o\{(s-t)/2\}} \otimes \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o\{-t/2\}}; \end{aligned}$$

Preuve. – Soit $\Gamma = (a_i, \epsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$; les résultats découlent alors des propriétés suivantes:

▷ $J_{N_{g,2g,\dots,sg}}^{op}([\Gamma^s])$ est de la forme $\pi_o\{\frac{1}{2}(1-s) + \sigma(0)\} \otimes \cdots \pi_o\{\frac{1}{2}(1-s) + \sigma(s-1)\}$ où σ est une permutation de l'ensemble $\{0, \dots, s-1\}$ soumise à la règle suivante: soit $1 \leq i \leq r$ avec $\epsilon_i = 1$ (resp. $\epsilon_i = -1$), pour tout $a_1 + \cdots + a_{i-1} \leq r < r' \leq a_1 + \cdots + a_i$ alors $\sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(r')$ (resp. $\sigma^{-1}(r) > \sigma^{-1}(r')$)⁽¹⁾.

▷ en ce qui concerne $J_{N_{g,2g,\dots,sg}}([\Gamma^s])$ la règle est inversée, i.e. $\sigma^{-1}(r) > \sigma^{-1}(r')$ (resp. $\sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(r')$).

□

II.2. Preuve du cas Iwahori

Étant donné une représentation complexe σ_o de W_o et un entier r , $\sigma_o(r)$ désigne la représentation $\sigma_o \otimes |\text{cl}|^r$. On rappelle le lemme suivant.

LEMME II.2.0.3. – *Pour tout caractère $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, on a un isomorphisme*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o \otimes (\psi \circ \text{val} \circ \det)) \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o) \otimes (\psi \circ \delta)$$

où $\delta : (g, \sigma) \in \text{GL}_d(F_o) \times W_o \rightarrow -\text{val}(\det g) - \deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$.

Le but est alors d'étendre le lemme précédent en la proposition suivante.

PROPOSITION II.2.0.4. – *Pour tout caractère η_o de F_o^\times , en tant que $(\text{GL}_d(F_o) \otimes W_o)$ -module, on a*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o \otimes \eta_o) \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o) \otimes (\eta_o \otimes \eta_o \circ \text{cl}^{-1}).$$

Preuve. – L'isomorphisme de l'énoncé découle d'un accouplement cohomologique que l'on va expliciter dans les lignes qui suivent. On considère la catégorie des faisceaux en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -modules sur les espaces considérés. Soit \mathfrak{X}_n l'espace rigide analytique associé au schéma formel $\text{Spf Def}_{d,n}$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ muni de la topologie étale de Berkovich (cf. [2]); on note en particulier \mathfrak{X}_s (resp. \mathfrak{X}_η) sa fibre spéciale (resp. générique). Dans *loc. cit.*, l'auteur construit le foncteur des cycles évanescents Ψ_η tel que pour tout faisceau \mathcal{F} sur \mathfrak{X}_n , $R^q \Psi_\eta(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à une extension étale $\mathfrak{N}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$ associe le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie $H^q(\mathfrak{N}_\eta, \mathcal{F})$.

Ainsi pour tous faisceaux \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , on a une flèche

$$T^0 : R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_2) \longrightarrow R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathcal{F}_2).$$

En outre étant donné un élément de \mathcal{N}_o , la correspondance (c_1, c_2) associée fournit

$$c_1^* R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}) \longrightarrow R^0 \Psi_\eta(c_1^* \mathcal{F}) \longrightarrow R^0 \Psi_\eta(c_2^! \mathcal{F}) \longrightarrow c_2^! R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F})$$

⁽¹⁾ Autrement dit σ est compatible aux orientations des flèches.

compatible avec T^0 , c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} c_1^* R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1) \otimes c_1^* R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{c_1^* T^0} & c_1^* R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_2^! R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1) \otimes c_2^! R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{c_2^! T^0} & c_2^! R^0 \Psi_\eta(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \end{array}$$

D'après, par exemple, [6] théorème II 6.2, on en déduit pour tout $i \geq 0$, des flèches

$$T^i : R^0 \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} R^i \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow R^i \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui, d'après la commutativité du diagramme ci-dessus et l'unicité des flèches T^i , sont compatibles à l'action de \mathcal{N}_o , i.e. $T^i(ns_1, ns_2) = nT^i(s_1, s_2)$ pour tout $n \in \mathcal{N}_o$.

On fixe $s \in R^0 \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et on considère l'application

$$T_s^i : R^i \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow R^i \Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

définie par $T_s^i(t) = T^i(s, t)$. On vérifie aisément que T_s^0 est un isomorphisme, de sorte que d'après *loc. cit.*, théorème 6.2 (c) – qui n'est autre qu'une application du lemme des cinq – T_s^i est un isomorphisme pour tout \mathcal{F} . On note encore T^i et pour $s \in \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^0$, T_s^i les applications

$$T_i : \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^0 \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i \longrightarrow \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i, \quad T_s^i : \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i \longrightarrow \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i.$$

En utilisant la notion de module de coordonnées et son équivalence avec celle de modules divisibles, on dispose (cf. [15]) d'un morphisme $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_n^d \rightarrow \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_n^1$ dit déterminant, de sorte que l'on peut considérer les cycles évanescents $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, 1}^0$ sur $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_n^1$ comme un sous-espace de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^0$. Or d'après la théorie de Lubin-Tate, $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, 1}^0$ est une représentation de $F_o^\times \times F_o^\times \times W_o$ isomorphe à $\bigoplus_{\eta_o} \eta_o \otimes \eta_o \otimes \eta_o \circ \mathrm{cl}^{-1}$, où η_o décrit les caractères de F_o^\times . Soit alors pour η_o fixé, un élément s_{η_o} de la composante indexée par η_o de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, 1}^0$ vu comme élément de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^0$. L'application $T_{s_{\eta_o}}^i : \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i \rightarrow \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i$ induit alors l'isomorphisme de l'énoncé. \square

PROPOSITION II.2.0.5. – *L'anneau $\mathrm{Def}_{d,n}$ est muni d'une action de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$ et on définit*

$$\mathrm{Def}_{d, st} := (\mathrm{Def}_{d,n})^{\mathrm{Iw}_o/K_{o,n}}$$

où Iw_o est le sous-groupe d'Iwahori standard, i.e. l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$ triangulaires supérieures modulo \mathcal{M}_o . L'anneau ainsi défini ne dépend pas de l'entier $n > 0$ choisi, il est régulier et semi-stable sur $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$, i.e. il existe des coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ tels que $\mathrm{Def}_{d, st} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_d]]$ et l'image de π_o par le morphisme structural $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[[\pi_o]] \rightarrow \mathrm{Def}_{d, st}$ est égale à $\prod_{i=1}^d \alpha_i$.

Preuve. – L'indépendance de la définition de $\text{Def}_{d,st}$ relativement à d , découle simplement du fait que $K_{o,n}$ est un sous-groupe distingué de Iw_o pour tout $n > 0$. Ainsi on a $\text{Def}_{d,st} = (\text{Def}_{d,1})^{\text{Iw}_o/K_{o,1}}$ où $\text{Iw}_o/K_{o,1}$ est isomorphe au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\text{GL}_d(\kappa(o))$. On rappelle en outre que $\text{Def}_{d,0} \hookrightarrow \text{Def}_{d,1}$ représente le foncteur des structures de niveau 1 sur le \mathcal{O}_o -module formel universel sur $\text{Def}_{d,0} = \overline{\mathbb{F}}_p[[a_0, \dots, a_{d-1}]]$, à savoir $\tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_0$ où $\tau = x^q$; la structure de niveau universelle sur $\text{Def}_{d,1}$ est donnée par une application \mathbb{F}_q -linéaire $\iota_{o,1} : \mathbb{F}_q^d \rightarrow \text{Def}_{d,1}$ avec $\iota_{o,1}(e_i) = \alpha_i^1 \in \text{Def}_{d,1}$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de \mathbb{F}_q^d qui vérifie la condition de Drinfeld

$$\tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_0 = \prod_{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d} \in \kappa(o)^d} \left(X - \sum_{i=1}^d \lambda_i \alpha_i^1 \right).$$

Par ailleurs, on a $\text{Def}_{d,1} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[[\alpha_1^1, \dots, \alpha_d^1]]$, l'action de $M \in \text{GL}_d(\kappa(o))$ étant donnée par la multiplication à droite de M^{-1} sur \mathbb{F}_q^d . L'orbite sous l'action du Borel standard de $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ de la base canonique de \mathbb{F}_q^d est le drapeau complet

$$(0) \subset \text{Vect}(e_1) \subset \text{Vect}(e_1, e_2) \subset \dots \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_d) = \mathbb{F}_q^d$$

Ainsi l'inclusion $\text{Def}_{d,0} \hookrightarrow \text{Def}_{d,st}$ représente le foncteur des "drapeaux complets" du noyau $\Sigma_d[\pi_o]$ de la multiplication par π_o du \mathcal{O}_o -module formel universel sur $\text{Def}_{d,0}$, i.e.

$$(0) \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_d = \Sigma[\pi_o]$$

où les G_i sont des sous- \mathbb{F}_q -modules de $\Sigma[\pi_o]$ de rang i . En posant

$$P_i(X) = \prod_{\sum_i \lambda_i \alpha_i^1 \in G_i} \left(X - \sum_i \lambda_i \alpha_i^1 \right),$$

dans $\text{Def}_{d,1}[X]$, on a $P_i(X) = (X^q + \alpha_i) \circ P_{i-1}(X)$ et donc $(\tau + \alpha_d) \circ \dots \circ (\tau + \alpha_1) = \tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_0$. En outre la donnée des α_i définit complètement les G_i de sorte que $\text{Def}_{d,st} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_d]]$ avec en particulier $a_0 = \pi_o = \prod_{i=1}^d \alpha_i$. \square

COROLLAIRE II.2.0.6. – *L'inclusion $\text{Def}_{d,0} \hookrightarrow \text{Def}_{d,st}$ représente le foncteur des "drapeaux complets" du noyau $\Sigma_d[\pi_o]$ de la multiplication par π_o du \mathcal{O}_o -module formel sur $\text{Def}_{d,0}$, i.e. la donnée de sous- \mathbb{F}_q -modules de rang i , G_i telles que $(0) \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_d = \Sigma_d[\pi_o]$. Il existe alors des indéterminées α_i pour $1 \leq i \leq d$ tels que $\text{Def}_{d,st} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_d]]$ avec*

$$(\tau + \alpha_d) \circ \dots \circ (\tau + \alpha_1) = \tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_0.$$

THÉORÈME II.2.0.7. – *Pour tout $0 \leq i < d$, on a*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{F}_o, \ell, d}^i(1_o) \simeq [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i)$$

et pour $g \neq 1$ un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, on a $(\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i(\pi_o[s]_D))^{\mathrm{Iw}_o} = (0)$ où Iw_o désigne l'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$.

Preuve. – On raisonne par récurrence sur d ; on suppose donc le résultat acquis pour tout $h \leq d$, ce qui est vérifié pour $h = 1$. Commençons par rappeler un résultat sur les cycles évanescents sur un schéma semi-stable.

THÉORÈME II.2.0.8 (cf. [20]). – Soit $X \rightarrow S = \mathrm{Spec} \mathcal{O}_o$ un schéma semi-stable, i.e. tel que localement pour la topologie étale \mathcal{O}_X est de la forme $\mathcal{O}_o[t_1, \dots, t_d]/(\pi_o - \prod_{i=1}^d t_i)$; en notant comme d'habitude Ψ_{η_o} le foncteur des cycles proches, on a

$$R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \Lambda^i R^1 \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad R^1 \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \bigoplus_{i=1}^d (\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\overline{X}_{s,i}} / (\overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ diagonal})(-1)$$

avec $X_{i,s}$ localement défini par $t_i = 0$ dans la fibre spéciale X_s de X .

COROLLAIRE II.2.0.9. – Pour tout $0 \leq i < d$ et toute représentation irréductible admissible τ_o de $D_{o,d}^\times$, $(\Psi_{F_o, \ell, d}^i)^{\mathrm{Iw}_o}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension le coefficient binomial $\binom{d-i}{i}$ qui est pur de poids $2i$.

Preuve. – En effet avec les notations du théorème précédent, en tout point géométrique z de X_s , les germes de $R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_z$ sont purs de poids $2i$, poids indépendant du relèvement choisi pour le Frobenius. On applique le théorème avec

$$X = \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p[\alpha_1, \dots, \alpha_d]) \longrightarrow \mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p[\pi_o],$$

l'image de π_o étant donnée par le produit des α_i . Le théorème de comparaison de Berkovich donne alors que le i -ième faisceau des cycles évanescents $\Psi_{F_o, st}^{d,i}$ de $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d, st}$ est pur de poids $2i$. En outre en notant $\pi_{n \rightarrow st} : \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d, n} \rightarrow \mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d, st}$, le faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, st, \eta_o}$ sur la fibre générique de l'espace analytique $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d, st}$ est isomorphe à $\pi_{n \rightarrow st, \eta_o, *} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, n, \eta_o}$ avec des notations évidentes. On a

$$R^i \Psi_{st, \eta_o}(\pi_{n \rightarrow st, \eta_o, *} \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \pi_{n \rightarrow st, s_o, *} R^i \Psi_{n, \eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, n, \eta_o}),$$

soit donc

$$R^i \Psi_{st, \eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, st, \eta_o}) \simeq \pi_{n \rightarrow st, s, *} R^i \Psi_{n, \eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell, n, \eta_o})^{\mathrm{Iw}_o}.$$

Or comme les fibres spéciales sont réduites à un point, on obtient que $\Psi_{F_o, st}^{d,i} \simeq (\Psi_{F_o, \ell, d}^i)^{\mathrm{Iw}_o}$, d'où le résultat. \square

LEMME II.2.0.10 (cf. [28]). – L'espace des invariants sous l'Iwahori standard de $\overleftarrow{[h-1, d-h]}_{1_o}$ est de dimension le coefficient binomial $\binom{d-1}{h-1}$.

Preuve. – D’après un argument classique (cf. par exemple [3], lemme 4.7), cette dimension est égale au nombre de fois que $J_{N_d}(\overrightarrow{[h, d-h-1]}_{1_o})$ contient la représentation triviale du tore maximal de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, où N_d est le sous-groupe unipotent maximal du Borel standard et J est le foncteur de Jacquet. Or d’après [28], $J_{N_d}(\overrightarrow{[h, d-h-1]}_{1_o})$ est la représentation triviale avec la multiplicité égale au cardinal de Λ^+ , le sous-ensemble de l’ensemble des permutations, cf. la remarque II.1.1.6, de $\{1, \dots, d\}$ telles que $\lambda(i) < \lambda(i+1)$ pour tout $1 \leq i \leq h$ et $\lambda(i) > \lambda(i+1)$ pour tout $h \leq i \leq d$. Le cardinal de Λ^+ est alors $\binom{d-1}{h-1}$; en effet une fois choisi $h-1$ entiers distincts entre 2 et d , on les classe par ordre décroissant, $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{h-1}$; on classe de même par ordre croissant le complémentaire $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_{d-h}$ et on pose $\lambda(i) = \alpha_i$ pour $1 \leq i < h$, $\lambda(h) = 1$, $\lambda(h+i) = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq d-h$. On vérifie aisément que l’on définit bien ainsi une bijection sur Λ^+ . \square

II.2.0.11. — On commence dans un premier temps par traquer les sous-quotients irréductibles de

$$n - \mathrm{Ind}_{B^{op}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} \left(1_o \left\{ \frac{1}{2}(d-) \right\} \times \dots \times 1_o \left\{ \frac{1}{2}(1-d) \right\} \right),$$

i.e. les représentations elliptiques de type 1_o . On raisonne par récurrence, le cas $d = 1$ correspondant à la théorie de Lubin-Tate⁽²⁾.

PROPOSITION II.2.0.12. – *Les représentations elliptiques de type 1_o de*

$$\lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^h, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \mathrm{Ind}_{P_{h;d}^{op}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} \lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o, 1}^h, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

sont, avec les notations du §II.1.1, de la forme $\overrightarrow{[t, i, h-i-1, d-h-t]}_{1_o}(-i-t)$ avec $0 \leq t \leq d-h$; plus précisément pour $t = 0$ (resp. $t = d-h$, resp. $0 < t < d-h$) on obtient

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{[i, h-i-1]}_{1_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[d-h-1]}_{1_o} \quad (\text{resp. } \overrightarrow{[i, h-i-1]}_{1_o} \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[d-h-1]}_{1_o}, \\ & \text{resp. } (\overrightarrow{[i, h-i-1]}_{1_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[d-h-t-1]}_{1_o}) \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[t-1]}_{1_o}) \end{aligned}$$

où par exemple l’unique quotient est de la forme

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{[i, h-i, d-h-1]}_{1_o} \quad (\text{resp. } \overrightarrow{[d-h-1, 1, i, h-i-1]}_{1_o}, \\ & \text{resp. } \overrightarrow{[t-1, 1, i, h-i, d-h-t-1]}_{1_o}). \end{aligned}$$

Par cela on entend tout d’abord que dans le groupe de Grothendieck correspondant, les deux ou quatre représentations en question apparaissent simultanément; ensuite de manière plus précise, les induites de l’énoncé apparaissent comme sous-espace et comme quotient (quitte à changer les flèches non précisées).

⁽²⁾ Le cas $d = 2$ est prouvé dans [9].

Preuve. – Elle est similaire à celle de la proposition I.5.3.9. Soit ξ_o un caractère (non ramifié) de F_o^\times . D’après l’hypothèse de récurrence on a

$$\widetilde{\mathcal{U}_{F_o, \ell, h}^i(\xi_o)} \simeq [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{h-i-1}]_{\xi_o} \otimes \xi_o(-i)$$

en tant que représentation de $\mathrm{GL}_h(F_o) \times W_o$. Les représentations elliptiques de type 1_o s’obtiennent exclusivement comme sous-quotient des induites normalisées

$$n - \mathrm{Ind}_{B^{op}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} 1_o\{i_1\} \times \cdots \times 1_o\{i_d\}$$

avec $\{i_1, \dots, i_d\} = \{\frac{1}{2}(1-d), \dots, \frac{1}{2}(d-1)\}$ ou encore avec des induites non normalisées comme les sous-quotients de

$$\mathrm{Ind}_{B^{op}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} 1_o\{i_1 + \frac{1}{2}(1-d)\} \times \cdots \times 1_o\{i_d + \frac{1}{2}(d-1)\}.$$

Dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$, on découpe $\lim_{\rightarrow I} H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^h, \mathcal{F}_{\xi_o})$ suivant les caractères χ_o de \mathbb{Z} et ensuite suivant les supports cuspidaux pour $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ ce qui s’écrit $\sum_{\eta_o, \chi_o} \eta_o \otimes \chi_o$ où η_o (resp. χ_o) décrit les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ (resp. \mathbb{Z}). On en déduit alors que pour $0 \leq i \leq h-1$, $\lim_{\rightarrow I} H_c^j(M_{I, s_o}^h, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ est de la forme

$$\sum_{\xi_o, \eta_o, \chi_o} \mathrm{Ind}_{P_{h,d}^{op}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} ([\overleftarrow{i}, \overrightarrow{h-i-1}]_{\xi_o \otimes \chi_o} \otimes \eta_o) \otimes (\xi_o \chi_o)(-i).$$

En ce qui concerne les représentations elliptiques de type 1_o , on considère les χ_o de la forme $\xi_o^{-1}(-t)$, ce qui donne avec les notations ci-dessus $i_1 = \frac{1}{2}(d-1) - t, \dots, i_h = \frac{1}{2}(d-1) - h + 1 - t$, d’où le résultat.

Si on ne veut plus simplement raisonner dans le groupe de Grothendieck, on choisit $\eta_o \otimes \chi_o$ un sous-espace (resp. un quotient) irréductible du groupe de cohomologie précédent. Le reste du raisonnement est alors identique. \square

II.2.0.13. — On globalise $\mathrm{St}_\infty \otimes \mathrm{St}_o$ en une représentation automorphe Π de $D_\mathbb{A}^\times$ telle qu’il existe deux places distinctes de ∞, o et des places de ramification Bad de D , pour lesquelles la composante locale de Π est cuspidale; pour l’existence d’une telle globalisation cf. par exemple [1]. D’après le théorème (14.12) de [24], la composante isotypique $H_{\eta_o}^i[\Pi^\infty]$ est nulle pour $i \neq d-1$ et pour $i = d-1$ elle est isomorphe, en tant que représentation du groupe de Weil-Deligne local en o , à $\mathrm{Sp}(d) \otimes |\mathrm{cl}|^{(1-d)/2}$ où Sp_d est la représentation spéciale i.e. $\mathrm{Sp}(d) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\frac{1}{2}(1-d)) \oplus \cdots \oplus \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\frac{1}{2}(d-1))$ en tant que représentation de W_o avec l’action de la monodromie donnée par⁽³⁾

$$N : \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\frac{1}{2}k) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\frac{1}{2}k + 1).$$

⁽³⁾ Dans le contexte de [16], ce résultat est prouvé dans [27].

PROPOSITION II.2.0.14. – Pour tout $0 \leq i < d$, $[\overleftarrow{d-1}]_{1_o}(-i)$ est un sous-quotient de

$$\left[\varinjlim_I H^i(M_{I, \bar{s}_o}, R^{d-1-i} \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \right] [\Pi^\infty].$$

Preuve. – En égales caractéristiques, d’après la conjecture de monodromie-poids, pour un schéma à réduction semi-stable, la filtration aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents coïncide avec la filtration définie par les noyaux itérés de l’opérateur de monodromie N (cf. [20]); le résultat découle alors directement de la description de la cohomologie générique donnée dans [24]. \square

LEMME II.2.0.15. – Soit h_0 le plus grand (s’il existe) $0 < h \leq d$ tel qu’il existe t, j pour lesquels

$$[\overleftrightarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{h-t}]_{1_o}(-i-t)$$

est un sous-quotient de $\varinjlim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) [\Pi^\infty]$. Alors pour tout $h' > h_0$,

$$[\overleftrightarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h_0-i-1}, \overleftarrow{h_0-t}]_{1_o}(-i-t)$$

n’est pas un sous-quotient de $\varinjlim_I H_c^{j+1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) [\Pi^\infty]$.

Preuve. – Si $\pi_{1_o}(-i-t)$ est un sous-quotient de

$$\varinjlim_I H_c^{j+1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) [\Pi^\infty]$$

pour π_{1_o} une représentation elliptique de type 1_o , pour $h' > h_0$ alors pour des raisons de poids π_{1_o} est, d’après la proposition II.2.0.12 de la forme $[\overleftrightarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h'-i-1}, \overleftarrow{h'-t}]_{1_o}$. On conclut alors par la maximalité de h_0 . \square

LEMME II.2.0.16. – Pour tout $h' < h$ et tout $0 \leq t < h$ (resp. $t = h$),

$$[\overleftrightarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{h-t-\alpha}]_{1_o}(-i-t), \quad (\text{resp. } [\overleftrightarrow{h}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}]_{1_o}(-h-i)),$$

pour $0 < \alpha \leq h-t$, n’est pas un sous-quotient de

$$\varinjlim_I H_c^{j-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) [\Pi^\infty].$$

Preuve. – En effet d’après la proposition II.2.0.12, les représentations elliptiques de type 1_o de poids $2(i+t)$ de $\varinjlim_I H_c^{j-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) [\Pi^\infty]$, pour $0 \leq t \leq h'$, sont de la forme

$$[\overleftrightarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h'-i-1}, \overleftarrow{h'-t}]_{1_o}$$

de sorte qu’en numérotant comme d’habitude les sommets du graphe $\vec{\Gamma}^d$ de $\frac{1}{2}(d-1)$ à $\frac{1}{2}(1-d)$, on a toujours

$$\dots \bullet_{\frac{1}{2}(d-1-2(t+d-h-1))} \longrightarrow \bullet_{\frac{1}{2}(d-1-2(t+d-h))} \dots$$

alors que dans $[\overleftarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{h-t-\alpha}]_{1_o}$, cette flèche est orientée dans l'autre sens car $\alpha > 0$ (pour $t = h$ un simple argument de poids suffit). \square

La proposition suivante montre que dans II.2.0.12, on doit avoir $t = 0$.

PROPOSITION II.2.0.17. – Pour $i > 0$ fixé et pour tout $j, t > 0$ et $h \neq 0$,

$$[\overleftarrow{t}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{h-t}]_{1_o}$$

n'est pas un sous-quotient de $\lim_{\rightarrow I} H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$.

Preuve. – On raisonne par l'absurde; soit donc h_0 le plus grand, l'idée est de montrer que cette représentation se retrouverait, à travers la suite spectrale de stratification et celle des cycles évanescents dans la cohomologie de la fibre générique ce qui n'est pas d'après [24].

La suite spectrale associée à la stratification de la fibre spéciale M_{I, s_o} :

$$E_1(I, i)^{p,q} = H_c^{p+q}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-p}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \Rightarrow H^{p+q}(M_{I, \bar{s}_o}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)),$$

le fait que $H^0(M_{I, s_o}^d, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ soit de poids $2i$, la proposition II.2.0.12, et les deux lemmes précédents, montrent que pour $0 < t < h_0$ (resp. $t = h_0$) et tout $r \geq 1$,

$$\pi_o := [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h_0-i-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{h_0-1}]_{1_o}(-i-t)$$

$$(\text{resp. } \pi_o := [\overleftarrow{h_0-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h_0-i-1}]_{1_o}(-i-t))$$

est un sous-quotient de $\lim_{\rightarrow I} E_r^{h_0, j-h_0}(I, i)[\Pi^\infty]^{(4)}$.

Montrons que pour tout $k \geq 2$, il n'existe pas de j et h tels que $\pi_o(-i-t)$ soit un sous-quotient de $\lim_{\rightarrow I} H_c^{j+k}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^{i+1-k} \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$. D'après la proposition II.2.0.12, une représentation elliptique de type 1_o de cette dernière représentation de poids $2(i+t)$, est de la forme

$$[\overleftarrow{t+k-1}, \overleftarrow{i-k+1}, \overrightarrow{d-h-i+k-2}, \overleftarrow{h-t-k+1}]_{1_o}$$

en particulier on doit avoir $d-h-i+k-2 \leq d-h_0-i-1$ soit $h \geq h_0+k-1$ ce qui contredit la maximalité de h_0 .

De même pour tout $k \geq 2$, il n'existe pas de j, h tels que $\pi_o(-i-t)$ soit un sous-quotient de $\lim_{\rightarrow I} H_c^{j-k}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^{i+k-1} \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$. En effet pour $h > 0$, un tel sous-quotient elliptique de type 1_o de poids $2(i+t)$ de cet espace, est de la forme

$$[\overleftarrow{t-k+1}, \overleftarrow{i+k-1}, \overrightarrow{d-h-i+k-2}, \overleftarrow{h-t+k-1}]_{1_o},$$

de sorte que $i+k-1 \leq i$, contradiction. Pour $h = 0$, pour des raisons de poids, il faut $t = j-1$; le résultat découle alors du lemme suivant.

(4) En fait c'est un quotient.

LEMME II.2.0.18. – *La dimension des invariants sous Iw_o de*

$$[\overleftarrow{j-2}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{h-j+1}]_{1_o}$$

est strictement supérieure à $\binom{d-1}{i+j-2} \binom{i+j-2}{i-1}$.

Preuve. – On procède comme rappelé au lemme II.2.0.10. Pour donner une numérotation qui induise l'orientation donnée, on peut commencer par donner le numéro 1 au sommet $(i+j-1)$ -ième sommet, puis on choisit $i+j-2$ parmi $d-1$ qui serviront à numérotter les $i+j-2$ premiers sommets. Parmi ces $i+j-2$, on en choisit à nouveau $i-1$ pour numérotter les sommets de $j-1$ à $i+j-2$. On peut aussi numérotter avec 1 un des premiers sommets dans une configuration $\leftarrow \bullet \rightarrow$, il y en a forcément un parmi les $i+j-2$ premiers, d'où l'inégalité stricte. \square

Ainsi $\pi_o(-i-t)$ apparaît dans l'aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents, ce qui n'est pas d'après [24]. \square

COROLLAIRE II.2.0.19. – *Tous les $\varinjlim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ sont purs de poids $2i$.*

LEMME II.2.0.20. – *Si $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$ est un sous-quotient de*

$$\varinjlim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

alors $h' = h$ ou $h-1$.

Preuve. – À nouveau si $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$ est un sous-quotient de l'espace en question pour $h' > h$, alors d'après II.2.0.12

$$[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h'-i-1}, \overleftarrow{1}, \overrightarrow{h'-h}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$$

aussi. Soit alors h_0 le plus grand h' tel que $\varinjlim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ contienne

$$[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h'-i-1}, \overleftarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overleftarrow{h-\alpha_1-\alpha_2}]_{1_o}(-i)$$

avec α_1 et α_2 strictement positifs. Celle-ci se retrouve alors par maximalité de h_0 et par un lemme analogue au précédent, dans l'aboutissement de la suite spectrale de stratification, à savoir $\varinjlim_I H^j(M_{I, \bar{s}_o}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$. Pour des raisons de poids, elle se retrouve aussi dans l'aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents; en effet elle ne peut pas être compensée par une contribution des points supersinguliers en vertu de II.2.0.9, ni d'après II.2.0.12 par des $R^{i'} \Psi$ pour $i' > i$ et ni d'après II.2.0.17 pour $i' < i$. On en déduit donc $h' \leq h$.

Si $h' < h-1$, d'après II.2.0.12 $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i-1}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}$ ne peut pas être un sous-quotient de $\varinjlim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ car $d-h'-i-1 > d-h-i$; d'où le résultat. \square

PROPOSITION II.2.0.21. – Pour tout $0 < h \leq d-i-1$, $\lim_I H_c^h(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient.

Preuve. – On raisonne par récurrence descendante sur h ; pour $h = d-i-1$, on utilise le fait que $\lim_I H^{d-i-1}(M_{I, \bar{s}_o}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ admet $\text{St}_o(-i)$ comme sous-quotient.

On rappelle que $\lim_I H_c^{d-i-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=i+1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ se calcule comme l'induite $\text{Ind}_{P_{i+1}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)}[\overleftarrow{i}]_{1_o} \otimes \pi'$, d'après II.2.0.19, pour une certaine représentation admissible π' de $\text{GL}_{d-i-1}(F_o)$ et que, d'après l'hypothèse de récurrence sur les $\Psi_{F_o, \ell, h}^i(1_o)$, pour tout $h \neq i+1$ la partie de poids $2i$ de

$$\lim_I H_c^{d-i-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=i+1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

est soit nulle pour $h \leq i$, soit, pour $h > i+1$ de la forme $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{h-1-i}, \overleftarrow{d-h}]_{1_o}(-i)$. La suite spectrale associée à la stratification impose alors que π' admet la représentation de Steinberg $[\overleftarrow{d-i-2}]_{1_o}$ comme sous-quotient et donc

$$\lim_I H_c^{d-i-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=i+1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{d-i-2}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient.

Supposons donc la propriété vérifiée pour $1 < h < d-i$, i.e. que

$$\lim_I H_c^h(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient. En outre on sait cette dernière n'apparaît pas dans l'aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents de sorte qu'il existe j, i', h' tels qu'elle soit un sous-quotient de

$$\lim_I H_c^j(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^{i'} \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

Pour des raisons de poids et d'après le corollaire II.2.0.19, il faut $i' = i$ de sorte que l'annulation doit se faire dans la suite spectrale associée à la stratification avec $j = h \pm 1$ et $h' \neq h$, i.e. $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}, \overleftarrow{h-1}]_{1_o}(-i)$ est un sous-quotient de

$$\lim_I H_c^{h \pm 1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h'}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty].$$

D'après le lemme précédent, on doit avoir $h' = h-1$, soit en remarquant encore que $\lim_I H_c^{h-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h+1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ est de la forme

$$\text{Ind}_{P_{d-h+1}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)}[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i}]_{1_o} \otimes \pi',$$

on obtient que π' admet $[\overleftarrow{h-1}]_{1_o}$ comme sous-quotient et donc que

$$\lim_I H_c^{h-1}(M_{I, \bar{s}_o}^{=d-h+1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-h-i+1}, \overleftarrow{h-2}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient; d'où le résultat. \square

COROLLAIRE II.2.0.22. – *Pour tout $0 \leq i < d$, $\Psi_{F_o, \ell, d}^i(1_o)$ admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient.*

Preuve. – D'après la proposition ci-dessus, $\lim_I H_c^1(M_{I, \bar{s}_o}^{d-1}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient. Cette dernière représentation ayant des vecteurs fixes sous l'Iwahori Iw_o , et comme

$$\lim_I H^1(M_{I, \bar{s}_o}, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$$

n'admet pas comme sous-quotient celle-ci, la suite spectrale associée à la stratification implique que $\lim_I H^0(M_{I, \bar{s}_o}^d, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^\infty]$ admet $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i)$ comme sous-quotient. On utilise alors la proposition (15.2) de [3], cf. IV.7.1.19, qui donne un isomorphisme $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \times W_o$ -équivariant

$$\lim_I H^0(M_{I, \bar{s}_o}^d, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \simeq \text{Hom}_{\overline{D}^\times}((\mathcal{C}_{\overline{D}}^\infty)^\vee, \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i)$$

où \overline{D} est l'algèbre à division centrale sur F dont les invariants sont ceux de D excepté en les places ∞, o où ils sont respectivement égaux à $-1/d$ et $1/d$, soit en particulier $\overline{D}_o \simeq D_{o, d}$, et où $\mathcal{C}_{\overline{D}}^\infty$ est l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes sur $\overline{D}^\times \setminus (\overline{D}_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$. Le résultat découle alors directement d'une correspondance de Jacquet-Langlands globale entre Π et une unique sous-représentation de $\mathcal{C}_{\overline{D}}^\infty$ de multiplicité 1; concrètement l'ensemble des sous-représentations τ^∞ de $\mathcal{C}_{\overline{D}}^\infty$ telles que $\tau^{\infty, o} \simeq \Pi^{\infty, o}$ est réduit à un élément de multiplicité 1. Ainsi le lemme de Schur donne

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(1_o) = \lim_I H^0(M_{I, \bar{s}_o}^d, R^i \Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))[\Pi^{\infty, o}]$$

en tant que représentation de $\text{GL}_d(F_o) \times W_o$, d'où le résultat. \square

Ainsi d'après II.2.0.9 et II.2.0.10, il ne reste plus de place dans $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(1_o)$ pour d'autres représentations ayant des vecteurs invariants sous l'Iwahori Iw_o , autres que les

$$[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i).$$

De la même façon pour toute représentation irréductible τ_o de $D_{o, d}^\times$ qui n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de la représentation triviale, $\Psi_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o)$ n'admet comme sous-quotient aucune représentation ayant des vecteurs invariants sous Iw_o . \square

CHAPITRE III

DESCRIPTION DE LA SOMME ALTERNÉE DES GROUPES DE COHOMOLOGIE

Introduction

0.1. — Le but est de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor. La démarche est classique: il s'agit tout d'abord d'utiliser la formule des traces de Lefschetz-Fujiwara et donc de compter les points fixes sous l'action d'une correspondance de Hecke tordue par une puissance assez grande du Frobenius et ensuite de transférer les intégrales orbitales obtenues afin de reconnaître le côté géométrique de la formule des traces de Selberg. On en déduit alors un calcul de la somme alternée des groupes de cohomologie du modèle local de Deligne-Carayol. Dans le cas Iwahori, des arguments de pureté nous redonnent les résultats obtenus à la fin du chapitre précédent.

0.2. — Dans un premier temps §III.1.1, on donne une description adélique des points géométriques des variétés d'Igusa de seconde espèce: on ne fait ici qu'adapter les résultats de [24]. On compte alors §III.1.3, les points fixes sous l'action des correspondances de Hecke et d'une puissance arbitraire du Frobenius en o . Ce comptage se fait en termes d'intégrales orbitales; à nouveau ces résultats sont une réadaptation de ceux de [24], les fonctions de transfert de la proposition III.1.6.3 étant prises dans [16]. Par une application de la formule des traces de Lefschetz-Fujiwara et de Selberg, on en déduit alors, au théorème III.1.7.2, le calcul de $[H_{h,\rho_\infty,\tau_o}^*]$.

0.3. — Le dernier paragraphe est consacré au calcul, théorème III.2.1.1, de la représentation virtuelle $[\widetilde{\Psi}_{F_o,l,d}^*(\tau_o)]$, où τ_o est une représentation irréductible quelconque de $D_{o,d}^\times$. Ce résultat est l'équivalent dans notre cadre du théorème VII.1.5 de [16]. En particulier comme d'après le corollaire II.2.0.9, pour tout $0 \leq i < d$ et toute représentation irréductible admissible τ_o de $D_{o,d}^\times$, $(\Psi_{F_o,l,d}^i)^{\text{Iw}_o}$ est pur de poids $2i$, le calcul virtuel III.2.1.1 redonne bien le théorème II.2.0.7.

III.1. des systèmes locaux de Harris-Taylor

L'essentiel des résultats est déjà présent dans [24], il suffit simplement de les adapter aux variétés d'Igusa.

III.1.1. Description adélique de $M_{I, \bar{o}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$

DÉFINITION III.1.1.1. – Un φ -espace (V, φ) sur $\bar{\kappa}(o)$, est un $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{k}(o)$ -espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une application $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \text{Frob}_q$ -semi-linéaire bijective,

$$\varphi : V \longrightarrow V.$$

Étant donné un \mathcal{D} -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$, soit $V_i = \mathcal{E}_{i, \eta}$ la fibre de \mathcal{E}_i au point générique $\eta \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$ de $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$; pour tout i , les j_i induisent des isomorphismes $V_i \simeq V_{i+1}$. On note $V = V_0$ et $\varphi : V \rightarrow V$ l'application bijective $F \otimes \text{Frob}_q$ -semi-linéaire induite par t_0 : (V, φ) est un φ -espace. L'action de D sur V commute à φ et donne un homomorphisme de F -algèbre: $\iota : D^{\text{op}} \rightarrow \text{End}(V, \varphi)$. Le triplet (V, φ, ι) est appelé *la fibre générique* du \mathcal{D} -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, h_i, t_i)$.

DÉFINITION III.1.1.2. – Deux \mathcal{D} -faisceaux elliptiques de caractéristique o sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ sont dits isogènes si leurs fibres génériques sont isomorphes.

Si x est une place de F , on considère le F_x -module de Dieudonné

$$(V_x, \varphi_x) := (F_x \widehat{\otimes}_F V, F_x \widehat{\otimes}_F \varphi)$$

muni du morphisme de F_x -algèbre $\lambda_x : D_x^{\text{op}} \rightarrow \text{End}(V_x, \varphi_x)$. On pose

$$M_x = H^0(\text{Spec}(\mathcal{O}_x \widehat{\otimes} \bar{\kappa}(o)), \mathcal{E}_0),$$

qui est un \mathcal{D}_x -réseau de V_x stable sous $\lambda_x(D_x^{\text{op}})$.

PROPOSITION III.1.1.3 (cf. [24], prop. 9.4). – *La construction ci-dessus définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques sur $\bar{\kappa}(o)$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes des paires*

$$((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|})$$

où (V, φ) est un φ -espace de rang d^2 sur $F \otimes \bar{\kappa}(o)$, $\lambda : D^{\text{op}} \rightarrow \text{End}(V, \varphi)$ est un morphisme de F -algèbres et $(M_x)_{x \in |X|}$ est une collection de \mathcal{D}_x -réseaux des F_x -modules de Dieudonné $(V_x, \varphi_x) = (F_x \widehat{\otimes}_F V, F_x \widehat{\otimes}_F \varphi)$ qui vérifient les propriétés suivantes:

(i) si $x = \infty$, on a⁽¹⁾

$$\varphi_\infty(M_\infty) \supset M_\infty, \quad \varphi_\infty^d(M_\infty) = \varpi_\infty^{-1} M_\infty, \quad \dim_{\bar{\kappa}(o)}(\varphi_\infty(M_\infty)/M_\infty) = d;$$

⁽¹⁾ On a supposé pour simplifier $\deg(\infty) = 1$.

(ii) si $x = o$, on a

$$\varpi_o M_o \subset \varphi_o(M_o) \subset M_o,$$

le $\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o)$ -module $M_o/\varphi_o(M_o)$ est de longueur d et il est supporté par la composante connexe de $\text{Spec}(\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o))$ correspondant à l'inclusion $\kappa(o) \hookrightarrow \bar{\kappa}(o)$;

(iii) si $x \neq o, \infty$, on a

$$\varphi_x(M_x) = M_x;$$

(iv) toute base du $F \otimes \bar{\kappa}(o)$ -espace vectoriel V appartient et engendre le $\mathcal{O}_x \widehat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$ -sous-module M_x de V_x pour presque toutes les places $x \neq o, \infty$ de F .

DÉFINITION III.1.1.4. – Une φ -paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est un couple formé d'une F -algèbre \tilde{F} , commutative de dimension finie et d'un élément $\tilde{\Pi} \in \tilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$ qui satisfait à la propriété suivante: pour toute F -sous-algèbre propre F' de \tilde{F} , $\tilde{\Pi}$ n'appartient pas à $F'^\times \otimes \mathbb{Q} \subset \tilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$.

À tout φ -espace (V, φ) , Drinfeld associe une φ -paire (cf. [24], A.4).

PROPOSITION III.1.1.5 (cf. [24], prop. 9.9). – Soit $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ la φ -paire associée au φ -espace (V, φ) . On a alors les propriétés suivantes:

- (i) \tilde{F} est un corps et $[\tilde{F} : F]$ divise d ;
- (ii) $F_\infty \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{\infty}$ est l'unique place de \tilde{F} divisant ∞ , on a l'égalité $\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d$;
- (iii) il existe une unique place $\tilde{o} \neq \tilde{\infty}$ de \tilde{F} telle que $\tilde{o}(\tilde{\Pi}) \neq 0$; de plus \tilde{o} divise o ;
- (iv) on a l'égalité $h = d[\tilde{F}_{\tilde{o}} : F_o]/[\tilde{F} : F]$, où h est l'indice de la strate à laquelle $(\mathcal{C}_i, j_i, t_i)$ appartient.

COROLLAIRE III.1.1.6. – L'algèbre $\text{End}(V, \varphi, \lambda)$ est une algèbre à division centrale sur \tilde{F} de dimension $(d/[\tilde{F} : F])^2$ dont les invariants sont donnés comme suit:

$$\text{inv}_{\tilde{x}}(\text{End}(V, \varphi, \lambda)) = \begin{cases} -[\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{\infty}, \\ [\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{o}, \\ [\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]\text{inv}_x(D) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout place x de F et toute place \tilde{x} de \tilde{F} divisant x .

DÉFINITION III.1.1.7. – Un (D, ∞, o) -type est une φ -paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ telle que:

- (i) \tilde{F} est un corps et $[\tilde{F} : F]$ divise d ;
- (ii) $F_\infty \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{\infty}$ est l'unique place de \tilde{F} divisant ∞ , on a

$$\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d;$$

- (iii) il existe une unique place $\tilde{o} \neq \tilde{\infty}$ de \tilde{F} telle que $\tilde{o}(\tilde{\Pi}) \neq 0$; de plus \tilde{o} divise o ;

(iv) pour toute place x de F et toute place \tilde{x} de \tilde{F} divisant x , on a

$$(d[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]/[\tilde{F} : F])\text{inv}_x(D) \in \mathbb{Z}.$$

THÉORÈME III.1.1.8 (cf. [24], th. 9.13). – *L'application composée*

$$(\mathcal{E}_i, j_i, t_i) \longmapsto (V, \varphi, \lambda) \longmapsto (\tilde{F}, \tilde{\Pi}),$$

qui à un \mathcal{D} -faisceau elliptique défini sur $\bar{\kappa}(o)$ associe son (D, ∞, o) -type, induit une bijection de l'ensemble des classes d'isogénie des \mathcal{D} -faisceaux elliptiques définis sur $\bar{\kappa}(o)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des (D, ∞, o) -types.

Toujours selon [24] (9.12), la bijection inverse est la suivante. Étant donné $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$, soit (W, ψ) "le" φ -espace sur $\bar{\kappa}(o)$ qui lui correspond et soit Δ "l'"algèbre à division centrale sur \tilde{F} dont les invariants sont

$$\text{inv}_{\tilde{x}}\Delta = \begin{cases} [\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{\infty}, \\ -[\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{o}, \\ [\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]\text{inv}_x(D) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour toute place x de F et toute place \tilde{x} de \tilde{F} divisant x . En particulier Δ est de dimension $(d/[\tilde{F} : F])^2$ sur \tilde{F} et $D^{\text{op}} \otimes_F \Delta$ et $\mathbb{M}_d(\text{End}(W, \psi))$ sont des algèbres simples centrales sur \tilde{F} de même dimension et possédant les mêmes invariants en toute place \tilde{x} de \tilde{F} . En vertu du théorème de Skolem-Noether, on choisit un isomorphisme

$$\alpha : D^{\text{op}} \otimes_F \Delta \longrightarrow \mathbb{M}_d(\text{End}(W, \psi))$$

et on pose $(V, \varphi) := (W, \psi)^d$. On obtient alors un homomorphisme de F -algèbre

$$\iota : D^{\text{op}} \xrightarrow{\delta \mapsto \delta \otimes 1} D^{\text{op}} \otimes_F \Delta \xrightarrow{\alpha} \mathbb{M}_d(\text{End}(W, \psi)) = \text{End}(V, \varphi)$$

tel que le commutant de $\iota(D^{\text{op}})$ dans $\text{End}(V, \varphi)$ est l'image de Δ par l'homomorphisme de \tilde{F} -algèbre

$$\Delta \xrightarrow{\delta \mapsto 1 \otimes \delta} D^{\text{op}} \otimes_F \Delta \xrightarrow{\alpha} \text{End}(V, \varphi)$$

Remarque : si $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est un (D, ∞, o) -type associé à la strate h , on a les injections d'algèbres $\Delta^{\infty, o} \hookrightarrow D_{\mathbb{A}}^{\infty, o}$, $\Delta_o^{\text{et}} := \Delta_o^{\tilde{o}} \hookrightarrow \mathbb{M}_{d-h}(F_o)$ et $\Delta_o^c := \Delta_{\tilde{o}} \hookrightarrow D_{o, h}$.

PROPOSITION III.1.1.9. – *Soit $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ un (D, ∞, o) -type associé à la strate h . Il existe pour tout idéal I de A , une bijection de $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\tilde{h}}(s)(\bar{\kappa}(o))_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}$ avec le quotient*

$$\Delta^\times \setminus [(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times / K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \times \text{GL}_{d-h}(F_o) / K_{o, m} \times D_{o, h}^\times / (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})].$$

De plus si $(\mathcal{J}_{J^o, m'}^{\hbar}, c_1, c_2)$ est une correspondance de Hecke naturelle⁽²⁾ sur $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\hbar}(s)$ associée à un élément $(g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}, (g_o^c, \delta_o, \sigma_o))$ de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times} \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \widetilde{\mathcal{N}}_o$ ⁽³⁾ la correspondance induite par ces bijections est

$$\begin{array}{c} \Delta^{\times} \setminus \left[\frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}}{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m}} \times \frac{D_{o, h}^{\times}}{(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right] \\ \uparrow c_2 \\ \Delta^{\times} \setminus \left[\frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}}{K_{\mathbb{A}, J^o}^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m'}} \times \frac{D_{o, h}^{\times}}{(1 + \Pi_{o, h}^{s'+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right] \\ \downarrow c_1 \\ \Delta^{\times} \setminus \left[\frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}}{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m}} \times \frac{D_{o, h}^{\times}}{(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right] \end{array}$$

où c_1 est induit par les inclusions

$$K_{\mathbb{A}, J^o}^{\infty, o} \subset K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}, \quad K_{o, m'} \subset K_{o, m}, \quad (1 + \Pi_{o, h}^{s'+1} \mathcal{D}_{o, h}) \subset (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})$$

et où c_2 est induit par la multiplication à droite de $(g^{\infty, o})^{-1}$ sur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}$, de $(g_o^{\text{et}})^{-1}$ sur $\text{GL}_{d-h}(F_o)$, et la multiplication à gauche de δ_o sur $D_{o, h}^{\times}$.

Preuve. – En vertu de [24], §9 et §10, $\mathcal{J}_{I^o, m}^{\hbar}(\bar{\kappa}(o))$ est en bijection avec

$$\Delta^{\times} \setminus \left[(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times} / K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \times \text{GL}_{d-h}(F_o) / K_{o, m} \times \mathbb{Z} \right]$$

où l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times} \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$ se décrit comme dans l'énoncé. L'action d'un élément g_o^c de $\text{GL}_h(F_o)$ n'intervient que sur la composante \mathbb{Z} . Le groupe $\text{PSL}_d(F_o)$ étant simple, l'endomorphisme de \mathbb{Z} associé à g_o^c est la translation de valeur $k \cdot \text{val}(\det(g_o))$, pour un certain entier k : en prenant pour g_o^c , l'élément ϖ_o du centre, en utilisant la proposition B.10 de [24], on obtient $k = -1$. En outre d'après *loc. cit.*, le frobenius géométrique en o agit par translation de valeur -1 sur la composante \mathbb{Z} . Le résultat en découle alors de manière immédiate, en identifiant $\mathbb{Z} \times \mathcal{D}_{o, h}^{\times}$ avec $D_{o, h}^{\times}$ où l'on envoie (n, δ_o) sur $\Pi_{o, h}^n \delta_o$. \square

III.1.1.10. — On rappelle, selon *loc. cit.*, que le couple $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ est construit de la manière suivante. Soit $D_{\mathfrak{q}}^{\times}$ l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments de D^{\times} . Soit alors $\gamma \in D_{\mathfrak{q}}^{\times}$ et $F' = F[\gamma]$ tel qu'il existe une unique place ∞' au-dessus de ∞ ainsi qu'une unique place o' au-dessus de o vérifiant $o'(\gamma) \neq 0$ avec $h =$

(2) I.e. comme dans [24].

(3) J^o est donc tel que $K_{\mathbb{A}, J^o}^{\infty, o} \subset K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}$ et m' tel que $K_{o, m'} \subset K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}}$.

$d[F'_o : F_o]/[F' : F]$. Soit donc $\Pi' \in F'$ tel que $\infty'(\Pi') \neq 0$, $o'(\Pi') \neq 0$ et $x'(\Pi') = 0$ pour tout $x' \neq \infty', o'$. On définit alors $\tilde{F} = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} F'[(\Pi')^n]$ et $\tilde{\Pi}$. Le couple $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est ainsi un (D, ∞, o) -type associé à la strate h et tous ceux-ci sont obtenus par ce procédé. Un tel élément $\gamma \in D^\times$ est dit elliptique en ∞ et de type h en o : son image dans Δ définit un élément $\delta \in \Delta_{\mathfrak{h}}^\times$. On a ainsi $\tilde{F} \subset F' = F[\gamma] = \tilde{F}[\delta] \subset \Delta$ ainsi qu'une inclusion naturelle: $\Delta_{\mathbb{A}}^{\infty, o} \hookrightarrow D_{\mathbb{A}}^{\infty, o}$. Précisons la situation en la place o . À conjugaison près, on peut supposer que

$$\gamma = (\gamma_o^{\text{et}}, \gamma_o^c) \in \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \subset \text{GL}_d(F_o)$$

avec $F_o[\gamma_o^{\text{et}}] = (F'_o)' \subset \mathbb{M}_{d-h}(F_o)$ et $F_o[\gamma_o^c] = F'_o \subset \mathbb{M}_h(F_o)$. On obtient ainsi des injections naturelles

$$(\Delta_o^{\text{et}})^\times := (\Delta_o^{\tilde{o}})^\times \hookrightarrow \text{GL}_{d-h}(F_o) \quad \text{et} \quad (\Delta_o^c)^\times := \Delta_o^\times \hookrightarrow D_{o,h}^\times.$$

III.1.2. Description adélique de $\widetilde{M_{I, \bar{s}_o}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$. — On considère désormais les structures de niveau à l'infini comme au paragraphe I.1.4.

En termes de la description III.1.1.3, l'application sur les variétés sans niveau

$$r_\infty : \widetilde{M_\emptyset} \longrightarrow M_\emptyset$$

se décrit comme suit. Pour tout

$$((V, \phi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}) \in M_\emptyset(\bar{\kappa}(o))$$

soit $i_{\infty, 0} : \text{Spec}(\bar{\kappa}(o)) \rightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty))$ son pôle, i.e. le support du $\kappa(\infty) \otimes \bar{\kappa}(o)$ -module $\varphi_\infty(M_\infty)/M_\infty$. Via l'identification $\mathcal{D}_\infty \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_\infty)$, l'équivalence de Morita donne

$$(V_\infty, \varphi_\infty) = (V'_\infty, \varphi'_\infty)^d \quad \text{et} \quad M_\infty = (M'_\infty)^d.$$

On note \check{M}'_∞ le dual du $\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$ -module libre M'_∞ , de rang d , et soit $\check{\varphi}'_\infty : \check{M}'_\infty \rightarrow \check{M}'_\infty$ la restriction de l'application $\check{\psi}'_\infty : \check{V}'_\infty \rightarrow \check{V}'_\infty$ duale de φ'_∞ .

PROPOSITION III.1.2.1 (cf. [24], p. 274). — *L'ensemble $\widetilde{M_\emptyset}(\bar{\kappa}(o))$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphismes des triplets*

$$((V, \phi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\nu, \alpha))$$

où $((V, \phi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|})$ appartient à $M_\emptyset(\bar{\kappa}(o))$ et

$$\nu : \text{Spec}(\bar{\kappa}(o)) \longrightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$$

est un relèvement de $i_{\infty, 0}$ et

$$\alpha : \mathcal{N}_{d,1} \xrightarrow{\sim} \check{M}'_\infty$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_\infty \widehat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$ -modules qui commute avec les ψ . L'application r_∞ envoie $((V, \phi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\nu, \alpha))$ sur $((V, \phi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|})$ et $\bar{D}_\infty^\times \simeq \bar{\mathcal{D}}_\infty^\times \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit comme décrit au paragraphe I.1.4.

Remarque : l'application

$$\lambda(\kappa)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} : \widetilde{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\infty, h}}(s)(\kappa)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \longrightarrow \text{Spec}(\kappa(\infty)_d)$$

est induite par l'application $\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d \deg(\infty)\mathbb{Z}$ qui envoie (n, δ) sur $n + \deg(\infty)\delta \pmod{d \deg(\infty)}$.

III.1.3. Comptage des points fixes. – On fixe un sous-groupe normal $\overline{K}_\infty \subset (\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z})$ et on note

$$M(s) = \widetilde{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\infty, h}}(s) / \overline{K}_\infty$$

qui est donc muni d'une action du produit $\mathcal{D}_{o, h}^\times / (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h}) \times (\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \overline{K}_\infty$ et d'une action par correspondances de Hecke associées aux éléments $g^{\infty, \tilde{\sigma}} = (g^{\infty, o}, g_o^{\text{et}}) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$:

$$\begin{array}{ccc} & M(g^{\infty, \tilde{\sigma}}, s)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \\ & \swarrow c_1 & \searrow c_2 \\ M(s)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \leftarrow \text{-----} & M(s)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}(\overline{\mathbb{F}}_q) \end{array}$$

où $M(g^{\infty, \tilde{\sigma}}, s)$ est le quotient

$$\left(\lim_{I^o, m} \widetilde{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\infty, h}}(s) \right) / \left(K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} \right) \times K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}}$$

et où la correspondance est induite par

$$\begin{array}{c} \Delta^\times \setminus \left[\frac{\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}}{\overline{K}_\infty} \times \frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times}{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m}} \times \frac{D_{o, h}^\times}{(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right] \\ \uparrow c_2 \\ \Delta^\times \setminus \left\{ \frac{\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}}{\overline{K}_\infty} \times \frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times}{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}}} \times \frac{D_{o, h}^\times}{(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right\} \\ \downarrow c_1 \\ \Delta^\times \setminus \left[\frac{\overline{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}}{\overline{K}_\infty} \times \frac{(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times}{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times \frac{\text{GL}_{d-h}(F_o)}{K_{o, m}} \times \frac{D_{o, h}^\times}{(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})} \right] \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} c_1 & [h^{\infty, o}(K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}), h_o^{\text{et}}(K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}}), d_o(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})] \\ & = [h^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}, h_o^{\text{et}} K_{o, m}, d_o(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})], \\ c_2 & [h^{\infty, o}(K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}), h_o^{\text{et}}(K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}}), d_o(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})] \\ & = [h^{\infty, o}(g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}, h_o^{\text{et}}(g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m}, d_o(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})]. \end{aligned}$$

REMARQUE III.1.3.1. – Dans cette description l'action de

$$(g_o^c, \delta_o, \sigma_o) \in \mathcal{N}_o \subset \mathrm{GL}_h(F_o) \times D_{o,h}^\times \times W_o$$

sur $M_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}$ est donnée par la multiplication à gauche de δ_o sur la composante $D_{o,h}^\times / (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})$.

DÉFINITION III.1.3.2. – Pour $r > 0$, $\bar{g}_\infty \in (\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z})$ et $\delta_o \in \mathcal{D}_{o,h}^\times$, on note

$$\mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{\sigma}}, s)$$

l'ensemble

$$\{m \in M(g^{\infty, \bar{\sigma}}, s)(\bar{\mathbb{F}}_q) / (g_o^c, \Pi_{o,h}^{-\mathrm{val}(\det(g_o^c)) - r} \delta_o, \mathrm{Frob}_o^r)(c_1(m)) \cdot \bar{g}_\infty \bar{K}_\infty = c_2(m)\}.$$

LEMME III.1.3.3 (cf. [24], lemme 11.1). – *Les ensembles $\mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{\sigma}}, s)$ sont finis pour $r > 0$ et chacun de ces points fixes est de multiplicité 1.*

On décompose ces ensembles, suivant leur (D, ∞, o) -type

$$\mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{\sigma}}, s) = \coprod_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{\sigma}}, s)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}$$

où la réunion porte sur les (D, ∞, o) -type associés à la strate h .

Soit $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ un (D, ∞, o) -type associé à la strate h et soit Δ l'algèbre à division centrale sur F correspondante. On note Δ_{\natural}^\times un système de représentants des classes de conjugaisons dans Δ^\times et pour $\delta \in \Delta^\times$, soit Δ_δ^\times le centralisateur de δ dans Δ^\times .

PROPOSITION III.1.3.4. – *L'ensemble $\mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{\sigma}}, s)_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})}$ est la réunion disjointe des doubles classes*

$$\coprod_{\delta \in \Delta_{\natural}^\times} \Delta_\delta^\times [\bar{h}_\infty \bar{K}_\infty, h^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I_o}^{\infty, o}, h_o^{\mathrm{et}} K_{o,m}, d_o(1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})]$$

telles que

$$\begin{aligned} (\bar{h}_\infty)^{-1} \delta \bar{h}_\infty &\in \bar{g}_\infty \bar{K}_\infty, & (h^{\infty, o})^{-1} \delta h^{\infty, o} &\in K_{\mathbb{A}, I_o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I_o}^{\infty, o}, \\ (h_o^{\mathrm{et}})^{-1} \delta h_o^{\mathrm{et}} &\in K_{o,m} g_o^{\mathrm{et}} K_{o,m}, & \delta &\in \Pi_{o,h}^{r + \mathrm{val}(\det(g_o^c))} \delta_o^{-1} (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h}) \end{aligned}$$

Preuve. – D'après la description des correspondances de Hecke donnée ci-dessus,

$$\begin{aligned} \Delta^\times [\bar{h}_\infty \bar{K}_\infty, h^{\infty, o} (K_{\mathbb{A}, I_o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I_o}^{\infty, o} g^{\infty, o}), \\ h_o^{\mathrm{et}} (K_{o,m} \cap (g_o^{\mathrm{et}})^{-1} K_{o,m} g_o^{\mathrm{et}}), d_o(1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})] \end{aligned}$$

appartient à $\text{Fix}_r^h(\delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{o}}, s)_{(\bar{F}, \bar{\Pi})}$ si et seulement s'il existe $\delta \in \Delta^\times$, $\bar{k}_\infty \in \bar{K}_\infty$, $k^{\infty, o} \in K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}$, $k_o^{\text{et}} \in K_{o, m}$ et $k_s \in (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})$ tels que

$$\begin{aligned} \bar{h}_\infty \bar{g}_\infty &= \delta \bar{h}_\infty \bar{k}_\infty, & h^{\infty, o} &= \delta h^{\infty, o} (g^{\infty, o})^{-1} k^{\infty, o}, \\ h_o^{\text{et}} &= \delta h_o^{\text{et}} (g_o^{\text{et}})^{-1} k_o^{\text{et}}, & d_o &= \delta \Pi_{o, h}^{-r - \text{val}(\det(g_o^c))} \delta_o d_o k_s, \end{aligned}$$

soit, si et seulement s'il existe $\delta \in \Delta^\times$ tel que

$$\begin{aligned} (\bar{h}_\infty)^{-1} \delta \bar{h}_\infty &\in \bar{g}_\infty \bar{K}_\infty, & (h^{\infty, o})^{-1} \delta h^{\infty, o} &\in K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}, \\ (h_o^{\text{et}})^{-1} \delta h_o^{\text{et}} &\in K_{o, m} g_o^{\text{et}}, & \delta &\in \Pi_{o, h}^{r + \text{val}(\det(g_o^c))} \delta_o^{-1} (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h}); \end{aligned}$$

en particulier, on a $o(\text{rn}(\delta)) = r + \text{val}(\det g_o^c)$. L'application

$$\begin{aligned} h^{\infty, o} (K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \cap (g^{\infty, o})^{-1} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o}) &\longmapsto h^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \\ (\text{resp. } h_o^{\text{et}} (K_{o, m} \cap (g_o^{\text{et}})^{-1} K_{o, m} g_o^{\text{et}})) &\longmapsto h_o^{\text{et}} K_{o, m} \end{aligned}$$

de l'ensemble des classes satisfaisant

$$(h^{\infty, o})^{-1} \delta h^{\infty, o} \in K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} \quad (\text{resp. } (h_o^{\text{et}})^{-1} \delta h_o^{\text{et}} \in K_{o, m} g_o^{\text{et}})$$

dans l'ensemble des classes vérifiant

$$(h^{\infty, o})^{-1} \delta h^{\infty, o} \in K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} \quad (\text{resp. } (h_o^{\text{et}})^{-1} \delta h_o^{\text{et}} \in K_{o, m} g_o^{\text{et}} K_{o, m})$$

est clairement bijective. Le résultat découle alors du lemme suivant. \square

LEMME III.1.3.5. – *Pour tout $h^{\infty, o} \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times$, $h_o^{\text{et}} \in \text{GL}_{d-h}(F_o)$ et $d_o \in D_{o, h}^\times$, le seul élément $\delta \in \Delta^\times$ tel que $(h^{\infty, o})^{-1} \delta h^{\infty, o} \in K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}$, $(h_o^{\text{et}})^{-1} \delta h_o^{\text{et}} \in K_{o, m}$ et $o(\text{rn}(\delta)) = 0$ est l'identité.*

Preuve. – Cf. [23], (3.2.6). \square

III.1.4. Intégrales orbitales. – Pour tout $\delta \in \Delta^\times$, soit

$$(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})_\delta^\times \quad (\text{resp. } \text{GL}_{d-h}(F_o)_\delta, \text{ resp. } (D_{o, h})_\delta^\times, \text{ resp. } (\bar{D}_\infty^\times)_\delta)$$

le centralisateur de δ dans $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times$ (resp. $\text{GL}_{d-h}(F_o)$), resp. $D_{o, h}^\times$, resp. \bar{D}_∞^\times . On fixe une mesure de Haar,

$$dh^{\infty, o} \quad (\text{resp. } dh_o^{\text{et}}, \text{ resp. } d\bar{h}_\infty)$$

sur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times$ (resp. $\text{GL}_{d-h}(F_o)$), resp. $\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^{\mathbb{Z}}$) normalisée par

$$\text{vol}(K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}, dh^{\infty, o}) = 1 \quad (\text{resp. } \text{vol}(K_{o, m}, dh_o^{\text{et}}) = 1, \text{ resp. } \text{vol}(\bar{K}_\infty, d\bar{h}_\infty) = 1).$$

Soit

$$dh_\delta^{\infty, o} \quad (\text{resp. } dh_{o, \delta}^{\text{et}}, \text{ resp. } d\bar{h}_{o, \delta}, \text{ resp. } d\bar{h}_{\infty, \delta})$$

une mesure de Haar sur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times}$ (resp. $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\delta}$, resp. $(D_{o,h})_{\delta}^{\times}$, resp. $(\bar{D}_{\infty}^{\times})_{\delta}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}$) et soit $d\delta'$ la mesure de comptage sur Δ_{δ}^{\times} . Soit alors

$$f^{\infty,o} \quad (\text{resp. } f_o^{\text{et}}, \text{ resp. } \bar{f}_{\infty})$$

la fonction caractéristique de

$$K_{\mathbb{A},I_o}^{\infty,o} g^{\infty,o} K_{\mathbb{A},I_o}^{\infty,o} \quad (\text{resp. } K_{o,m} g_o^{\text{et}} K_{o,m}, \text{ resp. } \bar{g}_{\infty} \bar{K}_{\infty})$$

dans $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times}$ (resp. $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$, resp. $\bar{D}_{\infty}^{\times}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}$). On introduit alors les intégrales orbitales

$$\begin{aligned} O_{\delta}(\bar{f}_{\infty}, d\bar{h}_{\infty,\delta}) &= \int_{(\bar{D}_{\infty}^{\times})_{\delta} \setminus \bar{D}_{\infty}^{\times}} \bar{f}_{\infty}((\bar{h}_{\infty})^{-1} \delta \bar{h}_{\infty}) \frac{d\bar{h}_{\infty}}{d\bar{h}_{\infty,\delta}}, \\ O_{\delta}(f^{\infty,o}, dh_{\delta}^{\infty,o}) &= \int_{(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})_{\delta}^{\times} \setminus (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times}} f^{\infty,o}((h^{\infty,o})^{-1} \delta h^{\infty,o}) \frac{dh^{\infty,o}}{dh_{\delta}^{\infty,o}}, \\ O_{\delta}(f_o^{\text{et}}, dh_{o,\delta}^{\text{et}}) &= \int_{\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\delta} \setminus \mathrm{GL}_{d-h}(F_o)} f_o^{\text{et}}((h_o^{\text{et}})^{-1} \delta h_o^{\text{et}}) \frac{dh_o^{\text{et}}}{dh_{o,\delta}^{\text{et}}}. \end{aligned}$$

Ces intégrales sont absolument convergentes et on introduit le volume V défini par

$$\mathrm{vol}\left(\Delta_{\delta}^{\times} \setminus [((\bar{D}_{\infty}^{\times})_{\delta}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}) \times (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})_{\delta}^{\times} \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\delta}], \frac{dh_{\delta}^{\infty,o} dh_{o,\delta}^{\text{et}}}{d\delta'}\right).$$

Pour tout $\delta \in \Delta^{\times}$, l'inclusion d'algèbres

$$D^{\infty,o} \hookrightarrow D_{\mathbb{A}}^{\infty,o} \quad (\text{resp. } \Delta_o^{\text{et}} \hookrightarrow \mathbb{M}_{d-h}(F_o), \text{ resp. } \Delta_o^c \hookrightarrow D_{o,h}, \text{ resp. } \Delta \hookrightarrow \bar{D}_{\infty}^{\text{op}}),$$

induit un isomorphisme de groupe

$$(\Delta^{\infty,o})_{\delta}^{\times} \simeq (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})_{\delta}^{\times}$$

(resp. $(\Delta_o^{\text{et}})_{\delta}^{\times} \simeq \mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\delta}$, resp. $(\Delta_o^c)_{\delta}^{\times} \simeq (D_{o,h})_{\delta}^{\times}$, resp. $(\Delta_{\infty}^{\times})_{\delta} \simeq (\bar{D}_{\infty}^{\times})_{\delta}$). En particulier la mesure de Haar $d\bar{h}_{\infty,\delta} \times dh_{\delta}^{\infty,o} \times dh_{o,\delta}^{\text{et}}$ induit une mesure de Haar dh_{δ} sur $(\Delta_{\mathbb{A}}^{\times})_{\delta}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}$.

LEMME III.1.4.1. – *Le volume V est égal au volume*

$$\mathrm{vol}\left(\Delta_{\delta}^{\times} \setminus (\Delta_{\mathbb{A}}^{\times})_{\delta}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}, \frac{dh_{\delta}}{d\delta'}\right).$$

Preuve. – Cf. [23], (3.3.4). □

Soit $\mathrm{Lef}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_{\infty}, \delta_o, g_o^c, g^{\infty,\bar{\sigma}}, s)_{(\bar{F}, \bar{\Pi})}$ le cardinal de $\mathrm{Fix}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_{\infty}, \delta_o, g_o^c, g^{\infty,\bar{\sigma}}, s)_{(\bar{F}, \bar{\Pi})}$. D'après ce qui précède $\mathrm{Lef}_r^{\bar{h}}(\bar{g}_{\infty}, \delta_o, g_o^c, g^{\infty,\bar{\sigma}}, s)_{(\bar{F}, \bar{\Pi})}$ est égal à

$$\sum_{\substack{\delta \in \Delta_{\mathbb{A}}^{\times} \\ \delta \in \Pi_{o,h}^{r+\mathrm{val}(\det g_o^c)} \delta_o^{-1} (1+\Pi_{o,h}^{\delta+1} \vartheta_{o,h})}} \mathrm{vol}\left(\Delta_{\delta}^{\times} \setminus (\Delta_{\mathbb{A}}^{\times})_{\delta}/\varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}, \frac{dh_{\delta}}{d\delta'}\right) \times O_{\delta}(\bar{f}_{\infty}, d\bar{h}_{\infty,\delta}) O_{\delta}(f^{\infty,o}, dh_{\delta}^{\infty,o}) O_{\delta}(f_o^{\text{et}}, dh_{o,\delta}^{\text{et}}).$$

LEMME III.1.4.2 (cf. [23], 3.4). – *La construction de la fin du paragraphe III.1.1 définit une bijection naturelle*

$$\{\gamma \in D_{\mathfrak{h}}^{\times} ; \gamma \text{ est elliptique en } \infty \text{ et de type } h \text{ en } o\} \xrightarrow{\sim} \coprod_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \{\delta \in \Delta_{\mathfrak{h}}^{\times}\}$$

où $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ décrit l'ensemble des (D, ∞, o) -type associé à la strate h .

Soit alors $\gamma \in D_{\mathfrak{h}}^{\times}$ elliptique en ∞ et de type h en o et soit $((\tilde{F}, \tilde{\Pi}), \delta)$ le triplet correspondant.

▷ On peut voir $\bar{D}_{\infty}^{\times}$ comme une forme intérieure de $D_{\infty}^{\times} = \mathrm{GL}_d(F_{\infty})$ et si $\bar{\gamma} \in \bar{D}_{\infty}^{\times}$ est le transfert de $\gamma \in D_{\infty}^{\times}$ défini à conjugaison près, $\bar{\gamma}$ et l'image de $\delta \in \Delta^{\times}$ dans $\bar{D}_{\infty}^{\times}$ sont conjugués dans $\bar{D}_{\infty}^{\times}$; on peut alors identifier le centralisateur $(\bar{D}_{\infty}^{\times})_{\bar{\gamma}}$ de $\bar{\gamma}$ dans $\bar{D}_{\infty}^{\times}$ avec $(\Delta_{\infty}^{\times})_{\delta}$.

▷ Comme $\Delta_{\mathbb{A}}^{\infty, o}$ est le centralisateur de \tilde{F} dans $D_{\mathbb{A}}^{\infty, o}$ avec $\tilde{F} \subset F' = F[\gamma] = \tilde{F}[\delta] \subset \Delta$, le centralisateur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})_{\gamma}^{\times}$ de γ dans $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}$ coïncide avec $(\Delta_{\mathbb{A}}^{\infty, o})_{\delta}^{\times}$.

▷ De même comme Δ_o^{et} (resp. Δ_o^c) est le centralisateur de $\tilde{F}_o^{\mathrm{et}}$ (resp. \tilde{F}_o^c) dans $\mathbb{M}_{d-h}(F_o)$ (resp. $D_{o,h}$), le centralisateur $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\gamma_o^{\mathrm{et}}}$ (resp. $(D_{o,h})_{\gamma_o^c}^{\times}$) de γ_o^{et} (resp. γ_o^c) dans $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ (resp. $D_{o,h}^{\times}$) coïncide avec $(\Delta_o^{\mathrm{et}})_{\delta}^{\times}$ (resp. $(\Delta_o^c)_{\delta}^{\times}$).

La mesure de Haar $dh_{\delta} = d\bar{h}_{\infty, \delta} dh_{\delta}^{\infty, o} \times dh_{o, \delta}^{\mathrm{et}} \times d\bar{h}_{o, \delta}$ sur $(\Delta^{\times})_{\delta}$ définit alors une mesure de Haar dh_{γ}^o (resp. $dh_{o, \gamma}^{\mathrm{et}}$, resp. $d\bar{h}_{o, \gamma}$) sur $(D_{\mathbb{A}}^o)_{\gamma}^{\times}$ (resp. $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)_{\gamma}$, resp. $(D_{o,h})_{\gamma}^{\times}$). Soit comme précédemment $\gamma \in D_{\mathfrak{h}}^{\times}$ elliptique en ∞ et de type h en o et soit $((\tilde{F}, \tilde{\Pi}), \delta)$ le triplet associé. Le centralisateur D_{γ}^{\times} de γ dans D^{\times} est une forme intérieure du centralisateur Δ_{δ}^{\times} de δ dans Δ^{\times} .

LEMME III.1.4.3. – *On a*

$$\mathrm{vol}\left(\Delta_{\delta}^{\times} \backslash (\Delta_{\mathbb{A}}^{\times})_{\delta} / \varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}, \frac{d\delta_{\mathbb{A}, \delta}}{d\delta'}\right) = \mathrm{vol}\left(D_{\gamma}^{\times} \backslash (D_{\mathbb{A}}^{\times})_{\gamma} / \varpi_{\infty}^{\mathbb{Z}}, \frac{dh_{\mathbb{A}, \gamma}}{dh_{\gamma}}\right).$$

Preuve. – Cf. [23], 3.5. □

Soit $D_{\mathfrak{h}, h}^{\times}$ un système de représentants des classes de conjugaisons de D^{\times} elliptiques en ∞ et de type h en o .

Remarque. – Soit $\gamma \in D_{\mathfrak{h}, h}^{\times}$ et $\delta \in \Delta_{\mathfrak{h}}^{\times}$ l'élément qui lui est associé d'après le lemme III.1.4.2. L'image de δ par l'inclusion $(D^{\infty, o})^{\times} \hookrightarrow (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}$ est conjuguée à $\gamma \in D^{\times} \subset (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^{\times}$. De même en notant δ_o^{et} (resp. $\bar{\delta}_o$) l'image de δ dans $\Delta_o^{\mathrm{et}} \hookrightarrow \mathbb{M}_{d-h}(F_o)$ (resp. $\Delta_o^c \hookrightarrow D_{o,h}$), si g_o^c est un élément semi-simple de $\mathrm{GL}_h(F_o)$ de même polynôme caractéristique que δ_o^c , alors $(g_o^{\mathrm{et}}, g_o^c) \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ est conjugué à $\gamma_o \in D_o^{\times}$.

Soit $g_o^{\mathrm{et}} \in \mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ (resp. $\bar{g}_o \in D_{o,h}^{\times}$) dans le support de f_o^{et} (resp. de \bar{f}_o). Si g_o^c est un élément semi-simple de $\mathrm{GL}_h(F_o)$ de même polynôme caractéristique que \bar{g}_o , le centralisateur de $(g_o^{\mathrm{et}}, g_o^c)$ dans $\mathrm{GL}_d(F_o)$ est le même que dans $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathrm{GL}_h(F_o)$;

il suffit en effet de remarquer que l'on a pris $r > 0$ pour la définition de \bar{f}_o . Ainsi étant donnée une mesure de Haar $dh_{(g_o^{\text{et}}, g_o)}$ sur $\text{GL}_d(F_o)_{(g_o^{\text{et}}, g_o^c)}$, on lui associe les mesures de Haar $dh_{g_o^{\text{et}}}$ et $dh_{g_o^c}$. On obtient alors la proposition suivante.

PROPOSITION III.1.4.4. — *On considère, comme précédemment, les mesures de Haar $d\bar{h}_\infty, dh^\infty$. Pour $\gamma \in D_{\mathbb{A},h}^\times$, on fixe une mesure de Haar $dh_{\mathbb{A},\gamma} = dh_{\infty,\gamma} \times dh_\gamma^\infty$ sur le centralisateur $(D_{\mathbb{A}}^\times)_\gamma / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$ dans $D_{\mathbb{A}}^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$ et soit dh_γ la mesure de comptage sur D_γ^\times . Soit $\bar{\gamma} \in \bar{D}_\infty^\times$, défini à conjugaison près, le transfert de γ ; son centralisateur $(\bar{D}_\infty^\times)_{\bar{\gamma}}$ dans \bar{D}_∞^\times est une forme intérieure de $(D_\infty^\times)_\gamma$; soit alors $d\bar{h}_{\infty,\bar{\gamma}}$ le transfert de $dh_{\infty,\gamma}$, la mesure de Haar sur $(\bar{D}_\infty^\times)_{\bar{\gamma}} / \varpi_\infty^\mathbb{Z}$. On note*

$$\epsilon_\infty(\gamma) = (-1)^{d/[F_\infty[\gamma]:F_\infty]-1}$$

le signe de Kottwitz à l'infini de γ . En posant $f^\infty = f^{\infty,o} f_o^{\text{et}}$, le nombre de Lefschetz $\text{Lef}_r^{\text{et},h}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty,\bar{o}}, s)$ est alors donné par

$$\sum_{\gamma \in D_{\mathbb{A},h}^\times \cap C_h(\Pi_{o,h}^{\text{val}(\det g_o^c)+r} \delta_o^{-1})} \epsilon_\infty(\gamma) \text{vol}(D_\gamma^\times \backslash (D_{\mathbb{A}}^\times)_\gamma / \varpi_\infty^\mathbb{Z}, \frac{dh_{\mathbb{A},\gamma}}{dh_\gamma}) O_{\bar{\gamma}}(\bar{f}_\infty, d\bar{h}_{\infty,\bar{\gamma}}) O_{\gamma^o}(f^o, dh_{\gamma^o}) O_{g_o^{\text{et}}}(f_o^{\text{et}}, dh_{g_o^{\text{et}}})$$

où

▷ $C_h(\Pi_{o,h}^\alpha \delta_o^{-1})$ désigne l'ensemble des γ conjugués à un élément de la forme (g_o^{et}, g_o^d) avec $g_o^{\text{et}} \in \text{GL}_{d-h}(F_o)$ et $g_o^d \in \text{GL}_h(F_o)$ semi-simple de même polynôme caractéristique que $\Pi_{o,h}^\alpha \delta_o^{-1}$;

▷ $dh_{g_o^{\text{et}}}$ et $dh_{g_o^c}$ sont respectivement les mesures de Haar sur $\text{GL}_{d-h}(F_o)_{g_o^{\text{et}}}$ et $\text{GL}_h(F_o)$ associées à la mesure de Haar $dh_{o,\gamma}$ par le procédé rappelé ci-dessus.

III.1.5. Formule des traces de Lefschetz. — On fixe une représentation irréductible

$$\rho_\infty : \bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z} \longrightarrow \text{GL}(L)$$

sur un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie L , qui est définie sur une extension finie E_λ de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et qui est continue pour la topologie pro-finie sur \bar{D}_∞^\times et la topologie ℓ -adique sur $\text{GL}(L)$. Ainsi ρ_∞ se factorise à travers un quotient fini $(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty$, pour \bar{K}_∞ un sous-groupe ouvert normal. Le revêtement $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{et},h}(s) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,m}^h(s)$ et ρ_∞ définissent un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau localement constant $\mathcal{L}_{\rho_\infty}$ sur $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{et},h}(s)$.

III.1.5.1. — Soit de même τ_o une représentation irréductible admissible de $D_{o,h}^\times$ et \mathcal{F}_{τ_o} le système local sur $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{et},h}$ associé à la restriction de τ_o à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ et au revêtement d'Igusa de seconde espèce $\mathcal{J}_{I^o,m}^{\text{et},h}(\infty) \rightarrow \mathcal{J}_{I^o,m}^h$. Soit $\mathcal{H}_{I^o,m}^{\infty,\bar{o}}$ la \mathbb{Q} -algèbre des fonctions localement constantes à support compact

$$f^\infty : (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

qui sont $K_{I^o, o}^{\infty, o} \times K_{o, m}$ -bi-invariantes par translations à droite et à gauche; le produit est donné par le produit de convolution avec la mesure de Haar $dh^{\infty, o} \times dh_o^{\text{ét}}$. Une base de $\mathcal{H}_{I^o, m}^{\infty, \tilde{\sigma}}$ est donnée par les fonctions caractéristiques

$$1_{K_{I^o, o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{I^o, o}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o, m} g_o^{\text{ét}} K_{o, m}}$$

des doubles classes $K_{I^o, o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{I^o, o}^{\infty, o} \subset (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times$ (resp. $K_{o, m} g_o^{\text{ét}} K_{o, m} \subset \text{GL}_{d-h}(F_o)$), où $g^{\infty, o}$ (resp. $g_o^{\text{ét}}$) décrit un système de représentants de ces doubles classes. Pour tout $(g^{\infty, o}, g_o^{\text{ét}})$ appartenant à $(D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$, on a une correspondance de Hecke

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\lim_{J^o, n} \mathcal{J}_{J^o, n}^{\overline{h}}} & \\ c_1(s) \swarrow & & \searrow c_2(s) \\ \widetilde{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}}(s) & \text{-----} & \widetilde{\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}}(s) \end{array}$$

Cette correspondance agit sur chaque

$$H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^i := H_c^i(\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o), \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \mathcal{F}_{\tau_o})$$

et cette action dépend seulement des doubles classes

$$K_{I^o, o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{I^o, o}^{\infty, o} \times K_{o, m} g_o^{\text{ét}} K_{o, m}.$$

III.1.5.2. — On obtient ainsi une action de $\mathcal{H}_{I^o, m}^{\infty, \tilde{\sigma}}$ sur $H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^i$. D'après la remarque III.1.3.1, $C_c(D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times)$ agit sur $H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^i$ et son action commute à celle de $\mathcal{H}_{I^o, m}^{\infty, \tilde{\sigma}}$. Dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{H}_{I^o, m}^{\infty, \tilde{\sigma}} \times C_c(D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times)$, on note

$$[H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^*] := \sum_{i=0}^{2d-2h} (-1)^{d-h-i} [H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^i].$$

Avec \bar{K}_∞ choisi comme ci-dessus, on note aussi

$$[H_{h, I^o, m, s}^*] := \sum_{i=0}^{2d-2h} (-1)^{d-h-i} [H_c^i(\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s) \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o), \bar{\mathcal{Q}}_\ell)]$$

dans le groupe de Grothendieck de $(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) \times \mathcal{H}_{I^o, m}^{\infty, \tilde{\sigma}} \times \widetilde{\mathcal{N}}_o$. On notera bien que $\widetilde{\mathcal{N}}_o / \mathcal{D}_{o, h}^\times$ est isomorphe à $\text{GL}_h(F_o) \times W_o$. Soit W (resp. V) l'espace vectoriel sous-jacent à τ_o (resp. ρ_∞) et soit $s \geq 0$ tel que τ_o est trivial sur $(1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})$, alors par définition des systèmes locaux,

$$H_c^i(\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}} \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o), \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \mathcal{F}_{\tau_o})$$

est isomorphe à

$$(H_c^i(\mathcal{J}_{I^o, m}^{\overline{h}}(s), \bar{\mathcal{Q}}_\ell) \otimes (V \otimes W))^{((\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty) \times \mathcal{D}_{o, h}^\times / (1 + \Pi_{o, h}^{s+1} \mathcal{D}_{o, h})}$$

où $\mathcal{D}_{o,h}^\times / (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})$ (resp. $(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty$) agit sur W (resp. v) via τ_o (resp. ρ_∞). En particulier, on a

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(1_n \times 1_{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o,m} g_o^{\text{ét}} K_{o,m}} , [H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^*] \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{D}_{o,h}^\times : (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})| \cdot |(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty|} \\ & \quad \times \sum_{\substack{\delta_o \in \mathcal{D}_{o,h}^\times / (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h}) \\ \bar{g}_\infty \bar{K}_\infty \in (\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty}} \text{Tr} (\rho_\infty(\bar{g}_\infty)) \text{Tr} (\tau_o(\Pi_{o,h}^n \delta_o)) \\ & \quad \times \text{Tr} (\bar{g}_\infty \times (g_o^c, \Pi_{o,h}^n \delta_o, \text{Frob}_o^r) \times 1_{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o,m} g_o^{\text{ét}} K_{o,m}} , [\widetilde{H_{h, I^o, m, s}^*}]) \end{aligned}$$

où $g_o^c \in \text{GL}_h(F_o)$ et $r \in \mathbb{Z}$ sont tels que $(g_o^c, \Pi_{o,h}^n, \text{Frob}_o^r) \in \widetilde{\mathcal{N}}_o$. En appliquant la formule des traces de Lefschetz, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION III.1.5.3. – *Avec les notations précédentes,*

$$\text{Tr} \left(1_n \times 1_{K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I^o}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o,m} g_o^{\text{ét}} K_{o,m}} , [H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^*] \right)$$

est donné par la formule

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\mathcal{D}_{o,h}^\times : (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h})| \cdot |(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty|} \\ & \quad \times \sum_{\substack{\delta_o \in \mathcal{D}_{o,h}^\times / (1 + \Pi_{o,h}^{s+1} \mathcal{D}_{o,h}) \\ \bar{g}_\infty \bar{K}_\infty \in (\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}) / \bar{K}_\infty}} \text{Lef}_r^{\text{=}h}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{o}}, s) \text{Tr} (\tau_o(\Pi_{o,h}^n \delta_o)) \text{Tr} (\rho_\infty(\bar{g}_\infty)) \end{aligned}$$

soit en remplaçant $\text{Lef}_r^{\text{=}h}(\bar{g}_\infty, \delta_o, g_o^c, g^{\infty, \bar{o}}, s)$ par sa valeur:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in D_{\mathbb{A}, h}^\times \cap C_h(\Pi_{o,h}^{\text{val}(\det g_o^c) + r} \delta_o^{-1})} \epsilon_\infty(\gamma) \text{vol} \left(D_\gamma^\times \backslash (D_{\mathbb{A}}^\times) / (\varpi_\infty^\mathbb{Z}), \frac{dh_{\mathbb{A}, \gamma}}{dh_\gamma} \right) \\ & \quad \times O_{\bar{\gamma}}(\bar{f}_\infty, d\bar{h}_{\infty, \gamma}) O_\gamma(f^{\infty, \bar{o}'}, dh_\gamma^{\infty, o}) O_{g_o^{\text{ét}}}(f_o^{\text{ét}}, dh_{g_o^{\text{ét}}}) \\ & \quad \times \text{Tr} \tau_o(\Pi_{o,h}^{-\alpha} \delta_o) / \text{vol}(\mathcal{D}_{o,h}^\times, d\bar{h}_o) \end{aligned}$$

où:

▷ les mesures de Haar dh^∞ , $dh_{\mathbb{A}, \gamma}$, dh_γ^∞ , dh_γ , et $d\bar{h}_{\infty, \gamma}$ sont choisis comme précédemment,

▷ $d\bar{h}_\infty$ est arbitraire avec $\bar{f}_\infty = \xi_{\rho_\infty} / \text{vol}(\bar{D}_\infty^\times / \varpi_\infty^\mathbb{Z}, d\bar{h}_\infty)$ où ξ_{ρ_∞} est le caractère de ρ_∞ .

Remarque : le produit $\bar{f}_\infty d\bar{h}_\infty$ est indépendant du choix de $d\bar{h}_\infty$.

III.1.6. Transfert des intégrales orbitales

DÉFINITION III.1.6.1. – Une représentation π_x de $GL_d(F_x)$ est dite de carré intégrable (resp. essentiellement de carré intégrable) si π_x (resp. s'il existe un caractère ψ_x tel que $\psi_x \otimes \pi_x$) a un coefficient matriciel de carré intégrable sur $GL_d(F_x)/F_x^\times$.

À la place ∞ : on suit de très près le paragraphe (13.8) de [24]. Il existe d'après [1] une unique représentation irréductible π_∞ de $D_\infty^\times/\varpi_\infty^\mathbb{Z}$ essentiellement de carré intégrable qui est déterminée par la relation suivante sur la restriction des caractères aux éléments elliptiques réguliers; si $\gamma \in D_\infty^\times/\varpi_\infty^\mathbb{Z}$ est elliptique régulier⁽⁶⁾ correspondant à un élément $\bar{\gamma} \in \bar{D}_\infty^\times/\omega_\infty^\mathbb{Z}$ par transfert, alors

$$\xi_{\pi_\infty}(\gamma) = (-1)^{d-1} \xi_{\rho_\infty}(\bar{\gamma})$$

D'après [28], π_∞ est de la forme $St_{2t+1}(\pi'_\infty)$, où π'_∞ est une représentation cuspidale de $GL_{d'}(F_\infty)$ avec $d = d'(2t + 1)$ et $t \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, où l'on rappelle que $St_{2t+1}(\pi'_\infty)$ est l'unique sous-représentation irréductible de la représentation induite normalisée (cf. ci-après)

$$\pi'_\infty\{t\} \times \cdots \times \pi'_\infty\{-t\}$$

En outre cette dernière induite possède un unique quotient irréductible que l'on note $Speh_{2t+1}(\pi'_\infty)$.

La proposition suivante est bien connue (cf. par exemple [16] lemme I.3.4 (3))

PROPOSITION III.1.6.2. – Il existe une fonction f_{π_∞} sur $D_\infty^\times/\varpi_\infty^\mathbb{Z}$, localement constante, à support compact, vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) Les intégrales orbitales non elliptiques de f_{π_∞} sont nulles; pour $\gamma \in D_\infty^\times$ elliptique, on a

$$O_\gamma(f_{\pi_\infty}, dh_{\infty,\gamma}) = \epsilon_\infty(\bar{\gamma}) O_{\bar{\gamma}}(\bar{f}_\infty, d\bar{h}_{\infty,\gamma})$$

où \bar{f}_∞ et les mesures de Haar sont définies comme au paragraphe précédent.

- (ii) Pour une représentation irréductible $\tilde{\pi}_\infty$ de $D_\infty^\times/\varpi_\infty^\mathbb{Z}$, on a

$$\text{Tr } \tilde{\pi}_\infty(f_{\pi_\infty}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\pi}_\infty \simeq \pi_\infty = St_{2t+1}(\pi'_\infty), \\ (-1)^{2t} & \text{si } \tilde{\pi}_\infty \simeq Speh_{2t+1}(\pi'_\infty), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

⁽⁶⁾ I.e. $F_\infty[\gamma]$ est une extension séparable de degré d de F_∞ .

À la place o : on reprend textuellement les résultats de [16, VI.5]. On rappelle que $P_{h,d} \subset \mathrm{GL}_d$ est le sous-groupe parabolique constitué des matrices triangulaires supérieures par blocs de Levi $\mathrm{GL}_h \times \mathrm{GL}_{d-h}$. Soit alors $N_{h,d}$ son radical unipotent. On note $N_{h,d}^{\mathrm{op}}$ le radical unipotent du parabolique opposé $P_{h,d}^{\mathrm{op}}$ de $P_{h,d}$. Pour π_o une représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ et P un parabolique de radical unipotent N , le module de Jacquet $J_N(\pi_o)$ est la représentation admissible $\pi_{o,N} \otimes \delta_P^{1/2}$ du groupe $(P/N)(F_o)$ dont l'espace sous-jacent est l'espace des $N(F_o)$ -coinvariants de l'espace de π_o et

$$\delta_P(h) = \left| \det(\mathrm{ad}(h)|_{\mathrm{Lie}N}) \right|_{F_o}.$$

Si π_o est une représentation admissible de $(P/N)(F_o)$, on note

$$n - \mathrm{Ind}_{P(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o) := \mathrm{Ind}_{P(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o \otimes \delta_P^{1/2}).$$

Pour π_o une représentation irréductible admissible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, de caractère central ψ_{π_o} , Deligne, Kazhdan et Vigneras (cf. [1]) montrent l'existence d'une fonction $\phi_{\pi_o} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_d(F_o), \psi_{\pi_o}^{-1})$, que l'on appelle un pseudo-coefficient de π_o , vérifiant les propriétés suivantes:

▷ $\mathrm{Tr} \pi_o(\phi_{\pi_o}) = \mathrm{vol}(D_{o,d}^\times / F_o^\times)$ ⁽⁷⁾;

▷ si P est un sous-groupe parabolique de GL_d de Levi $\mathrm{GL}_{d_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_s}$, $s > 1$. Supposons donnés des représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable $\pi_{o,i}$ de $\mathrm{GL}_{d_i}(F_o)$ telles que $\psi_{\pi_{o,1}} \cdots \psi_{\pi_{o,s}} = \psi_{\pi_o}$, alors

$$\mathrm{Tr} (n - \mathrm{Ind}_{P(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_{o,1} \times \pi_{o,s}))(\phi_{\pi_o}) = 0;$$

▷ si $\gamma \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ est un élément semi-simple non elliptique alors (cf. [16] § I.3)

$$O_\gamma^{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\phi_{\pi_o}) = 0;$$

▷ si $\gamma \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ est elliptique semi-simple et si $\delta \in D_{o,d}^\times$ a le même polynôme caractéristique que γ alors (cf. [16] lemme I.3.1)

$$O_\gamma^{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\phi_{\pi_o}) = (-1)^{d(1 - [F_o(\gamma):F_o]^{-1})} \mathrm{vol}(D_{o,d}^\times / Z_{D_{o,d}^\times}(\delta)) \mathrm{Tr} \mathrm{JL}^{-1}(\pi_o^\vee)(\delta).$$

Soient dh_o^{et} et dh_o des mesures de Haar sur respectivement $\mathrm{GL}_{d-h}(F_o)$ et $\mathrm{GL}_d(F_o)$.

PROPOSITION III.1.6.3 (cf. [16], lemmes VI.5.1 et VI.5.2). – Soient τ_o une représentation irréductible de $D_{o,h}^\times$ et $\phi_o^{\mathrm{et}} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_{d-h}(F_o))$; il existe alors une fonction

$$\mathrm{IPC}_{\tau_o}(\phi_o^{\mathrm{et}}; dh_o^{\mathrm{et}}) \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_d(F_o))$$

telle que:

⁽⁷⁾ Où l'on considère sur $D_{o,d}^\times$ le transfert de la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_d(F_o)$.

1) $O_\gamma(IPC_{\tau_o}(\phi_o^{\text{et}}; dh_o^{\text{et}}))$ est nulle si γ n'appartient pas à $C_h(\Pi_{o,h}^{-\alpha}\delta_o)$ et sinon est égal à

$$(-1)^{h-1} O_{g_o^{\text{et}}}^{\text{GL}_{d-h}(F_o)}(\phi_o^{\text{et}}, dh_{o,g_o^{\text{et}}}^{\text{et}}) \frac{\text{Tr } \tau_o(\Pi_{o,h}^{-\alpha}\delta_o)}{\text{vol}(\mathcal{D}_{o,h}^\times, d\bar{h}_o)}.$$

2) En outre si π_o est une représentation irréductible admissible de $\text{GL}_d(F_o)$ et si

$$[J_{N_{h,d}}(\pi_o) \otimes \delta_{P_{h,d}}^{1/2}] = \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha, \beta} [\alpha \otimes \beta]$$

où α (resp. β) décrit l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de $\text{GL}_h(F_o)$ (resp. $\text{GL}_{d-h}(F_o)$), alors

$$\begin{aligned} & \text{Tr } \pi_o(IPC_{\tau_o}(\phi_o^{\text{et}}, dh_o^{\text{et}})) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \psi} \text{Tr } \psi(\bar{\phi}_o) \frac{m_{\alpha, \beta}}{\text{vol}(D_{o,h}^\times / F_o^\times, d\bar{h}_o)^{-1}} \text{Tr } \alpha(\phi_{\text{JL}(\tau_o \otimes \psi^{-1})}) \text{Tr } \beta(\phi_o^{\text{et}}) \end{aligned}$$

où α (resp. β , resp. ψ) décrit les représentations irréductibles admissibles de $\text{GL}_h(F_o)$ (resp. $\text{GL}_{d-h}(F_o)$, resp. $D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times$); la somme sur ψ porte sur les ψ tels que α et $\tau_o \otimes \psi^{-1}$ ont le même caractère central.

Preuve. – Celle-ci est strictement similaire à celle de *loc. cit.* avec les modifications suivantes. En premier lieu on note que γ est associé à $\Pi_{o,h}^\alpha \delta_o^{-1}$ alors que l'on considère $\text{Tr } \tau_o(\Pi_{o,h}^{-\alpha} \delta_o)$; en outre g_o^c induit la multiplication par $-\text{val}(\det g_o^c)$ sur \mathbb{Z} , à comparer avec $\text{val}(\det g_o^c)$ dans *loc. cit.* On se retrouve alors avec $\text{JL}(\tau_o \otimes \psi^{-1})$ au lieu de $\text{JL}(\tau_o^\vee \otimes \psi)$. \square

On introduit alors

$$\text{Red}_{\tau_o}^h : \text{Groth}(\text{GL}_d(F_o)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o))$$

défini comme la composition des deux homomorphismes suivant.

▷ En premier lieu, on a un homomorphisme

$$\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o)) \longrightarrow \text{Groth}(\text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)), \quad [\pi_o] \longmapsto [J_{N_{h,d}}(\pi_o) \otimes \delta_{P_{h,d}}^{1/2}].$$

▷ Ensuite on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} & \text{Groth}(\text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o)), \\ & [\alpha \otimes \beta] \longmapsto \sum_{\psi} \text{vol}(D_{o,h}^\times / F_o^\times, d\bar{h}_o)^{-1} \text{Tr } \alpha(\phi_{\text{JL}(\tau_o \otimes \psi^{-1})}) [\psi \otimes \beta], \end{aligned}$$

où ψ décrit les caractères de $D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times$ tels que α et $\tau_o \otimes \psi^{-1}$ ont le même caractère central et où l'on considère des mesures de Haar associées sur $\text{GL}_h(F_o)$ et $D_{o,h}^\times$.

COROLLAIRE III.1.6.4. – Pour π_o une représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, on a

$$\mathrm{Tr} \pi_o(\mathrm{IPC}_{\tau_o}(\phi_o^{\mathrm{et}}, dh_o^{\mathrm{et}})) = \mathrm{Tr} \mathrm{Red}_{\tau_o}^h(\pi_o)(\phi_o^{\mathrm{et}})$$

où $\phi_o^{\mathrm{et}} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_{d-h}(F_o))$.

D'après la proposition III.1.5.3 et en remarquant que $h[F'_\infty : F_\infty] = d[F'_o : F_o]$ avec les notations précédentes, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME III.1.6.5. – Avec les notations précédentes, on pose

$$f = f_{\pi_\infty} f^{\infty, o} \mathrm{IPC}_{\tau_o}(f_o^{\mathrm{et}}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} (1_n \times 1_{K_{\mathbb{A}, I}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o, m} g_o^{\mathrm{et}} K_{o, m}}, H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^*) \\ \sum_{\gamma \in D_{\mathbb{A}}^\times} \mathrm{vol} \left(D_\gamma^\times \backslash (D_{\mathbb{A}}^\times)_\gamma / (\varpi_\infty^\mathbb{Z}), \frac{dh_{\mathbb{A}, \gamma}}{dh_\gamma} \right) \mathcal{O}_\gamma(f, dh_{\mathbb{A}, \gamma}). \end{aligned}$$

III.1.7. Formule des traces de Selberg. – Soit $\mathcal{A}(D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z}))$ l'espace des fonctions localement constantes muni de la représentation régulière à droite de $D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z})$. Comme D est une algèbre à division, $D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z})$ est compact, de sorte que

$$\mathcal{A}(D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z})) = \bigoplus_{\Pi} m(\Pi) \Pi$$

avec $m(\Pi)$ fini et où Π décrit l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de $D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z})$. Si la multiplicité $m(\Pi)$ n'est pas nulle, la représentation Π est dite automorphe. L'opérateur induit par une fonction localement constante à support compact sur $D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z})$, a une trace

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} (f; \mathcal{A}(D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times / (\varpi_\infty^\mathbb{Z}))) &= \sum_{\Pi} m(\Pi) \mathrm{Tr} \Pi(f) \\ &= \sum_{\gamma \in D_{\mathbb{A}}^\times} \mathrm{vol} \left(D_\gamma^\times \backslash (D_{\mathbb{A}}^\times)_\gamma / (\varpi_\infty^\mathbb{Z}), \frac{dh_{\mathbb{A}, \gamma}}{dh_\gamma} \right) \mathcal{O}_\gamma(f, dh_{\mathbb{A}, \gamma}). \end{aligned}$$

PROPOSITION III.1.7.1. – On a pour tout $r > 0$ l'égalité

$$\mathrm{Tr} (1_n \times 1_{K_{\mathbb{A}, I}^{\infty, o} g^{\infty, o} K_{\mathbb{A}, I}^{\infty, o}} \times 1_{K_{o, m} g_o^{\mathrm{et}} K_{o, m}}, H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^*) = \sum_{\Pi} m(\Pi) \mathrm{Tr} \Pi(f).$$

On note $[H_{h, \rho_\infty, \tau_o}^i]$ l'élément du groupe de Grothendieck

$$\mathrm{Groth} \left((D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times \right)$$

défini par la limite inductive sur I^o et m des $[H_{h, I^o, m, \rho_\infty, \tau_o}^i]$. En vertu de la proposition précédente, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.1.7.2. – Soit Π une représentation automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$, alors dans le groupe de Grothendieck $\text{Groth}(\text{GL}_{d-h}(F_o) \times (D_{o,h}^{\times}/\mathcal{D}_{o,h}^{\times}))$, on a

$$[H_{h,\rho_{\infty},\tau_o}^*(\Pi^{\infty,o})] = \begin{cases} m(\Pi) \text{Red}_{\tau_o}^h(\Pi_o) & \text{si } \Pi_{\infty} \simeq \text{St}_{2t+1}(\pi'_{\infty}) \text{ ou } \text{Speh}_{2t+1}(\pi'_{\infty}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III.2. du modèle local

III.2.1. Preuve par récurrence. – Dans [3], pour une représentation cuspidale π_o de $\text{GL}_d(F_o)$, on montre que

$$\widetilde{\mathcal{U}_{F_o,\ell,d}^i(\pi_o)} = \begin{cases} \text{JL}^{-1}(\pi_o) \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(1-d)) & \text{pour } i = d-1, \\ 0 & \text{si } i \neq d-1, \end{cases}$$

où \mathcal{L} (resp. JL) est la bijection de Langlands (resp. de Jacquet-Langlands) de l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrables de $\text{GL}_d(F_o)$ dans l'ensemble des classes d'équivalences des représentations de dimension d de W_o (resp. des représentations irréductibles admissibles de $D_{o,d}^{\times}$). Le but de ce paragraphe est d'obtenir le pendant du théorème VII.1.5 de [16], à savoir:

THÉORÈME III.2.1.1 (cf. [16], th. VII.1.5). – Soient $d = sg$ avec s, g des entiers positifs et π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$. Alors avec les notations de I.5.3.8

$$[\widetilde{\mathcal{U}_{F_o,\ell,d}^*(\pi_o[s]_D)}] = \sum_{j=1}^s (-1)^{s-j} [\overleftarrow{j-1}, \overrightarrow{s-j}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d-s+2(j-1))).$$

Preuve. – Dans le groupe de Grothendieck de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \times W_o$, on note

$$H_{\eta_o,\rho_{\infty}}^i = \sum_{\Pi^{\infty}} \Pi^{\infty} \otimes W_{\rho_{\infty},i}(\Pi^{\infty}),$$

$$[H_{\eta_o,\rho_{\infty}}^*] := \sum_{i=0}^{2d-2} (-1)^{d-1-i} \left[\varinjlim_I H^i(M_{I,\eta_o}, \mathcal{L}_{\rho_{\infty}}) \right] = \sum_{\Pi^{\infty}} [\Pi^{\infty}] \cdot [W_{\rho_{\infty}}^*(\Pi^{\infty})],$$

où la somme porte sur les représentations irréductibles automorphes de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$. On rappelle alors l'un des résultats principaux de [24].

THÉORÈME III.2.1.2. – Si Π est une représentation automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ telle que $\Pi_{\infty} \simeq \text{St}_{\infty}$ et telle qu'il existe deux places x_1, x_2 de X' distinctes de ∞ et o avec Π_{x_i} cuspidales pour $i = 1, 2$, alors

$$[W_{1_{\infty}}^*(\Pi^{\infty})|_{W_o}] \simeq [L_d(\Pi_o)](\frac{1}{2}(1-d))$$

où L_d désigne la correspondance de Langlands⁽⁸⁾.

La suite spectrale des cycles évanescents donne alors l'égalité

$$[H_{\eta_o, \rho_\infty}^*] = \sum_{0 \leq j \leq d-1} (-1)^j \left[\varinjlim_I H^*(M_{I, \bar{s}_o}, R^j \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}_{\rho_\infty})) \right].$$

Cette égalité combinée à la suite spectrale associée à la stratification donne l'égalité

$$[H_{\eta_o, \rho_\infty}^*] = \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ 1 \leq h \leq d}} (-1)^j \left[\varinjlim_I H_c^*(M_{I, \bar{s}_o}^{\equiv h}, R^j \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}_{\rho_\infty})) \right].$$

D'après [3], pour \mathcal{F} un faisceau sur $M_{I, \bar{s}_o}^{\equiv h}$, on a

$$\varinjlim_I H_c^i(M_{I, \bar{s}_o}^{\equiv h}, \mathcal{F}) = \text{Ind}_{P_{h,d}^{op}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)} \varinjlim_I H_c^i(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\equiv h}, \mathcal{F}).$$

On obtient ainsi l'égalité

$$(III.2.1.4) \quad [H_{\eta_o, \rho_\infty}^*] = \sum_{\substack{0 \leq j \leq d-1 \\ 1 \leq h \leq d}} (-1)^j \left[\text{Ind}_{P_{h,d}^{op}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)} \varinjlim_I H_c^*(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\equiv h}, R^j \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}_{\rho_\infty})) \right].$$

D'après le corollaire I.5.3.6 et le lemme I.5.2.1 du chapitre 3, on a

$$(III.2.1.5) \quad h \left[H_c^i(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\equiv h}, R^j \Psi_{\eta_o}(\mathcal{L}_{\rho_\infty})) \right] \\ = \bigoplus_{\tau_o \in \mathcal{C}_h} \frac{h}{e_{\tau_o}} \left[H_c^i(M_{I, \bar{s}_o, 1}^{\equiv h}, \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \mathcal{F}_{\tau_o}) \right] *_{d_h} \left[\widetilde{q_{F_o, l, h, n}^j(\tau_o)} \right],$$

où n est la multiplicité de o dans I , où

$$d_h : \text{GL}_h(F_o) \times W_o \longrightarrow (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times, \quad (g_o^c, \sigma_o) \longmapsto (1, 1, \delta_o),$$

où δ_o est tel que $\text{val}(\text{rn}(\delta_o)) = -\text{val}(\det(g_o^c)) - \text{deg}(\sigma_o)$ et où pour π_i une représentation de G_i pour $i = 1, 2$ et $d : G_2 \longrightarrow Z(G_1)$, on note $\pi_1 \otimes_d \pi_2$ la représentation de $G_1 \times G_2$ définie par

$$(\pi_1 \otimes_d \pi_2)(g_1, g_2) = \pi_1(g_1 d(g_2)) \otimes \pi_2(g_2);$$

dans le groupe de Grothendieck de $G_1 \times G_2$, on note $[\pi_1] *_{d} [\pi_2]$ l'image de $[\pi_1 \otimes_d \pi_2]$. Cette égalité est vue dans

$$\text{Groth} \left((D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \text{GL}_h(F_o) \times W_o \right)$$

via l'application évidente

$$\text{Groth} \left((D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times D_{o, h}^\times / \mathcal{D}_{o, h}^\times \right) \longrightarrow \text{Groth} \left((D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \right).$$

⁽⁸⁾ On a même la nullité des $W_{1_\infty, i}(\Pi^\infty)$ pour $i \neq d-1$ et alors l'égalité en tant que représentations et pas seulement des semi-simplifiées.

Soient alors g un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$. On considère Π une représentation irréductible de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ vérifiant les conditions du théorème III.2.1.2 et telle que $\Pi_o \simeq \mathrm{St}_s(\pi_o)^{(9)}$.

LEMME III.2.1.3. – *On a*

$$\mathrm{Red}_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_s(\pi_o))}^{tg}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}) = e_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_s(\pi_o))}[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}t(g-1)\}} \otimes \Xi^{\frac{1}{2}(s-t)(g-1)}$$

où Ξ est le caractère multiplicatif de \mathbb{Z} tel que $\Xi(1) = 1/p$.

Preuve. – Le résultat découle directement de [28, 2.2]. En effet on a

$$J_{N_{t,g,d}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}(s-t)\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}t\}},$$

de sorte qu'après multiplication par $\delta_{P_{t,g,d}}^{1/2}$ on obtient

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}(s-t)(g-1)\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}t(g-1)\}}$$

d'où le résultat. □

Ainsi en combinant III.2.1.4 et III.2.1.5 avec les lemmes précédents, on obtient

$$\begin{aligned} \text{(III.2.1.6)} \quad & [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes [\mathcal{L}(\pi_o) \otimes \mathrm{Sp}_s] \\ &= \sum_{t=1}^s [\widetilde{\mathcal{U}_{F_o,\ell,tg}^*(\pi_o[t]_D)}](-\tfrac{1}{2}(s-t)(g-1)) \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \end{aligned}$$

où $(-\frac{1}{2}(s-t)(g-1))$ est la torsion sur la partie galoisienne⁽¹⁰⁾ et $[\mathrm{Sp}_s] = 1(\frac{1}{2}(1-s)) + \dots + 1(\frac{1}{2}(s-1))$. On suppose alors, par récurrence sur s , que pour tout $1 \leq t < s$, on a

$$[\widetilde{\mathcal{U}_{F_o,\ell,tg}^*(\pi_o[t]_D)}] = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r [\overleftarrow{t-1-r}, \overrightarrow{r}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\tfrac{1}{2}(t(g-1) + 2(t-r-1))).$$

On réinjecte ces égalités dans III.2.1.6, ce qui donne en rassemblant selon les poids:

$$\begin{aligned} [\widetilde{\mathcal{U}_{F_o,\ell,d}^*(\pi_o[s]_D)}] &= \sum_{t=0}^{s-1} \mathcal{L}(\pi_o)(-\tfrac{1}{2}(s(g-1) + 2t)) \\ &\quad \otimes \left[[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} - \sum_{k=0}^{s-t-1} (-1)^k [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_o} \right] \end{aligned}$$

d'où le résultat en utilisant le lemme suivant. □

⁽⁹⁾ Voir [18] pour l'existence d'une telle globalisation.

⁽¹⁰⁾ Celle sur $\mathrm{GL}_{tg}(F_o)$ est contenue dans le symbole $\overrightarrow{\times}$.

LEMME III.2.1.4. – Pour tout $0 < t < s$, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $\mathrm{GL}_d(F_o)$:

$$\sum_{r=0}^{s-t-1} (-1)^r [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{r}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-r-1}]_{\pi_o} = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} + (-1)^{s-t-1} [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi_o}.$$

Preuve. – Soit $a_k = \sum_{r=0}^k (-1)^r [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{r}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-r-1}]_{\pi_o}$ et montrons par récurrence sur k variant de 0 à $s-t-1$ que l'on a

$$a_k = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} + (-1)^k [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k+1}, \overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_o}.$$

Le résultat est clairement vérifié pour $k = 0$; supposons-le vrai au rang $k-1$ et traitons le cas de k , soit

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + (-1)^k [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_o} \\ &= [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} + (-1)^{k-1} ([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k}, \overleftarrow{s-t-k}]_{\pi_o} \\ &\quad - [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k}, \overleftarrow{s-t-k}]_{\pi_o} - [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k+1}, \overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_o}) \\ &= [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} + (-1)^k [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{k+1}, \overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_o}. \quad \square \end{aligned}$$

III.2.2. Retour sur le cas Iwahori. – D'après le corollaire II.2.0.9, pour tout $0 \leq i < d$ et toute représentation irréductible admissible τ_o de $D_{o,d}^\times$, $(\Psi_{F_o,\ell,d}^i)^{\mathrm{Iw}_o}$ est pur de poids $2i$. Ainsi d'après III.2.1.1, il est égal à $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{d-i-1}]_{1_o}(-i)$, ce qui redonne bien le théorème II.2.0.7.

CHAPITRE IV

FILTRATION DE MONODROMIE DES CYCLES ÉVANESCENTS

Introduction

0.1. — Soit K un corps local complet d'égalité caractéristiques p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K . Pour un entier d strictement positif fixé, on introduit le groupe $D_{K,d}^\times$ (resp. W_K) des éléments inversibles de "l'algèbre" à division centrale sur K d'invariant $1/d$ (resp. le groupe de Weil de K). Pour un nombre premier $\ell \neq p$, Langlands (resp. Jacquet-Langlands) a (resp. ont) conjecturé l'existence d'une bijection \mathcal{L} (resp. d'une injection JL) entre les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_d(K)$ et les représentations ℓ -adiques Frobenius semi-simples de W_K (resp. entre les représentations admissibles irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et les représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_d(K)$) qui sont compatibles à la formation des fonctions L et facteurs ϵ de paires.

Deligne a construit à l'aide de la cohomologie étale une série de représentations $\mathcal{U}_{K,\ell,d}^i$ du produit de ces trois groupes. Pour $d = 2$ et ρ une représentation irréductible admissible de $D_{K,d}^\times$ telle que $\pi := \mathrm{JL}(\rho)$ est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_d(K)$, Carayol [9] montre que la composante ρ -isotypique $\mathcal{U}_{K,\ell,2}^1(\rho)$ de $\mathcal{U}_{K,\ell,2}^1$ réalise les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands, i.e.

$$\mathcal{U}_{K,\ell,2}^1(\mathrm{JL}^{-1}(\pi)^\vee) \simeq \pi \otimes \mathcal{L}(\pi)^\vee \left(-\frac{1}{2}(d-1) \right).$$

Le cas d quelconque est traité dans [3]. En outre pour $d = 2$, Carayol décrit également les $\mathcal{U}_{K,\ell,2}^1(\rho)$ pour ρ quelconque. Le but premier de ce travail est de faire de même pour d quelconque, i.e. calculer les $\mathcal{U}_{K,\ell,d}^i(\rho)$ pour ρ une représentation irréductible admissible de $D_{K,d}^\times$. Dans le cas où ρ est la représentation triviale, rappelons que d'après le théorème II.2.0.7, on a

Théorème 1. *Pour $0 \leq i \leq d-1$, on a*

$$\mathcal{U}_{K,\ell,d}^i(1_K) = \pi_i \otimes 1_K(-i)$$

où π_i est l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique

$$\text{Ind}_{P_{d-i,d}(K)}^{\text{GL}_d(K)} 1_K \otimes \text{St}_i$$

où $P_{d-i,d}$ est le parabolique standard associée aux $d-i$ premiers vecteurs et St_i est la représentation de Steinberg de $\text{GL}_i(K)$.

L'énoncé du cas général, théorème IV.4.0.17, s'énonce de manière similaire en faisant intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands. Une autre formulation du résultat revient à dire qu'il n'y a pas d'annulation dans l'expression, théorème III.2.1.1, de la représentation virtuelle $\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{K,\ell,d}^i(\rho)]$ où $\mathcal{U}_{K,\ell,d}^i(\rho)$, pour $1 \leq i \leq d$, y sera alors donné par le i -ème terme de plus haut poids.

0.2. — La preuve du théorème 1 dans le cas général procède par globalisation via l'étude des variétés de Drinfeld-Stuhler et le théorème de comparaison de Berkovich ou plus précisément sur une version raffinée fournie par Fargues dans [13], des cycles évanescents locaux et globaux. Soit donc X une courbe projective lisse, irréductible et géométriquement connexe définie sur le corps fini à $q = p^r$ éléments \mathbb{F}_q , et soit F son corps des fonctions. On fixe deux places distinctes ∞ et o de X que l'on peut supposer par simplification, rationnelles sur \mathbb{F}_q , de sorte que le complété F_o du localisé en o de F est isomorphe au corps local précédemment noté K . On note A l'anneau des fonctions sur X , régulières en dehors de ∞ . Étant donné un entier $d \geq 1$, on fixe une algèbre à division centrale D sur F de dimension d^2 , non ramifiée en ∞ et o , ainsi qu'un ordre maximal \mathcal{D} . Les auteurs construisent dans [24], pour un idéal non trivial I de A , un schéma M_I défini sur F , classifiant les \mathcal{D} -faisceaux elliptiques sur X , munis d'une structure de niveau I . Pour $o \notin V(I)$, M_I a un modèle entier $M_{I,o}$ lisse sur le complété \mathcal{O}_o de A en la place o . Un tel modèle non lisse dans le cas où $o \in V(I)$ est construit dans [3]. Les schémas $M_{I,o}$ sont naturellement munis d'une action, par correspondances, de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$.

0.3. — On s'intéresse alors à la fibre spéciale M_{I,s_o} de $M_{I,o}$. Dans [3], on stratifie M_{I,s_o} par des sous-schémas localement fermés $M_{I,s_o}^=h$ pour $1 \leq h \leq d$, de pure dimension $d-h$ tels que l'on ait un équivalent du théorème de Serre-Tate pour les \mathcal{D} -faisceaux elliptiques à savoir: le complété de l'hensélisé strict de l'anneau local de $M_{I,o}$ en un point géométrique de $M_{I,s_o}^=h$ est isomorphe à $\text{Def}_{h,n}[[x_1, \dots, x_{d-h}]]$ où n est la multiplicité de o dans I et $\text{Def}_{h,n}$ représente le foncteur des déformations de niveau n d'un \mathcal{O}_o -module formel de hauteur h sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Par ailleurs pour $1 \leq h < d$, il existe un sous-schéma fermé $M_{I,s_o,1}^=h$ de $M_{I,s_o}^=h$ stable sous les correspondances associées aux éléments du sous-groupe parabolique $P_{h,d}^{\text{op}}(F_o)$ de $\text{GL}_d(F_o)$ (cf. la définition II.1.1.1) et tel que

$$M_{I,s_o}^=h = M_{I,s_o,1}^=h \times_{P_{h,d}^{\text{op}}(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)} \text{GL}_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$$

où n est la multiplicité de o dans I : on dit que les strates non supersingulières sont géométriquement induites. Pour I décrivant les idéaux de A , les schémas $M_{I,s_o}^{\overline{h}} \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ s'organisent en des schémas de Hecke $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\overline{h}}$ au sens de la définition IV.1.2.1.

0.4 — Pour un nombre premier ℓ distinct de p , on dispose sur chacune des strates $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\overline{h}}$, de systèmes locaux de Hecke \mathcal{F}_{τ_o} associés aux représentations irréductibles τ_o de $D_{o,h}^{\times}$ tels que la restriction des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{J}} := R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})[d-1](\frac{1}{2}(d-1))$ à la strate $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\overline{h}}$ se décrit en fonction des \mathcal{F}_{τ_o} et des cycles évanescents locaux $\Psi_{F_o,\ell,h}^i$, cf. la proposition I.5.3.5. D'après le théorème de comparaison de Berkovich, le théorème local se déduit alors de la connaissance de la fibre en un point supersingulier des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{J}}$.

0.5 — Le complexe $\Psi_{\mathcal{J}}$ est vu comme un W_o -faisceau pervers de Hecke et pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$, on note $\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}$ sa composante π_o -isotypique au sens de IV.3.0.8. On note alors $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o})$ ses bigradués pour la bifiltration induite par les noyaux et les images de l'opérateur de monodromie pro-nilpotent N . Notre deuxième résultat concerne la description de ces bigradués dans la catégorie des W_o -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}$. Pour $1 \leq tg \leq d$, et pour Π_t une représentation de $\text{GL}_{tg}(F_o)$, on introduit le faisceau pervers de Hecke $HT(\pi_o, \Pi_t)$ sur la strate $\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{\overline{tg}}$, "induit" à partir du système local $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi_o)^\vee)} \otimes \Pi_t$ sur la composante $\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{\overline{tg}}$. Les bigradués précédents se décrivent alors, théorème IV.3.0.12, au moyen des faisceaux pervers $j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \text{St}_t(\pi_o))$ où $j^{\geq tg}$ désigne l'injection de la strate $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\overline{tg}}$; en ce qui concerne le cas π_o triviale, l'énoncé est le suivant:

Théorème 2. *Les W_o -faisceaux pervers de Hecke $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},1_o})$ sont non nuls si et seulement si $p, q \geq 0$ et $p + q \leq d - 1$ auquel cas il est isomorphe à $j_{1*}^{\geq p+q+1} HT(1_o, \text{St}_{p+q+1})(-\frac{1}{2}(p-q))$*

L'énoncé pour π_o quelconque est similaire et fait intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands.

0.6 — La preuve procède par récurrence en supposant connus les $\mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i$ du modèle de Deligne-Carayol de hauteur h pour tout $1 \leq h < d$. On en déduit alors le théorème 2 sauf en ce qui concerne les faisceaux pervers supportés aux points supersinguliers, i.e. on ne sait pas à quel (p, q) associer chacun des $j_{1*}^{\geq d} HT(1_o, \text{St}_d)(-\frac{1}{2}(d-1-2k))$ pour $0 \leq k < d$. On sait de même déterminer tous les faisceaux de cohomologie $h^i j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ en dehors des points supersinguliers. Après cette reconstruction hors des points supersinguliers, les ingrédients pour conclure sont, d'une part le calcul de la somme alternée de la cohomologie des systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_o} , et d'autre part l'étude de la suite spectrale des cycles évanescents. On prouve en particulier la conjecture (14.21) de [24] ainsi que l'hypothèse (14.23).

0.7 — Les résultats obtenus dans le cadre des variétés de Drinfeld s’adaptent aussi en caractéristique mixte dans le cadre des variétés de Shimura de type PEL étudiées dans [16]; c’est ce travail qui est effectué dans [5] et [4]. On a préféré utiliser dans [5] une propriété d’autodualité sur la cohomologie du modèle local qui repose en partie sur l’isomorphisme de Faltings. Nous n’avons pas suivi cette option ici et nous nous sommes plongé dans l’étude de la suite spectrale des cycles évanescents. Ce chapitre est rédigé de sorte que le lecteur ne soit pas obligé de lire les chapitres précédents excepté en ce qui concerne le §II.1 où est rappelée la combinatoire sur les représentations elliptiques de $GL_d(F_o)$ due à Zelevinsky [28].

IV.1. Rappels des données géométriques

DÉFINITIONS IV.1.0.1. – Soit $cl : W_o \rightarrow F_o^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques sur les uniformisantes, i.e. $val(cl(Fr_o)) = -1$.

▷ Pour $c_o \in W_o$, on notera $deg(c_o) := val(cl(c_o))$.

▷ Étant donné une représentation complexe σ_o (resp. π_o) de W_o (resp. de $GL_d(F_o)$) et un entier r , on notera $\sigma_o(r)$ (resp. $\pi_o(r)$) la représentation $\sigma_o \otimes |cl|^r$ (resp. $\pi_o \otimes |\det|^r$).

IV.1.1. Le modèle local de Deligne-Carayol. – Pour tout $n \geq 0$, $Def_{d,n}$ représente, cf. §I.1.1, le foncteur des déformations de niveau n à isomorphismes près, du \mathcal{O}_o -module formel de hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit alors, cf. §I.5.1, $\Psi_{F_o,\ell,d,n}^i$ le \mathbb{Q}_ℓ -espace vectoriel de dimension finie obtenu via la théorie de Berkovich comme le i -ème foncteur des cycles évanescents associé au morphisme structural

$$Spf Def_{d,n} \longrightarrow Spf \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}.$$

Cet espace vectoriel est muni d’une action de $GL_d(\mathcal{O}_o)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $GL_d(\mathcal{O}_o) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)$ et on pose

$$\Psi_{F_o,\ell,d}^i = \varinjlim_n \Psi_{F_o,\ell,d,n}^i$$

de sorte que pour $K_{o,n} := Ker(\mathcal{O}_o^\times \rightarrow (\mathcal{O}_o/\mathcal{M}_o^n)^\times)$, $\Psi_{F_o,\ell,d,n}^i = (\Psi_{F_o,\ell,d}^i)^{K_{o,n}}$. On rappelle que $GDW_o(d)^0$ (resp. $GDW_o(d)^1 = GDW_o(d)^0 \varpi_o^{\mathbb{Z}}$) désigne le noyau de

$$(g_o, \delta_o, c_o) \in GDW_o(d) := GL_d(F_o) \times D_{o,d}^\times \times W_o \mapsto val(\det(g_o^{-1}) rn(\delta_o) cl(c_o)) \in \mathbb{Z}$$

(resp. composé avec la projection canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) et que $\widetilde{GDW}_o(d)^0$ (resp. $\widetilde{GDW}_o(d)^1$) désigne le noyau de

$$(g_o, \delta_o, c_o) \in \widetilde{GDW}_o(d) := GL_d(F_o) \times D_{o,d}^\times \times W_o \mapsto val(\det(g_o) rn(\delta_o) cl(c_o)) \in \mathbb{Z}$$

(resp. composé avec $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Pour ξ_o un caractère d'ordre fini de F_o^\times , on note $\Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i$ la ξ_o' -composante isotypique où ξ_o' est la restriction de ξ_o à \mathcal{O}_o^\times . Ainsi $\Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i$ (resp. $\Psi_{F_o, \ell, d}^i$) est muni d'une action de $\text{GDW}_o(d)^1$ (resp. de $\text{GDW}_o(d)$).

Il est agréable, dans la définition de $\text{Def}_{d,n}$, de considérer plutôt les déformations par quasi-isogénies, i.e. une déformation de Σ_d sur R d'idéal maximal \mathcal{M} tel que $R/\mathcal{M} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$, est alors une paire (G, ρ) formée d'un \mathcal{O}_o -module formel G sur R et d'une quasi-isogénie $\rho : \Sigma_d \rightarrow G \otimes_R R/\mathcal{M}$. Ce foncteur $\text{Def}_{d,n}^{\mathbb{Z}}$ est alors la réunion disjointe indexée par $h \in \mathbb{Z}$ des sous-foncteurs $\text{Def}_{d,n}^{(h)}$ classifiant les couples (G, ρ) avec ρ de hauteur h . En remarquant qu'une quasi-isogénie de hauteur nulle entre deux \mathcal{O}_o -modules formels de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est un isomorphisme (cf. [11], 1.6.2 et 1.7), on voit que tous les $\text{Def}_{d,n}^{(h)}$ sont isomorphes à $\text{Def}_{d,n}$. La construction précédente fournit alors des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d, n}^i \simeq (\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i)^{K_{o,n}}$ où

$$\mathcal{U}_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i := \text{Ind}_{\text{GDW}_o(d)^1}^{\text{GDW}_o(d)} \Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i \simeq \text{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0 \varpi_o^{\mathbb{Z}}}^{D_{o,d}^\times} \Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i$$

est une représentation de $\text{GDW}_o(d)$. Pour toute représentation admissible irréductible τ_o de $D_{o,d}^\times$ de caractère central ξ_o , la réciprocity de Frobenius donne que la composante isotypique $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d, \xi_o}^i(\tau_o)$ est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{o,d}^\times}(\text{res}_{\mathcal{D}_{o,d}^\times}^{D_{o,d}^\times} \tau_o, \Psi_{F_o, \ell, d, \xi_o^{-1}}^i)$ où l'action de (g_o^c, σ_o) est donnée par celle de $(g_o, \delta_o, \sigma_o) \in \text{GDW}_o(d)^1$ pour $\delta_o \in D_{o,d}^\times$ quelconque.

DÉFINITION IV.1.1.1. – On rappelle que $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o)$ désigne l'espace $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^i(\tau_o)$ où l'action de $\text{GL}_d(F_o)$ est tordue par l'application $g_o \mapsto {}^t g_o^{-1}$.

IV.1.2. Les variétés globales et les systèmes locaux de Harris-Taylor. –

Pour ce qui concerne les schémas de Hecke et les faisceaux de Hecke, on renvoie le lecteur à l'appendice de [5]; on se contente ici de donner les définitions et les propriétés qui nous seront utiles pour formuler nos résultats.

DÉFINITION IV.1.2.1 (schémas de Hecke). – Soient $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$ et \mathcal{J} l'ensemble des idéaux de A . Un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{J})$, est un système projectif de schémas $\mathbb{X}_{\mathcal{J}} = (\mathbb{X}_I)_{I \in \mathcal{J}}$ relativement à des morphismes finis $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ de restriction du niveau, tel que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et tout $J \subset I$ tels que $g^{-1}\mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$, on dispose d'un morphisme fini de schémas $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ vérifiant les propriétés suivantes:

- ▷ pour $g \in \mathcal{K}_I$ et $J \subset I$, $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$;
- ▷ pour tout $g, g' \in \mathbb{G}$, et tout $K \subset J \subset I$ tels que $g^{-1}\mathcal{K}_J g$ soit inclus dans \mathcal{K}_I et $(g')^{-1}\mathcal{K}_K g'$ inclus dans \mathcal{K}_J , on a

$$[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \longrightarrow \mathbb{X}_J \longrightarrow \mathbb{X}_I.$$

Avec cette notion, les résultats du chapitre I, se présentent comme suit:

1) Le système projectif des $(M_{I,o})_I$ définis sur le trait $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ et indexés par les idéaux I de A , définit un schéma de Hecke $M_{\mathcal{J},o}$ pour $\mathbb{G} = (D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$.

2) Pour $1 \leq h \leq d$, les strates $M_{I,s_o}^{\overline{=}h}$ définissent un schéma de Hecke $M_{\mathcal{J},s_o}^{\overline{=}h}$ pour $\mathbb{G} = (D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$; pour $1 \leq h < d$, le sous-schéma de Hecke fermé $M_{\mathcal{J},s_o,1}^{\overline{=}h}$ de $M_{\mathcal{J},s_o}^{\overline{=}h}$, pour le groupe $\mathbb{G} = (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times} \times P_{h,d}(F_o)$ est tel que

$$M_{\mathcal{J},s_o}^{\overline{=}h} = M_{\mathcal{J},s_o,1}^{\overline{=}h} \times_{P_{h,d}^{op}(F_o)} \text{GL}_d(F_o),$$

où l'action de $(\begin{smallmatrix} g_o^c & 0 \\ * & g_o^{\text{et}} \end{smallmatrix})$ se factorise par $(\text{val}(\det(g_o^c)), g_o^{\text{et}}) \in \mathbb{Z} \times \text{GL}_{d-h}(F_o)$ et où Frob_o agit via $(1, I_{d-h})$. Le complété de l'anneau local de $M_{\mathcal{J},o}$ en tout point géométrique de $M_{\mathcal{J},s_o}^{\overline{=}h}$ est isomorphe à $\text{Def}_{h,\infty}[[x_1, \dots, x_{d-h}]]$.

3) Soit \overline{D} l'algèbre à division centrale sur F telle que $(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times} \simeq (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times}$ et \overline{D}_o (resp. \overline{D}_{∞}) est l'algèbre à division centrale sur F_o (resp. sur F_{∞}) d'invariant $1/d$ (resp. $-1/d$). L'ensemble des points supersinguliers $M_{\mathcal{J},s_o}^d(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est en bijection avec le $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \times W_o$ -ensemble

$$(IV.1.2.7) \quad \overline{D}(F)^{\times} \setminus [(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times} \times \mathbb{Z}]$$

où l'action de $c_o \in W_o$ est donnée par la translation de $\text{deg}(c_o)$ sur la composante \mathbb{Z} et où l'action de $g^{\infty} \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$ est donnée par la multiplication à droite de $(g^{\infty,o})^{-1}$ sur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^{\times}$ et la translation de $\text{val}(\det(g_o))$ sur la composante \mathbb{Z} .

NOTATION IV.1.2.2. – On notera $\overline{M}_{\mathcal{J}} := M_{\mathcal{J},\overline{s}_o} = M_{\mathcal{J},s_o} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ et on adoptera des notations similaires pour les strates.

DÉFINITION IV.1.2.3 (faisceaux de Hecke). – Soit $\mathbb{X}_{\mathcal{J}} = (X_I)_{I \in \mathcal{J}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{J})$. Pour \mathbb{K} un corps qui pour nous sera \mathbb{Q}_{ℓ} ou $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$, on définit alors la catégorie $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}}, \mathbb{K})$ (resp. $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}}, \mathbb{K})$) des \mathbb{K} -faisceaux pervers (resp. des \mathbb{K} -faisceaux) de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{J}}$ comme la catégorie dont les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}$ où \mathcal{F}_I est un \mathbb{K} -faisceau pervers (resp. \mathbb{K} -faisceau) sur \mathbb{X}_I tels que:

▷ pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1}\mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$, on dispose d'un morphisme de faisceau sur $\mathbb{X}_I, u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*} \mathcal{F}_J$ soumise à la condition de cocycle habituelle

$$u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g);$$

▷ pour tout $g \in \mathcal{K}_I, u_{J,I}(g)$ induit un isomorphisme $\mathcal{F}_I \rightarrow ([1]_{J,I,*} \mathcal{F}_J)^{\mathcal{K}_I}$.

Les flèches sont alors les systèmes $(f_I)_{I \in \mathcal{J}}$ avec $f_I : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}'_I$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : à propos de la deuxième condition, pour tout g tel que $g^{-1}\mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$, $[g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ est muni d'une action du groupe fini $\mathcal{K}_I/\mathcal{K}_J$, ce qui en fait un $\mathbb{K}[\mathcal{K}_I/\mathcal{K}_J]$ -faisceau de sorte que $([g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^{\mathcal{K}_I}$ est un facteur direct de $[g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$. Par ailleurs toute flèche $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ se factorise par $([g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^{\mathcal{K}_I}$. Dans le cas où $g \in \mathcal{K}_I$, on a $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$ et on demande que $u_{J,I}(g)$ induise un isomorphisme.

Remarque : dans le langage des catégories (co)-fibrées, la catégorie des faisceaux pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{J}}$ est, avec la deuxième condition, une sous-catégorie pleine des sections de la catégorie $\text{Perv}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{K})$ au-dessus de $\mathcal{J}(\mathbb{G})$ qui est fibrée par les ${}^p[g]_{J,I}^*$ et cofibrée par les $[g]_{J,I,*}$, cf. [10].

IV.1.2.4. — Pour tout schéma de Hecke $\mathbb{X}_{\mathcal{J}}$, la catégorie $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}})$ vérifie les propriétés suivantes:

▷ elle est abélienne;

▷ elle est munie des foncteurs usuels $j_{\mathcal{J},!}, Rj_{\mathcal{J},*}, j_{\mathcal{J},!}^*, {}^p j_{\mathcal{J}}^*$ (resp. $i_{\mathcal{J},*}, {}^p i_{\mathcal{J}}^*, {}^p Ri_{\mathcal{J}}^!$) pour toute immersion ouverte (resp. fermée) $j_{\mathcal{J}} : U_{\mathcal{J}} \hookrightarrow X_{\mathcal{J}}$ (resp. $i_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \hookrightarrow X_{\mathcal{J}}$) de schémas de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{J})$;

▷ elle est munie d'une dualité de Verdier.

Avec ces notions, on a, cf. [5]:

1) pour ρ_{∞} une représentation irréductible du groupe des inversibles $\overline{D}_{\infty}^{\times}$ de l'algèbre à division centrale sur F_{∞} d'invariant $-1/d$, $\mathcal{L}_{\rho_{\infty}}$ est un système local de Hecke sur $M_{\mathcal{J},o}$;

2) pour τ_o une représentation irréductible de $\overline{D}_{o,h}^{\times}$, $\mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}, 1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}}$) est un faisceau de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}, 1}^{=h}$ (resp. $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=h}$).

IV.2. Rappels des propriétés cohomologiques

DÉFINITION IV.2.0.5. – Deux représentations τ_o et τ'_o (resp. π_o et π'_o) de $D_{o,h}^{\times}$ (resp. de $\text{GL}_{\mathcal{J}}(F_o)$) sont dites inertiuellement équivalentes, s'il existe un caractère $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$ tel que $\tau_o \simeq \tau'_o \otimes \xi \circ \text{val} \circ \text{rn}$ (resp. $\pi_o \simeq \pi'_o \otimes \xi \circ \text{val} \circ \text{det}$); on note e_{τ_o} (resp. e_{π_o}) le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de τ_o (resp. π_o).

Remarque : par compatibilité de la correspondance de Jacquet-Langlands à la torsion par des caractères non ramifiés, pour tout entier g et pour toute représentation irréductible cuspidale π_o de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, $e_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi_o))}$ est égal à e_{π_o} .

PROPOSITION IV.2.0.6. – Soit τ_o une représentation irréductible admissible de $D_{o,h}^\times$ de caractère central χ_{τ_o} . La restriction de τ_o à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ est une somme de représentations irréductibles $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_{e_{\tau_o}}$. Inversement étant donnée une sous-représentation irréductible ρ_o de la restriction de τ_o à $\mathcal{D}_{o,h}^\times$, on a

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{D}_{o,h}^\times \times \varpi_o^{\mathbb{Z}}}^{D_{o,h}^\times} \rho_o = \bigoplus_{\tau'_o \in \diamond(\tau_o)} \tau'_o$$

où ϖ_o agit sur l'espace de ρ_o par le scalaire $\chi_{\tau_o}(\varpi_o)$ et où $\diamond(\tau_o)$ désigne l'ensemble des représentation irréductibles de $D_{o,h}^\times$ inertiuellement équivalentes à τ_o et de caractère central χ_{τ_o} .

Preuve. – Le résultat découle classiquement de la réciprocité de Frobenius. En particulier on notera que $\diamond(\tau_o)$ est de cardinal h/e_{τ_o} . □

IV.2.1. Sur le modèle local. – Soit τ_o une représentation admissible irréductible de $D_{o,h}^\times$. L'espace que l'on souhaite étudier est le $(\mathrm{GL}_h(F_o) \times W_o)$ -module

$$\mathrm{Hom}_{D_{o,h}^\times}(\tau_o, \mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i) = \mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) \simeq \Psi_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{o,h}^\times}(\tau_o, \Psi_{F_o,\ell,h}^i).$$

Pour tout τ_o , on a un morphisme naturel de $\mathrm{GDW}_o(h)^0$ -modules

$$\mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) \otimes \tau_o \longrightarrow \Psi_{F_o,\ell,h}^i$$

qui envoie $f \otimes v$ sur $f(v)$. On note $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ l'image de ce morphisme et soit $\Psi_{F_o,\ell,h,m}^i[\tau_o]$ la préimage de $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ dans $\Psi_{F_o,\ell,h,m}^i$. Le sous-module $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de τ_o . Le groupe $\mathcal{D}_{o,h}^\times$ étant compact, on a

$$\Psi_{F_o,\ell,h}^i = \bigoplus_{\tau_o \in \mathcal{C}_h} \Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o].$$

Soit Δ_{τ_o} un ensemble d'éléments de $D_{o,h}^\times$ tel que les congruences des $\mathrm{val}(\det \delta)$ pour $\delta \in \Delta_{\tau_o}$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e_{\tau_o}\mathbb{Z}$. L'application

$$\mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i(\tau_o) \otimes \tau_o \longrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta_{\tau_o}} \Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]^\delta, \quad f \otimes v \longmapsto (f(\delta^{-1}v))_\delta$$

où $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]^\delta$ est l'espace $\Psi_{F_o,\ell,h}^i[\tau_o]$ muni de la structure de $\mathrm{GDW}_o(h)^0$ -module où (g_o, δ_o, c_o) agit via $(g_o, \delta^{-1}\delta_o\delta, c_o)$, est un isomorphisme de $\mathrm{GDW}_o(h)^0$ -modules.

THÉORÈME IV.2.1.1 (cf. [3], th. 3.2.4). – Pour toute représentation irréductible cuspidale π_o de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^i(\mathrm{JL}^{-1}(\pi_o))$ est nul pour $i \neq d-1$ et

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-1}(\mathrm{JL}^{-1}(\pi_o)) \simeq \pi_o \otimes \mathcal{L}(\pi_o)\left(-\frac{1}{2}(d-1)\right).$$

THÉORÈME IV.2.1.2 (cf. th. III.2.1.1). – Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π_o de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, avec les notations de I.5.3.8, on a

$$(IV.2.1.8) \quad \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-1-i}(\pi_o[s]_D)] \\ = \sum_{i=1}^s (-1)^i [\overleftarrow{s-1-i, i}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)\left(-\frac{1}{2}(d+s-2-2i)\right)$$

ou de manière équivalente

$$(IV.2.1.9) \quad \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^{d-1-i}(\pi_o[s]_D)] \\ = \sum_{i=1}^s (-1)^i [\overrightarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_{\pi_o^\vee} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)\left(-\frac{1}{2}(d+s-2-2i)\right).$$

IV.2.2. Sur les systèmes locaux de Harris-Taylor. – Les systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_o} de Harris-Taylor définis en I.5.3.4, sont tels que la restriction à $M_{\mathcal{J}, 1}^{\overline{h}}$ du i -ème faisceau des cycles évanescents $R^i \Psi_{\eta_o, \mathcal{J}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ vérifie

$$(IV.2.2.10) \quad (R^i \Psi_{\eta_o, \mathcal{J}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))_{M_{\mathcal{J}, \overline{s}_o, 1}^{\overline{h}}}^h \simeq \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (\mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}, 1} \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o))^{h/e_{\tau_o}},$$

où l'action l'action d'un élément $(g^{\infty, o}, g_o^c, g_o^{\mathrm{et}}, r, c_o) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathrm{GL}_h(F_o) \times \mathbb{Z} \times W_o$ est donnée par l'action naturelle de

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, r + \mathrm{val}(\det g_o^c) + \deg(c_o)) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$$

sur $\mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}, 1}$ au-dessus de $\overline{M}_{\mathcal{J}, 1}^{\overline{h}}$, et par celle de (g_o^c, c_o) sur $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o)$. L'isomorphisme IV.2.2.10 implique alors la proposition suivante.

PROPOSITION IV.2.2.1. – Pour tout i, j , on a un isomorphisme canonique

$$H_c^j(M_{\mathcal{J}, \overline{s}_o, 1}^{\overline{h}}, R^i \Psi_{\eta_o, \mathcal{J}}(\mathcal{L}_{\rho_\infty}))^h \simeq \bigoplus_{\tau_o \in \mathfrak{C}_h} (H_c^j(M_{\mathcal{J}, \overline{s}_o, 1}^{\overline{h}}, \mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}, 1} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty}) \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, h}^i(\tau_o))^{h/e_{\tau_o}}$$

tel que l'action de $(g^{\infty, o}, g_o^c, g_o^{\mathrm{et}}, \sigma_o) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times \mathrm{GL}_h(F_o) \times \mathrm{GL}_{d-h}(F_o) \times W_o$ sur le membre de gauche, induit sur le membre de droite, l'action de

$$(g^{\infty, o}, g_o^{\mathrm{et}}, \mathrm{val}(\det g_o^c) + \deg(\sigma_o)) \otimes (g_o^c, \sigma_o).$$

DÉFINITION IV.2.2.2. – Dans la suite, pour ρ_∞ une représentation irréductible de \bar{D}_∞^\times , qui est “l’algèbre” à division centrale sur F_∞ d’invariant $-1/d$, on considère pour une représentation automorphe Π de $D_\mathbb{A}^\times$, l’hypothèse $\text{Hyp}(\rho_\infty)$ suivante: si $\rho_\infty = \text{JL}^{-1}(\text{St}_s(\pi_\infty))$ pour π_∞ une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_\infty)$ pour $d = sg$, alors Π_∞ est soit isomorphe à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_\infty}$ soit à $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_\infty}$. Plus généralement on notera $\text{Hyp}(\infty)$ l’hypothèse sur Π qu’il existe ρ_∞ tel que Π vérifie $\text{Hyp}(\rho_\infty)$.

On note

$$[H_{h,\rho_\infty,\tau_o}^*] := \sum_i (-1)^i \lim_I [H_c^i(M_{I,\bar{s}_o,1}^{\bar{h}}, \mathcal{F}_{\tau_o,I} \otimes \mathcal{L}_{\rho_\infty})]$$

dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $(D_\mathbb{A}^{\infty,o})^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$.

PROPOSITION IV.2.2.3 (cf. III.1.7.2). – Pour Π une représentation de $D_\mathbb{A}^\times$, on a

$$(IV.2.2.11) \quad [H_{h,\rho_\infty,\tau_o}^*(\Pi^{\infty,o})] = \begin{cases} m(\Pi) \text{Red}_{\tau_o}^h(\Pi_o) & \text{si } \Pi_\infty \text{ vérifie } \text{Hyp}(\infty), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l’espace des formes automorphes et

$$\text{Red}_{\tau_o}^h : \text{Groth}(\text{GL}_d(F_o)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o))$$

est défini comme la composition des deux homomorphismes suivants:

▷ en premier lieu, on a un homomorphisme

$$\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o)) \longrightarrow \text{Groth}(\text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)), \quad [\pi_o] \longmapsto [J_{P_{h,d}}(\pi_o) \otimes \delta_{P_{h,d}}^{1/2}];$$

▷ ensuite on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Groth}(\text{GL}_h(F_o) \times \text{GL}_{d-h}(F_o)) &\longrightarrow \text{Groth}(D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times \times \text{GL}_{d-h}(F_o)) \\ [\alpha \otimes \beta] &\longmapsto \sum_\psi \text{vol}(D_{o,h}^\times / F_o^\times, d\bar{h}_o)^{-1} \text{Tr } \alpha(\phi_{\text{JL}(\tau_o \otimes \psi^{-1})})[\psi \otimes \beta], \end{aligned}$$

où ψ décrit les caractères de $\mathbb{Z} \simeq D_{o,h}^\times / \mathcal{D}_{o,h}^\times$ tels que α et $\tau_o \otimes \psi^{-1}$ ont le même caractère central et où l’on considère des mesures de Haar associées sur $\text{GL}_h(F_o)$ et $D_{o,h}^\times$.

Remarque : le signe du membre de droite de IV.2.2.11 est positif (resp. $(-1)^{s-1}$) si $\Pi_o \simeq \text{St}_s(\pi_o)$ (resp. $\Pi_o \simeq \text{Speh}_s(\pi_o)$) pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_\infty)$ avec $d = sg$.

IV.3. Énoncés des théorèmes globaux

DÉFINITION IV.3.0.4. – Nous considérerons deux types de torsion relativement à W_o ou à $\mathrm{GL}_d(F_o)$ que nous noterons respectivement (\cdot) et $\{\cdot\}$. Ainsi pour σ_o (resp. π_o) une représentation de W_o (resp. de $\mathrm{GL}_d(F_o)$), l'action d'un élément g sur $\sigma_o(n)$ (resp. $\pi_o\{n\}$) est donnée par $\sigma_o(g)|\mathrm{Art}_{F_o}^{-1}(g)|^n$ (resp. $\pi_o(g)|\det g|^n$) où $|\cdot|$ est la valeur absolue sur F_o et $\mathrm{Art}_{F_o}^{-1} : W_o \rightarrow F_o^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques Fr de W_o de F_o sur les uniformisantes, i.e. $v(\mathrm{Art}_{F_o}^{-1}(\mathrm{Fr})) = -1$; on notera $\deg(w_o) = v(\mathrm{Art}_{F_o}^{-1}(w_o))$.

DÉFINITION IV.3.0.5. – Pour tout entier h , on considère l'identification définie par la valuation de la norme réduite: $D_{o,h}^\times/\mathcal{D}_{o,h}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$. On notera $\Xi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère défini par $\Xi(1) = 1/q$.

DÉFINITION IV.3.0.6. – Un W_o -faisceau pervers de Hecke est un objet $P = (P_I)_{I \in \mathcal{J}}$ de $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}})$ muni d'une action compatible du groupe de Weil local W_o de F_o , telle que l'action de l'inertie est potentiellement unipotente sur P_I pour tout $I \in \mathcal{J}$ ⁽¹⁾; on note $\gamma : I_o \rightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}})}(P)$. De même un \mathbb{Z} -faisceau pervers de Hecke est un faisceau pervers de Hecke muni d'une action compatible de \mathbb{Z} .

On considère les flèches suivantes de schémas de Hecke

$$i_{\mathcal{J}}^h : \overline{M}_{\mathcal{J}}^{\geq h} \hookrightarrow \overline{M}_{\mathcal{J}}, \quad j_{\mathcal{J}}^{\geq h} : \overline{M}_{\mathcal{J}}^{\leq h} \hookrightarrow \overline{M}_{\mathcal{J}}^{\geq h}$$

où on rappelle que $j_{\mathcal{J}}^{\geq h}$ est affine. Dans la suite pour $1 \leq g \leq d$, s désignera la partie entière de d/g et t un entier strictement positif inférieur ou égal à s : on considèrera une représentation irréductible cuspidale π_o de $\mathrm{GL}_g(F_o)$.

▷ On rappelle, cf. I.5.3.8, que $\pi_o[t]_D$ désigne la représentation $\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi_o))$ de $D_{o,tg}^\times$ où JL est la bijection de Jacquet-Langlands entre les représentations irréductibles admissibles de $D_{o,tg}^\times$ et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{tg}(F_o)$.

▷ Soit $\mathcal{F}(t, \pi_o)_1$ (resp. $\mathcal{F}(t, \pi_o)$) le faisceau de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{-tg}$ (resp. $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{-tg}$) précédemment noté $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, \mathcal{J}, 1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, \mathcal{J}}$).

▷ Pour une représentation Π_t de $\mathrm{GL}_{tg}(F_o)$, on note

$$HT(\pi_o, \Pi_t) = \widetilde{HT}(\pi_o, \Pi_t)[d - tg]$$

le W_o -faisceau pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{J}}^{-tg}$ défini par le \mathbb{Z} -faisceau de Hecke

$$\widetilde{HT}(\pi_o, \Pi_t) := \mathcal{L}_{\rho_\infty} \otimes \mathcal{F}(t, \pi_o) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}(tg-d)} \otimes \Pi_t,$$

où:

⁽¹⁾ Ce qui est automatique si $\mathbb{X}_{\mathcal{J}}$ est défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

- ▷ l'action de W_o se fait par son quotient $W_o \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie w_o sur $\deg(w_o)$;
- ▷ le radical unipotent de $P_{tg,d}^{op}(F_o)$ agit trivialement alors que l'action du Levi $\mathrm{GL}_{tg}(F_o) \times \mathrm{GL}_{d-tg}(F_o)$ est donnée par l'action diagonale de $\mathrm{GL}_{tg}(F_o)$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_o)$ et Π_t , et l'action naturelle de $\mathrm{GL}_{d-tg}(F_o)$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_o)$.

On notera selon l'usage (n) pour Ξ^{-n} quand il s'agira de l'action de W_o .

- ▷ On note $\mathcal{P}(t, \pi_o)$ le W_o -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\geq tg}$ de poids zéro défini par

$$j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \mathrm{St}_t(\pi_o)) \otimes \mathcal{L}(\pi_o).$$

REMARQUE IV.3.0.7. – Comme on l'a noté $\mathcal{F}(t, \pi_o)$ en tant que W_o -faisceau de Hecke, dépend de π_o alors qu'en tant que faisceau $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, I}$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_o . Cette remarque s'applique à nouveau au W_o -faisceau pervers de Hecke $HT(\pi_o, \Pi_t)$ alors que pour $\mathcal{P}(t, \pi_o)$, l'ajout de $\mathcal{L}(\pi_o)$ fait qu'il ne dépend, en tant que W_o -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de π_o .

DÉFINITION IV.3.0.8. – Soit $P \in \mathrm{FPH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}})$ un W_o -faisceau pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$. Par définition de N , l'application $\tilde{\gamma} : i \in I_o \mapsto \gamma(i) \exp(-t_{\ell}(i)N)$, définit une action localement constante de I_o sur P_I qui définit alors un morphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -algèbres $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(I_o) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{FPH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{X}_{\mathcal{J}})}(P)$ où $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(I_o)$ désigne l'algèbre des distributions localement constantes sur I_o . Pour σ'_o une $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -représentation irréductible lisse de I_o , on notera $P_{\sigma'_o}$, le facteur découpé via $\tilde{\gamma}$ par l'idempotent de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(I_o)$ associé à σ'_o .

Remarque : on déduit de la compacité de I_o que tout W_o -faisceau pervers P est à la fois le produit et le coproduit des $P_{\sigma'_o}$.

Une représentation σ'_o de I_o sera dite σ_o -isotypique, pour σ_o une représentation irréductible de W_o , si $(\sigma_o)|_{I_o}$ contient σ'_o . Par réciprocité de Frobenius, deux représentations irréductibles $\sigma_{o,1}$ et $\sigma_{o,2}$ de W_o sont inertiuellement équivalentes si et seulement s'il existe une représentation irréductible σ'_o de I_o qui soit $\sigma_{o,i}$ -isotypique pour $i = 1, 2$.

DÉFINITION IV.3.0.9. – Pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, on notera P_{π_o} et on l'appellera la composante π_o -isotypique de P , la somme des P_{σ} où σ parcourt les sous-représentations irréductibles de la restriction à I_o de la représentation $\mathcal{L}(\pi_o)$ de W_o associée à π_o par la correspondance de Langlands locale.

DÉFINITION IV.3.0.10. – On note \mathfrak{G} le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des W_o -faisceaux pervers de Hecke.

Pour $P_{\mathcal{J}}$ un W_o -faisceau pervers de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}$; pour tout $J \in \mathcal{J}$, N_J est nilpotent et définit deux filtrations finies de P_J : la filtration par les noyaux $K_{J,\bullet}$ qui est croissante, et celle par les images I_J^\bullet qui est décroissante. Leur convolution donne la filtration $M_{J,\bullet}$ dite de monodromie. Ces familles de filtration induisent alors des filtrations $K_\bullet P_{\mathcal{J}}$, $I^\bullet P_{\mathcal{J}}$ et $M_\bullet P_{\mathcal{J}}$ dans la catégorie des W_o -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}$, et on note gr_I^p (resp. gr_q^K) le gradué $I^p/I^{p+1}(P_{\mathcal{J}})$ (resp. $K_{q+1}/K_q(P_{\mathcal{J}})$).

IV.3.0.11. — Pour tout $J \in \mathcal{J}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents

$$R\Psi_{\eta_o, J}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d-1](\frac{1}{2}(d-1))$$

sur M_{J, \overline{s}_o} définissent un W_o -faisceau pervers de Hecke que l'on note $\Psi_{\mathcal{J}}$ sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}$.

THÉORÈME IV.3.0.12. — Pour tout $\pi_o \in \text{Cusp}_g$, la composante π_o -isotypique $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$ de $\Psi_{\mathcal{J}}$ est nulle si $g > d$ et pour $1 \leq g \leq d$, on a un isomorphisme dans $\text{FPH}(\overline{M}_{\mathcal{J}})$

$$\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) = \begin{cases} \mathcal{D}(p+q+1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q)) & \text{si } p, q \geq 0 \text{ et } p+q+1 \leq \lfloor d/g \rfloor, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}$ est simplement la somme directe de e_{π_o} copies de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$.

THÉORÈME IV.3.0.13. — La restriction de $h^i j_{\mathcal{J}, 1*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ à $\overline{M}_{\mathcal{J}}^h$ vérifie les points suivants:

- ▷ elle est nulle pour h ne s'écrivant pas sous la forme $(t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s-t$;
- ▷ pour $h = (t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s-t$, elle est nulle pour $i \neq tg - d + a(g-1)$ et sinon elle est isomorphe dans $\text{FH}(\overline{M}^h)$ à $\widetilde{HT}(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_o))(\frac{1}{2}a)$.

Remarque : pour $g > 1$, $h^i j_{\mathcal{J}, 1*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ est nul pour i n'étant pas de la forme $tg - d + a(g-1)$ avec $0 \leq a \leq s-t$ et pour $i = tg - d + a(g-1)$, il est isomorphe dans $\text{FH}(\overline{M}_{\mathcal{J}})$ à $j_{\mathcal{J}, 1}^{\geq (t+a)g} \widetilde{HT}(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_o))(\frac{1}{2}a)$.

REMARQUE IV.3.0.14. — Le lecteur attentif aura noté que dans IV.3.0.12,

$$\mathcal{D}(t, \pi_o) = e_{\pi_o} j_{1*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\rho_o, \mathcal{J}}[d-tg] \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(tg-1))$$

où ρ_o est une représentation irréductible de $\mathcal{D}_{o, tg}^\times$ qui est contenue dans $(\pi_o[t]_D)_{|\mathcal{D}_{o, tg}^\times}$ de sorte que l'on pourrait simplifier le facteur e_{π_o} . Plus généralement le but de cette remarque est d'expliquer la provenance de ce facteur dans nos énoncés et les modifications à faire pour le simplifier.

Pour tout point géométrique z de $\overline{M}_{\mathcal{J}}^h$, d'après le théorème de comparaison de Berkovich, la fibre $z^* \Psi_{\mathcal{J}}$ est munie d'une action de $(D_{o, h}^\times)^0$ ainsi que de $\varpi_o^{\mathbb{Z}}$ vu comme sous-groupe soit de $D_{o, h}^\times$ soit de $\text{GL}_h(F_o)$ telle que $(\varpi_o, \varpi_o) \in \text{GL}_h(F_o) \times D_{o, h}^\times$ agisse

trivialement. On rappelle l'isomorphisme $D(\mathbb{A}^\infty)^\times \times D_{o,tg}^\times / \mathcal{D}_{o,tg}^\times$ -équivariant de la proposition I.5.3.5

$$(IV.3.0.12) \quad \text{Ind}_{(D_{o,h}^\times)^0 \varpi_o^{\mathbb{Z}}}^{D_{o,h}^\times} (\Psi_{\mathcal{J}}) |_{\overline{M}_{\mathcal{J}}=tg} \simeq \bigoplus_{\tau_o} \mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}} \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, tg}^{d-1+\bullet}(\tau_o)$$

où τ_o décrit l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de $D_{o,tg}^\times$.

Nous verrons au théorème IV.4.0.17 que si la composante π_o -isotypique de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, tg}^i(\tau_o)$ est non nulle alors τ_o est inertiuellement équivalente à $\pi_o[t]_D$ de sorte que l'isomorphisme IV.2.2.10 donne

$$(IV.3.0.13) \quad \text{Ind}_{(D_{o,tg}^\times)^0 \varpi_o^{\mathbb{Z}}}^{D_{o,tg}^\times} z^* \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o} \simeq \bigoplus_{\pi'_o \in \diamond(\pi_o)} z^* \mathcal{F}(t, \pi'_o) \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, tg}^{d-1+\bullet}(\pi'_o[t]_D)$$

où z est un point géométrique de $\overline{M}_{\mathcal{J}}=tg$. Soit alors $\Delta(\pi_o[t]_D)$ un ensemble de e_{π_o} d'éléments $\delta \in D_{o,tg}^\times$ tel que les $o(\text{rnd})$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e_{\pi_o}\mathbb{Z}$; pour V un $\mathcal{D}_{o,tg}^\times$ -module, on notera

$$\text{Ind}_1^{\mathbb{Z}/e_{\pi_o}\mathbb{Z}} V = \bigoplus_{\delta \in \Delta(\pi_o[t]_D)} V^\delta$$

où l'action de $\delta_0 \in \mathcal{D}_{o,tg}^\times$ sur $V^\delta := V$ est donnée par celle de $\delta \circ \delta_0 \circ \delta^{-1}$ sur V . Avec ces notations, l'isomorphisme IV.3.0.13 se "factorise" en un isomorphisme $D_{o,tg}^\times$ -équivariant

$$(IV.3.0.14) \quad \text{Ind}_1^{\mathbb{Z}/e_{\pi_o}\mathbb{Z}} z^* \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o} \simeq z^* \mathcal{F}(t, \pi_o) \otimes \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, tg}^{d-1+\bullet}(\pi_o[t]_D).$$

THÉORÈME IV.3.0.15. – Pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p + q + 1 < [d/g]$, la flèche

$$\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}) \longrightarrow \text{gr}_I^{q+1} \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})[1]$$

déduite par décalage et rotation du triangle distingué $\text{gr}_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow \text{gr}_I^q$ est donnée en cohomologie par l'unique morphisme $\text{GL}_{(p+q+a+1)g}(F_o)$ -équivariant non nul

$$\text{St}_{p+q+1}(\pi_o) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_o) \longrightarrow \text{St}_{p+q+2}(\pi_o) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{a-1}(\pi_o)$$

pour tout $0 \leq a \leq s_g - p - q - 1$.

IV.3.0.16. — La formulation de IV.3.0.12 nous a été suggérée par J.-F. Dat. L'énoncé portait originellement sur les gradués de la filtration de monodromie; rappelons brièvement comment on passe de l'une à l'autre des descriptions, cf. [10, 5.1.6]. On a par définition $\text{gr}_k^M = \bigoplus_{p-q=k} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K$. Inversement N induit un isomorphisme $\text{gr}_I^p \text{gr}_p^K \simeq \text{gr}_I^{q+1} \text{gr}_{p-1}^K$, de sorte que

$$\text{gr}_I^q \text{gr}_0^K = \text{Ker}(\text{gr}_{-q}^M \xrightarrow{N} \text{gr}_{-q-2}^M), \quad N^p : \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K \xrightarrow{\sim} \text{gr}_I^{q+p} \text{gr}_0^K.$$

Ainsi IV.3.0.12 est équivalent à la formulation $\text{gr}_k^M(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})(\frac{1}{2}k) = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod 2}} \mathcal{P}(t, \pi_o)$.

La suite spectrale à chaque niveau fini $J \in \mathcal{J}$

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} \operatorname{gr}_{-i}^M (R\Psi_{\eta_o, J}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d-1]) \implies R^{i+j+d-1}\Psi_{\eta_o, J}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

induit une suite spectrale dans les W_o -faisceaux de Hecke sur \overline{M}_J :

$$E_{1, \pi_o}^{i,j} = h^{i+j} \operatorname{gr}_{-i}^M (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}) \implies h^{i+j}\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}.$$

Le lecteur vérifiera alors sans difficultés, ou avec l'aide du §IV.9.2, que IV.3.0.15 est équivalent au fait que la suite spectrale ci-dessus dégénère en E_2 , et pour tout $1 \leq t \leq s_g$, pour $0 \leq \alpha \leq t-1$ et $0 \leq \beta < t-1-\alpha$, la flèche $d_{1, \pi_o}^{-\alpha+\beta, -d+tg-t+1+2\alpha}$ est donnée par l'unique application non nulle

$$\operatorname{St}_{\alpha+\beta+1}(\pi_o) \overrightarrow{\times} \operatorname{Speh}_{t-1-\alpha-\beta}(\pi_o) \longrightarrow \operatorname{St}_{\alpha+\beta+2}(\pi_o) \overrightarrow{\times} \operatorname{Speh}_{t-2-\alpha-\beta}(\pi_o)$$

en convenant que l'induite de Π avec "une représentation" de $\operatorname{GL}_0(F_o)$ est égale à Π .

Concrètement, la fibre en un point supersingulier z de $E_{2, \pi_o}^{i,j}$ est nulle si (i, j) n'est pas de la forme $(-k, 1-s+2k)$ avec $0 \leq k \leq s-1$ et sinon en tant que $\operatorname{GDW}_o(d)$ -module

$$\operatorname{Ind}_{(D_o^\times)_0}^{D_o^\times} z^* E_{2, \pi_o}^{k, 1-s+2k} \simeq [\overleftarrow{k}, \overrightarrow{s-1-k}]_{\pi_o} \otimes V(\pi_o) \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d-s+2k))$$

où $V(\pi_o) = z^* \mathcal{F}(s, \pi_o)$ est une représentation de D_o^\times qui reste encore à préciser; le lecteur pourra se référer à la figure 1.

IV.4. Corollaires locaux

Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p .

THÉORÈME IV.4.0.17. – *Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $\operatorname{GL}_g(K)$, on a*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{K, \ell, d}^{d-s+i}(\pi[s]_D) \simeq \begin{cases} \mathcal{L}(\pi)(-\frac{1}{2}(d-s+2i)) \otimes [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-1-i}]_\pi & \text{if } 0 \leq i < s, \\ 0 & \text{if } i < 0, \end{cases}$$

où $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-1-i}]_\pi$ est l'unique quotient irréductible de l'induite $\operatorname{St}_i(\pi) \overrightarrow{\times} \operatorname{Speh}_{s-i}(\pi)$.

Preuve. – La stratégie est classique et passe par voie globale. Soient F un corps global et o une place de F vérifiant les hypothèses de §IV.1.2 avec $F_o = K$. D'après le théorème de Serre-Tate, le complété de l'anneau local de M_{I, s_o} en un point géométrique de $M_{I, s_o}^=h$ est isomorphe à $R_{K, h, n}[[X_1, \dots, X_{d-h}]]$. Le théorème principal de la théorie des cycles évanescents de Berkovich donne alors que la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o, I}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ en un point géométrique de $M_{I, s_o}^=h$ est isomorphe à $\widetilde{\Psi}_{K, n}^{h, i}$. On considère alors le sous-ensemble $\mathcal{J}^o \subset \mathcal{J}$ des éléments de \mathcal{J} tels que la composante hors o soit fixée et assez petite et on notera I_o^o l'élément maximal de \mathcal{J}^o . Soit z un point supersingulier de $\overline{M}_{I_o^o}^{(0)} \times \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$, les morphismes $[1]_{I, I_o^o}$ sont alors totalement ramifiés

au-dessus de z . Pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, d'après les théorèmes globaux, dans le groupe de Grothendieck de $\mathrm{GDW}_o(d)$, on a l'égalité

$$\left[\mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathrm{GDW}_o(d)}}^{\mathrm{GDW}_o(d)} z^* \Psi_j^* \right] = \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_o \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [V_{\pi_o} \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(s(g+1) - 2(i+1)) \right)]$$

où $\mathcal{U}(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_g(F_o)$ et où $V_{\pi_o} := z^* \mathcal{F}(s, \pi_o)$ est d'après le théorème de Berkovich muni d'une action de $D_{o,d}^\times$ qu'il s'agit maintenant d'identifier. Par ailleurs d'après III.2.1.1, dans le groupe de Grothendieck de $\mathrm{GDW}_o(d)$ on a l'égalité

$$\left[\mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathrm{GDW}_o(d)}}^{\mathrm{GDW}_o(d)} z^* \Psi_j^* \right] = \sum_{\substack{g|d=sg \\ \pi_o \in \mathcal{U}(g)}} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\pi_o[s]_D \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(s(g+1) - 2(i+1)) \right)].$$

Ainsi on déduit de l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_o \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [V_{\pi_o} \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(s(g+1) - 2(i+1)) \right)] \\ &= \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_o \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\pi_o[s]_D \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(s(g+1) - 2(i+1)) \right)] \end{aligned}$$

que l'on a $[V_{\pi_o}] = [\pi_o[s]_D]$ dans le groupe de Grothendieck de $D_{o,d}^\times$, ce qui fournit le résultat local pour π_o unitaire. Le cas général découle alors de l'isomorphisme II.2.0.4

$$\widetilde{\Psi}_{K,\ell,d}^i(\tau \otimes (\psi \circ v_K \circ \mathrm{rn})) \simeq \widetilde{\Psi}_{K,\ell,d}^i(\tau) \otimes (\psi^{-1} \circ \delta_d)$$

où $\delta_d : (g, c) \in \mathrm{GL}_d(K) \times W_K \mapsto v_K(\det g) + \deg c \in \mathbb{Z}$ et $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. □

COROLLAIRE IV.4.0.18. – Soit π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$. Le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace gradué $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o,\ell,d}(\pi_o[s]_D)[d-1] \left(\frac{1}{2}(d-1) \right)$ est non nul si et seulement si $p, q \geq 0$ et $p+q < s$, auquel cas il est concentré en degré $p+q-s+1$ donné par

$$[\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-2-p-q}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(q-p).$$

Par ailleurs pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p+q < s-1$, le morphisme $\mathrm{GDW}_K(d)$ -équivariant

$$\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o,\ell,d}^{1-s+p+q}[d-1] \longrightarrow \mathrm{gr}_I^{q+1} \mathrm{gr}_p^K \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o,\ell,d}^{2-s+p+q}[d-1]$$

déduit par décalage et rotation du triangle distingué $\mathrm{gr}_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow \mathrm{gr}_I^q$ est donné par l'unique morphisme $\mathrm{GL}_d(F_o)$ -équivariant non nul

$$[\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-2-p-q}]_{\pi_o} \longrightarrow [\overleftarrow{p+q+1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-3-p-q}]_{\pi_o}.$$

Preuve. – D'après [13], la bifiltration de $z^*\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}$ induite par celle de $\Psi_{\mathcal{J}^v,\pi_o}$, est $\widetilde{\mathrm{GDW}}_o(d)^0$ équivariante: la seule difficulté sérieuse est de montrer l'équivariance sous $\mathcal{D}_{o,d}^\times$. Le résultat découle alors directement de IV.3.0.15 \square

COROLLAIRE IV.4.0.19. – Soit π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$. Pour tout point supersingulier z de $M_{\mathcal{J}}$, $z^*\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^i$ est nul pour tout i (resp. si $i < d-s$ ou $i \geq d$) si g ne divise pas d (resp. $d = sg$). Pour $d = sg$ et $0 \leq i \leq s-1$, $\mathrm{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^*\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{d-s+i}$ (resp. $\mathrm{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0 \varpi_o^{\mathbb{Z}}}^{D_{o,d}^\times} z^*\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{d-s+i}$) est en tant que $\mathrm{GDW}_o(d)$ -module isomorphe à

$$\bigoplus_{\pi'_o \in \diamond(\pi_o)} [\overleftarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_{\pi'_o} \otimes \pi'_o[s]_D \otimes \mathcal{L}(\pi'_o) \left(-\frac{1}{2}(d-s+2i) \right)$$

(resp. $[\overleftarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_{\pi_o} \otimes \pi_o[s]_D \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(d-s+2i) \right)$)

où $\diamond(\pi_o)$ désigne l'ensemble des représentations de la classe d'équivalence inertielle de π_o telles que $\chi_{\pi'_o}(\varpi_o) = 1$.

Preuve. – Le résultat découle directement du théorème précédent en utilisant IV.3.0.14. \square

IV.5. Principe de la preuve: par récurrence sur le modèle local

On va raisonner par récurrence sur le modèle local, i.e. on suppose connue les $\mathcal{U}_{F_o,\ell,h}^i$ pour tout $h < d$, la conclusion du corollaire IV.4.0.18. En utilisant le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on va dans un premier temps “reconstituer” les faisceaux pervers $\Psi_{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{P}(t, \pi_o)$ en dehors des points supersinguliers puis s'attaquer aux points supersinguliers.

IV.6. Reconstruction hors des points supersinguliers

IV.6.1. Image dans \mathfrak{E} de $\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}$

PROPOSITION IV.6.1.1. – Pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$, on a l'égalité suivante dans \mathfrak{E} :

(IV.6.1.15)

$$[\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}] = \sum_{i=1}^{s_g} \sum_{t=i}^{s_g} (-1)^{t-i} [j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} \mathrm{HT}(\pi_o, [\overleftarrow{i-1}, \overleftarrow{t-i}]_{\pi_o}) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(2i-t-1) \right)].$$

Preuve. – L’isomorphisme IV.2.2.10 et l’égalité IV.2.1.8 déterminent pour tout $0 \leq h < d$, la somme $\sum_i (-1)^i [\Psi_{\mathcal{J}, \overline{M}_\mathcal{J}^h}^i]$ dans le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des faisceaux constructibles sur $\overline{M}_\mathcal{J}^h$. Le résultat découle alors du corollaire 7.0.10 de [5]. \square

IV.6.2. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$. – On suppose donc connu par récurrence le corollaire IV.4.0.18 pour tout $h < d$. D’après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, pour $p, q \geq 0$ et $p + q \leq s - 1$, on a les faits suivants où z est un point géométrique z de $\overline{M}_\mathcal{J}^h$ pour $h \neq d$:

- (i) La fibre $z^* \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ est nulle si h n’est pas de la forme tg ; sinon elle est muni d’une action naturelle de $\widetilde{\text{GDW}}_o(tg)^0$ et on notera

$$z^* \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\mathcal{U}_{\mathcal{J}, \pi_o}) := \text{Ind}_{\widetilde{\text{GDW}}_o(tg)^0 \varpi_o^z}^{\text{GDW}_o(tg)} z^* \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$$

où $\varpi_o \in \text{GL}_{tg}(F_o)$ agit via $\chi_{\pi_o}(\varpi_o)$.

- (ii) Pour tout $h = tg < d$, $\text{Ind} z^* \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\mathcal{U}_{\mathcal{J}, \pi_o})$ est pure de poids $p - q$.
- (iii) Le support de $h^i \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ est nul ou concentré aux points supersinguliers pour i qui n’est pas de la forme $-d + (p + q + 1)g + a(g - 1)$ avec $0 \leq a \leq s - p - q - 1$ et sinon pour $g > 1$ (resp. $g = 1$) son support est $\overline{M}_\mathcal{J}^{(p+q+1+a)g}$ (resp. $\overline{M}_\mathcal{J}^{\geq (p+q+1)}$). Précisément pour un point géométrique z de $M_\mathcal{J}^{(p+q+1+a)g}$, en tant que $\text{GDW}_o((p + q + 1 + a)g)$ -module, on a

$$\begin{aligned} & \text{Ind} z^* h^{-d+(p+q+1)g+a(g-1)} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}) \\ & \simeq \bigoplus_{\pi'_o \in \diamond(\pi_o)} \pi'_o[p + q + 1 + a]_D \otimes \mathcal{U}_{F_o, \ell, (p+q+1+a)g}^{(p+q+1+a)g-a}(\pi'_o[p + q + 1 + a]_D). \end{aligned}$$

Il s’agit alors, à partir de ces résultats ponctuels et l’égalité IV.6.1.15, de reconstituer, hors des points supersinguliers, les faisceaux pervers de Hecke $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ et $\mathcal{P}(t, \pi_o)$, ainsi que leur faisceaux de Hecke de cohomologie. On va procéder en trois temps: en premier lieu on va montrer dans \mathfrak{G} que $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$ est égal à $\mathcal{P}(p + q + 1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p - q))$ modulo des faisceaux pervers de Hecke concentrés aux points supersinguliers, puis dans un deuxième temps on exprimera dans \mathfrak{G} les $j_1^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ en fonction de certains $j_{1*}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_o, \Pi'_{t+a})$ et enfin en inversant ce système on en déduira les $h^i \mathcal{P}(t, \pi_o)$.

IV.6.2.1. Étape 1. — On rappelle que, comme F_o est d’égales caractéristiques, les $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ sont purs de poids $p - q$.

PROPOSITION IV.6.2.2. – *Dans \mathfrak{G} , $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) - \mathcal{P}(p + q + 1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p - q))$ est effectif concentré au points supersinguliers.*

Preuve. – On raisonne par récurrence sur $p + q + 1$ de 1 à s_g . D'après la propriété (iii) ci-dessus, on en déduit que $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ est de dimension $d - (p + q + 1)g$.

LEMME IV.6.2.3. – *Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, dans \mathfrak{G}*

$$j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) - j_{\mathcal{J},!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$$

est effectif de dimension strictement plus petite que $d - tg$ et de poids strictement négatif.

Preuve. – On a la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow Q \rightarrow j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) \rightarrow j_{\mathcal{J},!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) \rightarrow 0$$

où $Q = i_{\mathcal{J}}^{\geq tg,*} j_{\mathcal{J},!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)[-1]$ qui est donc de poids inférieur ou égal à -1 et de dimension strictement inférieure à $d - tg$, d'où le résultat. \square

Ainsi d'après IV.6.1.15, $\mathcal{P}(t, \pi_o)(-\frac{1}{2}(t-1))$ est un constituant de pure dimension $d - tg$ et de poids $t - 1$ de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}$ et donc de $\sum_{p-q=t-1} \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$. Or pour $q > 0$, $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_{t-1+q}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ est de dimension $d - (t + 2q)g < d - tg$ de sorte que $\mathcal{P}(t, \pi_o)(-\frac{1}{2}(t-1))$ est un constituant de $\mathrm{gr}_I^0 \mathrm{gr}_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$. Ainsi dans \mathfrak{G} on a

$$\mathrm{gr}_I^0 \mathrm{gr}_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) = \mathcal{P}(t, \pi_o)(-\frac{1}{2}(t-1)) \oplus Q_{\pi_o}(t)$$

où $Q_{\pi_o}(t)$ est à support dans $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{\geq tg-1}$ et donc de dimension strictement plus petite que $d - tg$. Par ailleurs en utilisant les isomorphismes $N^q : \mathrm{gr}_I^0 \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}) \simeq \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_{p-q}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$, dans \mathfrak{G} ,

$$\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_{t-1-q}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) = \mathcal{P}(t, \pi_o)(-\frac{1}{2}(t-1-2q)) + Q_{\pi_o}(t)(q),$$

de sorte que la proposition IV.6.2.2 découle du lemme suivant. \square

LEMME IV.6.2.4. – *Dans \mathfrak{G} , pour $1 \leq t < s$, $Q_{\pi_o}(t)$ est concentré aux points supersinguliers.*

Preuve. – Pour tout $0 > i > -d + tg$, la dimension du support de $h^i Q_{\pi_o}(t)$ est strictement plus petite que $-i$: en effet la propriété est vraie pour $\mathrm{gr}_I^0 \mathrm{gr}_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ (resp. $\mathcal{P}(t, \pi_o)$) d'après l'hypothèse de récurrence sur IV.4.0.18 (resp. par définition de l'extension intermédiaire). On en déduit donc que $Q_{\pi_o}(t)$ est de dimension nulle. Soit alors z un point non supersingulier. Si la fibre en z de $h^0 Q_{\pi_o}(t)$ était non nulle, elle serait pure de poids $t - 1$; de la suite spectrale des poids on en déduirait alors que la fibre en z de $h^0 \mathrm{gr}_I^0 \mathrm{gr}_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o})$ aurait une partie de poids $t - 1$ non nulle ce qui n'est pas. La conclusion est donc que $Q_{\pi_o}(t)$ est concentré aux points supersinguliers. \square

IV.6.2.5. *Étape 2.* — Il s’agit de généraliser l’isomorphisme $(\Psi_{\mathcal{J}}^i)_{|\overline{M}=h} \simeq \mathcal{F}(\Psi_{F_o, \ell, h}^{h-1+i})$ de [16, IV.2.2], au niveau des bigradués, i.e. $(h^i \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K \Psi_{\mathcal{J}})_{|\overline{M}=h} \simeq \mathcal{F}(\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K \Psi_{F_o, \ell, h}^{h-1+i})$, ce qui doit pouvoir s’obtenir formellement comme dans [13] en considérant des complétés formels le long de sous-variétés de dimension quelconque. Ici, en utilisant, d’après l’hypothèse de récurrence IV.4.0.18, que les flèches $d_1^{p,q}$ de la suite spectrale de monodromie sont non nulles, du moins quand l’espace d’arrivée est non nul, nous sommes en mesure de procéder sans utiliser ce résultat.

PROPOSITION IV.6.2.6. — *Pour $0 < h < d$ qui n’est pas divisible par g , la restriction des faisceaux de cohomologie $h^i \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$ à la strate $\overline{M}_{\mathcal{J}}=h$ est nulle pour tout i ; pour $h = bg$ elle est nulle pour tout i si $b \leq p + q$ et pour $b = p + q + 1 + a$ avec $0 \leq a < s - p - q - 1$ elle est nulle si $i \neq -d + bg - a$, avec*

$$(h^{-d+(p+q+1+a)g-a} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}))_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=(p+q+1)g} \simeq \widetilde{HT}(\pi_o, [\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_o}) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(a+q-p) \right).$$

Preuve. — Le résultat est vrai ponctuellement, il s’agit alors d’obtenir le dernier isomorphisme de faisceaux. On considère la suite spectrale de monodromie

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} \text{gr}_{-i}^M (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}) \implies h^{i+j} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$$

que l’on restreint à la strate $\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg$. De l’hypothèse de récurrence locale IV.4.0.18, on en déduit que cette suite spectrale dégénère en E_2 et donc que pour tout $0 \leq a < b$,

$$(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{-d+bg-a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg} \simeq (\text{Ker } d_1^{a+1-b, -d+bg+b-1-2a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg}.$$

Par ailleurs on a d’après IV.2.2.10

$$(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{-d+bg-a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg}^{e_{\pi_o}} \simeq \widetilde{HT}(\pi_o, [\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_o}) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(p-q-a) \right).$$

L’opérateur de monodromie N induit en outre un isomorphisme entre

$$(\text{Ker } d_1^{a-t, -d+bg+b+1-2a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg} \quad \text{et} \quad (\text{Ker } d_1^{a+2-b, -d+bg+b-1-2a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg}.$$

Ainsi de la suite exacte courte de W_o -faisceaux de Hecke

$$0 \rightarrow (\text{Ker } d_1^{a+1-b, -d+bg+b-1-2a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg} \rightarrow (h^{-d+(p+q+1+a)g-a} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}))_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=(p+q+1)g} \rightarrow (\text{Ker } d_1^{a+2-b, -d+bg+b-1-2a})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=bg} \rightarrow 0$$

on en déduit la suivante

$$0 \rightarrow \widetilde{HT}(\pi_o, [\overleftarrow{p+q}, \overrightarrow{a}]_{\pi_o}) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(a+q-p) \right) \rightarrow (h^{-d+(p+q+1+a)g-a} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K (\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}))_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}=(p+q+1)g} \rightarrow \widetilde{HT}(\pi_o, [\overleftarrow{p+q+1}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_o}) \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(p-q-a) \right) \rightarrow 0$$

de sorte que sur $\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{=(p+q+1+a)g}$, on a la suite exacte courte de faisceaux pervers de Hecke où on pose $t = p + q + 1$:

$$(IV.6.2.16) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{a}]_{\pi_o} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{f} \mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_o} \rightarrow 0$$

où d'après la proposition IV.6.2.2,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} \simeq (h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \otimes \Xi^{-\frac{1}{2}a(g-1)} \times_{P_{t,g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o))|_{\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{=(t+a)g}}.$$

Soit alors

$$\mathcal{G}_{\mathcal{J}} := \mathcal{H}_{\mathcal{J}} \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \otimes \Xi^{-\frac{1}{2}a(g-1)}$$

avec $\mathcal{H}_{\mathcal{J}} := (h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}})|_{\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{=(t+a)g}}$. On rappelle que pour un point géométrique z de $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=(t+a)g}$, $\text{Ind}_{\text{GL}_{(t+a)g}(F_o)}^{\text{GL}_{(t+a)g}(F_o)} z^* \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$, est munie d'une action de \mathbb{Z} telle que $(g_o^c, n) \in \text{GL}_{(t+a)g}(F_o) \times \mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ via l'action diagonale de val $\det g_o^c + n \in \mathbb{Z}$ sur $\text{Ind}_{\text{GL}_{t,g}(F_o)}^{\text{GL}_{t,g}(F_o)} z^* \mathcal{H}_{\mathcal{J}} \otimes \Xi^{-\frac{1}{2}a(g-1)}$ et l'action de g_o^c sur $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o}$. Ainsi en tant que représentation de $\text{GL}_{t,g}(F_o) \times \mathbb{Z}$, où $\text{GL}_{t,g}(F_o) \hookrightarrow P_{t,g,(t+a)g}^{\text{op}}(F_o) \subset \text{GL}_{(t+a)g}(F_o)$, $\text{Ind}_{\text{GL}_{(t+a)g}(F_o)}^{\text{GL}_{(t+a)g}(F_o)} z^* \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ est tel que ses constituants irréductibles sont de la forme $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{r-\frac{1}{2}a(g-1)\}} \otimes \Xi^r$ pour $r \in \mathbb{R}$. Or comme l'image de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_o}$ par le foncteur de Jacquet $J_{N_{t,g,(t+a)g}(F_o)}$ ne contient jamais un constituant de la forme $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}a(g-1)\}} \otimes \dots$, on en déduit que l'image de $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ via l'application f de IV.6.2.16) dans $\mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_o}$ est nulle. Ainsi en tant que $P_{t,g,(t+a)g,d}(F_o) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke, on en déduit que $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ est isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}a(g-1)\}} \otimes [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}t(g-1)\}}$. Or on a

$$h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}} \otimes \Pi_t \simeq (h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}} \otimes \Pi_t)|_{\overline{M}_{\mathcal{J},1}^{=(t+a)g}} \times_{P_{t,g,(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} P_{t,g,d}^{\text{op}}(F_o)$$

avec $\mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}} \simeq \mathcal{F}_{\pi_o[t]_{D,1}} \times_{P_{t,g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o)$, de sorte que de la transitivité de l'induction

$$\begin{aligned} & \times_{P_{t,g,(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} P_{t,g,d}^{\text{op}}(F_o) \times_{P_{t,g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o) = \times_{P_{t,g,(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o) \\ & = \times_{P_{t,g,(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} P_{(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o) \times_{P_{(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o) \end{aligned}$$

on déduit que $h^{-d+tg+a(g-1)} \mathcal{P}(t, \pi_o)|_{\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=(t+a)g}}$ est isomorphe à un sous-faisceau de

$$\mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \otimes [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}a(g-1)).$$

En regardant la fibre en un point géométrique de $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=(t+a)g}$, et comme $\mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \times_{P_{(t+a)g,d}^{\text{op}}(F_o)} \text{GL}_d(F_o)$, on en déduit que l'égalité des faisceaux et donc le résultat. \square

COROLLAIRE IV.6.2.7. – Pour tout $1 \leq t \leq s$ et pour $0 < h < d$ qui n'est pas divisible par g , la restriction des faisceaux de cohomologie $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ à la strate \overline{M}_j^h est nulle pour tout i ; pour $h = (t+a)g$ elle est nulle si $i \neq -d + (t+a)g - a$ et sinon

$$(h^{-d+(t+a)g-a} j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))|_{\overline{M}_j^{=(t+a)g}} \simeq \widetilde{HT}(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overline{a-1}]_{\pi_o}) (\frac{1}{2}a).$$

Preuve. – Le résultat est vrai pour $\Pi_t = [\overline{t-1}]_{\pi_o}$ d'après IV.6.2.6 et IV.6.2.2, 1. Par ailleurs comme dans la preuve de IV.6.2.6, la restriction de $h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{G}_{\pi_o[t]_{D,1}} \otimes [\overline{t-1}]_{\pi_o}$ à $\overline{M}_{j,1}^{=(t+a)g}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes [\overline{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}a(g-1)\}} \otimes [\overline{a-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}t(g-1)\}} \otimes \Xi^{\frac{1}{2}a(g-1)}$ en tant que $P_{tg,(t+a)g,d}^{OP}(F_o) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke. On en déduit alors que

$$(h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{G}_{\pi_o[t]_{D,1}} \otimes \Pi_t)|_{\overline{M}_{j,1}^{=(t+a)g}} \simeq \mathcal{G}_{\pi_o[t+a]_{D,1}} \otimes \Pi_t\{-\frac{1}{2}a(g-1)\} \otimes [\overline{a-1}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}t(g-1)\}} \otimes \Xi^{\frac{1}{2}a(g-1)}$$

en tant que $P_{tg,(t+a)g,d}^{OP}(F_o) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke et on conclut comme ci-dessus en induisant à $GL_d(F_o)$. □

IV.6.3. Constituants simples des $j_{j,!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$

PROPOSITION IV.6.3.1. – Pour tout $1 \leq t \leq s$, on a dans \mathfrak{G} l'égalité (IV.6.3.17)

$$j_{j,!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) = j_{j,!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} j_{j,!}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [i-1]_{\pi_o}) (\frac{1}{2}i) + P_{\pi_o}(\Pi_t)$$

où $P_{\pi_o}(\Pi_t) \in \mathfrak{G}$ est à support dans les points supersinguliers et de poids strictement négatif.

Preuve. – D'après IV.6.2.7, pour tout $1 \leq t \leq s$, on a dans \mathfrak{G} (IV.6.3.18)

$$j_{j,!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r j_{j,!}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [r-1]_{\pi_o}) (\frac{1}{2}r) + Q_{\pi_o}(\Pi_t)$$

où $Q_{\pi_o}(\Pi_t)$ est un élément de \mathfrak{G} à support dans les points supersinguliers et de poids strictement négatif. Il s'agit alors d'inverser ce système d'égalités, ce qui se fait simplement par récurrence sur t de s à 1. Le cas $t = s$ est direct, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $t+1$ et traitons le cas de t . D'après l'hypothèse de récurrence on a

donc modulo des W_o -faisceaux pervers de Hecke concentrés aux points supersinguliers

$$\begin{aligned} & j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) - j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t) \\ &= \sum_{r=1}^{s-t} (-1)^r \sum_{i=0}^{s-t-r} j_{\mathcal{J},!}^{\geq (t+i+r)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [r-1]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [i-1]_{\pi_o}) (\tfrac{1}{2}(r+i)) \\ &= \sum_{a=1}^{s-t} j_{!}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_a) (\tfrac{1}{2}a) \end{aligned}$$

avec $\pi_a = \sum_{r=1}^a (-1)^{r-1} [r-1]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [a-r-1]_{\pi_o} = [a-1]_{\pi_o}$, d'où le résultat. \square

IV.7. Étude aux points supersinguliers

Le but de ce paragraphe est de déterminer les faisceaux pervers ponctuels non précisés dans la proposition IV.6.3.1.

IV.7.1. Calculs de groupes de cohomologie. – On fixe désormais un diviseur g de $d = sg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale π_o de $\mathrm{GL}_g(F_o)$. On considère alors une représentation irréductible Π de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\infty)$ telle que $\Pi_o \simeq \mathrm{St}_s(\pi_o)$. On note $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes. On choisit par ailleurs Π telle que si Π' est une représentation automorphe irréductible telle que $(\Pi')^{\infty,o} \simeq \Pi^{\infty,o}$ alors $\Pi' \simeq \Pi$.

COROLLAIRE IV.7.1.1. – *Pour τ_o une représentation irréductible de $D_{o,h}^{\times}$ avec $1 \leq h < d$, le $\mathrm{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z}$ -module $[H_c^*(\mathcal{F}_{\tau_o, \mathcal{J}, 1})(\Pi^{\infty,o})]$ est nul si h n'est pas divisible par g et si τ_o n'est pas à torsion près isomorphe à $\pi_o[t]_D$. Sinon on a un isomorphisme*

$$[H^*(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,o} \} = m(\Pi) \Pi_t \overrightarrow{\times} [s-t-1]_{\pi_o} \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)$$

où $\mathfrak{A}(\pi_o)$ est l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$, tels que $\pi_o \otimes \chi \circ \mathrm{val}(\det) \simeq \pi_o$.

Preuve. – D'après le lemme II.1.2.2,

$$J_{N_{tg,d}}([s-1]_{\pi_o}) \otimes \delta_{P_{tg,d}}^{\frac{1}{2}} = [t-1]_{\pi_o \{ \frac{1}{2}(s-t)(g-1) \}} \otimes [s-t-1]_{\pi_o \{ \frac{1}{2}t(g-1) \}}$$

de sorte que

$$\mathrm{Red}_{\pi_o[t]_D}^{tg}([s-1]_{\pi_o}) = (\Xi^{-\frac{1}{2}(s-t)(g-1)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}) \otimes [s-t-1]_{\pi_o \{ \frac{1}{2}t(g-1) \}}.$$

Par ailleurs on rappelle que l'on a un isomorphisme $\mathrm{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z}$ -équivariant

$$H^*(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}(d-tg)} = \mathrm{Ind}_{P_{tg,d}^{\mathrm{op}}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} \Pi_t \otimes_d (H^*(\mathcal{F}_{\pi_o[t]_D, \mathcal{J}, 1}))$$

où pour W (resp. V) un $\mathrm{GL}_{d-tg}(F_o) \times \mathbb{Z}$ -module (resp. $\mathrm{GL}_{tg}(F_o)$ -module), $V \otimes_d W$ désigne l'espace $V \otimes W$ muni de l'action d'un élément $((g^c \ 0), n) \in P_{tg,d}^{\mathrm{op}}(F_o) \times \mathbb{Z}$ via l'action naturelle de $g^c \otimes (g^{et}, n + \mathrm{val}(\det g^c))$. Le résultat découle alors de la notation

$$\pi_1 \xrightarrow{\rightarrow} \pi_2 = \mathrm{Ind}_{P_{tg,d}^{\mathrm{op}}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} \pi_1 \left\{ -\frac{1}{2}(s-t)(g-1) \right\} \otimes \pi_2 \left\{ \frac{1}{2}t(g-1) \right\}. \quad \square$$

PROPOSITION IV.7.1.2. – Soient \mathcal{F}_g un faisceau de Hecke sur \overline{M}_g^d et z une tour de points supersinguliers.

- (i) La fibre $z^* \mathcal{F}_g$ est munie d'une action de $\overline{D}(F)^\times \times \mathrm{GL}_d(F_o)^0$ où $\mathrm{GL}_d(F_o)^0$ est le noyau de la valuation du déterminant.
- (ii) En tant que $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \simeq (\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathrm{GL}_d(F_o)$ -module, on a

$$H^0(\overline{M}_g^d, \mathcal{F}_g) \simeq \mathrm{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}} z^* \mathcal{F}_g$$

avec $\delta \in \overline{D}(F)^\times \mapsto (\delta^{\infty,o}, \mathrm{val} \circ \mathrm{rn}(\delta_o)) \in (\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}$ et où l'action de $g_o \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ est donnée par celle de $(g_o^{-\mathrm{val} \det g_o}, \mathrm{val} \det g_o) \in \mathrm{GL}_d(F_o)^0 \times \mathbb{Z}$ où $g_o \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ est un élément fixé tel que $\mathrm{val} \det g_o = 1$.

Preuve. – (i) Cela découle de la description des actions sur la bijection IV.1.2.7 en prenant z comme point base.

(ii) D'après IV.1.2.7, l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}$ sur $\overline{M}_g^d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est transitive de groupe d'isotropie $\overline{D}(F)^\times$. On en déduit alors qu'en tant que $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times$ -module, $H^0(\overline{M}_g^d, \mathcal{F}_g)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions localement constantes

$$f : (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z} \longrightarrow z^* \mathcal{F}_g, \forall \delta \in \overline{D}(F)^\times, \forall (\gamma, n) \in (D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}, f(\delta(\gamma, n)) = \delta f(\gamma, n)$$

soit à $\mathrm{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}} z^* \mathcal{F}_g$ d'où le résultat. □

Remarque : l'isomorphisme de (ii) dépend du choix de l'élément g_o tel que $\mathrm{val} \det g_o = 1$.

COROLLAIRE IV.7.1.3. – Avec les notations de la proposition précédente, si $z^* \mathcal{F}_g$ est munie d'une action du noyau $(D_{o,d}^\times)^0$ de la valuation de la norme réduite qui est compatible à l'action de $\overline{D}(F)^\times \hookrightarrow D_{o,d}^\times$, alors

$$(IV.7.1.19) \quad H^0(\overline{M}_g^d, \mathcal{F}_g) \simeq \mathcal{C}^\infty(\overline{D}(F)^\times \setminus (\overline{D}_{\mathbb{A}}^\infty)^\times) \otimes_{D_{o,d}^\times} \mathrm{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_g.$$

Preuve. – D'après la proposition précédente, $H^0(M_g^d, \mathcal{F}_g)$ est isomorphe en tant que $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ -module à $\mathrm{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times} (\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} z^* \mathcal{F}_g)$ où $\delta \in \overline{D}(F)^\times$ envoie un élément $v \in z^* \mathcal{F}_g$ de la composante d'indice n dans la somme directe ci-dessus sur l'élément $\delta v \in z^* \mathcal{F}_g$ de la composante d'indice $n + \mathrm{val} \mathrm{rn}(\delta_o)$. Avec les hypothèses de l'énoncé, on écrit $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} z^* \mathcal{F}_g = \mathrm{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_g$ de sorte que

$H^0(M_{\mathcal{J}}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{J}}) \simeq \text{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times} \text{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ où $\overline{D}(F)^\times$ agit sur $\text{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ via son plongement naturel dans $D_{o,d}^\times$. Le résultat découle alors de l'isomorphisme évident

$$\text{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times} \text{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_{\mathcal{J}} \simeq (\text{Ind}_{\overline{D}(F)^\times}^{(\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times} 1) \otimes_{D_{o,d}^\times} \text{Ind}_{(D_{o,d}^\times)^0}^{D_{o,d}^\times} z^* \mathcal{F}_{\mathcal{J}}$$

où $(\overline{D}_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \simeq (\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty, o})^\times \times D_{o,d}^\times$. □

PROPOSITION IV.7.1.4. – *Pour tout i et $1 \leq t < s'_g = [d/g]$,*

$$[H^i(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{\Pi^{\infty, o}\}$$

est nulle.

Preuve. – D'après IV.6.3.1, on a l'égalité

$$H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)) = \sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overline{a-1}]_{\pi_o}) (\frac{1}{2}a)) + H^0(P_{\pi_o}(\Pi_t))$$

avec d'après le corollaire IV.7.1.1, dans $\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overline{a-1}]_{\pi_o}) (\frac{1}{2}a)) [\Pi^{\infty, o}] \\ & = \Pi_t \overrightarrow{\times} \left(m(\Pi) \Upsilon + (-1)^{s-t} \sum_{\overline{\Pi} \in \mathcal{U}_{\overline{D}}(\Pi)} m(\overline{\Pi}) [\overline{s-t-1}]_{\pi_o} \right) \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right) \end{aligned}$$

avec $\Upsilon = \sum_{a=0}^{s-t-1} (-1)^a [\overline{a-1}] \overrightarrow{\times} [\overline{s-t-a-1}]_{\pi_o} = (-1)^{s-t-1} [\overline{s-t-1}]_{\pi_o}$ et où $\mathcal{U}_{\overline{D}}(\Pi)$ est l'ensemble des représentations irréductibles automorphes $\overline{\Pi}$ de $\overline{D}_{\mathbb{A}}^\times$ telles que $(\overline{\Pi}^{\infty, o})^\vee \simeq \Pi^{\infty, o}$ et $\overline{\Pi}_o \simeq \pi_o[s]_D$, $\overline{\Pi}_\infty \simeq \text{JL}^{-1}(\Pi_\infty)$ et où $m(\overline{\Pi})$ désigne la multiplicité de $\overline{\Pi}$ dans l'espace des formes automorphes.

Ainsi du fait que $H^i(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))$ est pur de poids i , et comme $P_{\pi_o}(\Pi_t)$ est une somme alternée de W_o -faisceaux pervers de Hecke concentrés aux points supersinguliers de poids strictement négatifs, on en déduit que pour tout $i \geq 0$, $H^i(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))(\Pi^{\infty, o})$ est nul; par dualité ils sont nuls alors nuls pour tout i . □

COROLLAIRE IV.7.1.5. – *Avec les notations et les hypothèses ci-avant, on obtient que $\mathfrak{U}_{\overline{D}}(\Pi)$ est réduit à un élément $\overline{\Pi}$ avec $m(\overline{\Pi}) = m(\Pi)$ et que $H^0(P_{\pi_t})(\Pi^{\infty, o})$ est nul.*

IV.7.2. Application aux constituants ponctuels des $j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$

COROLLAIRE IV.7.2.1. – Pour tout $1 \leq t \leq s$, les W_o -faisceaux pervers de Hecke $P_{\pi_o}(\Pi_t)$ de la proposition IV.6.3.1 sont nuls.

Preuve. – En utilisant IV.7.1.2 et IV.7.1.5, il suffit en fait de montrer que les $P_{\pi_o}(\Pi_t)$ vérifient les hypothèses de IV.7.1.2 ce qui revient à montrer que les $Q_{\pi_o}(\Pi_t)$ les vérifient (cf. la preuve de la proposition IV.6.3.1). En effet supposons qu’il existe t tel que $P_{\pi_o}(\Pi_t)$ soit non nul, i.e. pour une tour de points supersinguliers z , $z^*P_{\pi_o}(\Pi_t)$ est une représentation virtuelle non nulle de $D_{o,d}^\times$. Soit alors τ_o une représentation irréductible de $D_{o,d}^\times$ telle que la composante τ_o -isotypique de $P_{\pi_o}(\Pi_t)$ soit non nulle et soit Π vérifiant les hypothèses du corollaire IV.7.1.5 avec $\bar{\Pi}_o \simeq \tau_o$. D’après IV.7.1.2, $[H^0(\bar{M}_{\mathcal{J}}^{(0)}, P_{\pi_o}(\Pi_t))\{\Pi^{\infty,o}\}]$ est alors non nul ce qui contredit IV.7.1.5.

Pour montrer que les $Q_{\pi_o}(\Pi_t)$ vérifient les hypothèses de IV.7.1.2, on va utiliser le fait que d’après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, la restriction à la strate supersingulière des faisceaux de cohomologie des $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})$ les vérifie. Considérons alors la filtration par les poids de $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})$ et le triangle distingué

$$W_{<p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \longrightarrow \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}) \longrightarrow W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \xrightarrow{+1}$$

On rappelle que, d’après IV.6.2.2, pour tout $k \neq p - q$, $\mathrm{gr}_k^W \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})$ est concentré aux points supersinguliers alors que pour $k = p - q$, il est dans \mathfrak{G} égal à $\mathcal{D}(p + q + 1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p - q))$ plus des faisceaux pervers concentrés aux point supersinguliers. Ainsi pour tout $i < -1$, on a

$$h^i \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}) \simeq h^i \mathcal{D}(p + q + 1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p - q))$$

de sorte que pour tout $i < -1$, la restriction aux points supersinguliers de $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ vérifie les hypothèses de IV.7.1.2. Par ailleurs pour un point supersingulier z , on a la suite exacte

$$\begin{aligned} \text{(IV.7.2.20)} \quad 0 \rightarrow z^* h^{-1}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) &\longrightarrow z^* h^{-1} W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \\ &\longrightarrow z^* h^0 W_{<p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \longrightarrow z^* h^0(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \\ &\longrightarrow z^* h^0 W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On rappelle que le h^0 d’une extension intermédiaire d’un faisceau pervers non ponctuel est nul. On considère alors les parties de poids supérieurs ou égaux à $p - q$ de cette suite exacte de sorte que $W_{\geq p-q} z^* h^0 W_{<p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}))$ est nul. On a par ailleurs

$$W_{\geq p-q} z^* h^0 W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})) \simeq z^* h^0 W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}))$$

qui est donc isomorphe à $W_{\geq p-q}(z^* h^0 \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}}))$. Ainsi comme la restriction à la strate supersingulière de $h^0 \mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e_{\pi_o}})$ vérifie les hypothèses de IV.7.1.2 et comme l’action du groupe de Galois commute à celle de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on en déduit

que $h^0W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}))$ les vérifie aussi. En utilisant que la dualité de Verdier échange $\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o})$ et $\mathrm{gr}_I^p \mathrm{gr}_K^q(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o})$, on en déduit que $h^0W_{\leq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}))$ les vérifie aussi et donc aussi $h^0W_{< p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}))$. Finalement, dans le groupe de Grothendieck des faisceaux de Hecke sur $\overline{M}_{\mathcal{J}}^{(0)}$, d'après IV.7.2.20, on obtient que

$$h^{-1}W_{\geq p-q}(\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o})) \simeq h^{-1}\mathcal{P}(p+q+1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q))$$

vérifie les hypothèses de IV.7.1.2.

Ainsi pour tout i , la restriction aux points supersinguliers de $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$ vérifie les hypothèses de IV.7.1.2 de sorte que, en utilisant IV.6.3.18, les $Q_{\pi_o}(\Pi_t)$ vus dans \mathfrak{G} , les vérifient aussi. □

On en déduit alors l'amélioration suivante de IV.6.2.2.

COROLLAIRE IV.7.2.2. – Soient $1 \leq g \leq d$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$; on note $s = \lfloor d/g \rfloor$. Dans \mathfrak{G} on a l'égalité

$$[\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}] = \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} [\mathcal{P}(t, \pi_o)(-\frac{1}{2}k)]$$

avec pour tous $p, q \geq 0$ et $p+q+1 < s$,

$$[\mathrm{gr}_I^q \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o})] - [\mathcal{P}(p+q+1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q))]$$

est nul ou concentré aux points supersinguliers de la forme

$$\sum_{k=0}^{s-1} \epsilon_k(p, q) \mathcal{P}(s, t)(\frac{1}{2}(s-1-2k))$$

avec $\epsilon_k(p, q) = 0$ ou 1 et $\sum_{p, q \geq 0} \epsilon_k(p, q) = 1$.

IV.8. Étude de la suite spectrale des cycles évanescents

IV.8.1. Cas où $\Pi_o \simeq \mathrm{St}_s(\pi_o)$. – Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$. On fixe dans la suite une représentation automorphe irréductible Π de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\rho_{\infty})$ et telle que $\Pi_o \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o}$ pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_g(F_o)$ et telle que si Π' automorphe vérifie $(\Pi')^{\infty, o} \simeq \Pi^{\infty, o}$ alors $\Pi' \simeq \Pi$. On note $m(\Pi)$ la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes. On commence par un résultat déjà présent dans [24].

PROPOSITION IV.8.1.1. – Pour $i \neq 0$, on a $[H^i(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, o}\} = 0$ et

$$[H^0(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, o}\} = m(\Pi) \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o} \otimes [\mathcal{L}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_o})].$$

Preuve. – On considère la suite spectrale

$$E_1^{i,j} := H^{i+j}(\mathrm{gr}_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{J}})) \implies H^{i+j}(\Psi_{\mathcal{J}}).$$

La proposition IV.7.1.4 donne alors la nullité de $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ pour: $i + j \neq 0$. Pour $i = 1 - s + 2r$ avec $0 \leq r \leq s - 1$, on a

$$\begin{aligned} [E_{\infty}^{s-1-2r,2r+1-s}]\{\Pi^{\infty,o}\} &= [E_1^{s-1-2r,2r+1-s}]\{\Pi^{\infty,o}\} \\ &= m(\Pi)[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\tfrac{1}{2}(1-s+2r)). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque : le lecteur attentif notera que le cas $s = 1$ ne peut pas être prouvé indépendamment ici, il faut impérativement se référer à [24]. Pour des résultats plus fins sur la semi-simplicité, on renvoie à la proposition V.6.1 et à la remarque V.6.2.

PROPOSITION IV.8.1.2. – Soit $1 \leq tg' \leq d$ et π'_o une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{g'}(F_o)$. Si $g' \neq g$ ou si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o , alors les $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ sont nuls pour tout i .

Pour $\pi'_o = \pi_o$, pour tout $i \neq 0$, $[H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul et pour $i = 0$

$$[H^0(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\} = m(\Pi)[(\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o}] \otimes \left(\Xi^{-\frac{1}{2}(s-t)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)$$

en tant que représentation de $\mathrm{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z}$.

Remarque : de manière équivalente, $[H^i(j_!^{\geq tg'} \mathcal{G}(t, \pi'_o)_1)]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o ou si $i \neq d - tg$, et on a en tant que représentation de $\mathrm{GL}_{(s-t)g}(F_o) \times \mathbb{Z}$

$$[H^{d-tg}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} \mathcal{G}(t, \pi_o)_1)]\{\Pi^{\infty,o}\} = m(\Pi)[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o(-\frac{1}{2}t(g-1))} \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)(g-1)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right).$$

Preuve. – On considère la filtration par les poids du W_o -faisceaux pervers de Hecke $j_!^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t)$ de sorte que ces gradués $\mathrm{gr}_k^W(!, \pi'_o, t)$ sont nuls pour $k > 0$ ou $-k < \lfloor d/g' \rfloor - t$ et sinon donné par $j_{!*}^{\geq (t-k)g'} HT(\pi'_o, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[-k-1]}_{\pi'_o})(-\frac{1}{2}k)$, cf. IV.7.2.1. On considère alors la suite spectrale associée

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(\mathrm{gr}_{-i}^W(!, \pi'_o, t)) \implies H^{i+j}(j_!^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t)).$$

D'après IV.7.1.1, les $E_1^{i,j}[\Pi^{\infty,o}]$ sont nuls sauf si π'_o est dans la classe d'équivalence inertielle de π_o et si $i = -j = s - t$ avec

$$[E_1^{s-t,t-s}]\{\Pi^{\infty,o}\} = m(\Pi)[\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(t-s)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)$$

d'où le résultat. □

PROPOSITION IV.8.1.3. – Pour $g > 1$ et pour tout $0 \leq i \leq d-1$, les $\mathrm{GL}_d(F_o) \otimes W_o$ -modules

$$[H^j(\Psi_{\mathcal{J}, \pi'_o}^i)]\{\Pi^{\infty, o}\}$$

vérifient les propriétés suivantes:

- 1) ils sont nuls si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o ;
- 2) pour $\pi'_o = \pi_o$, ils sont nuls si j n'est pas de la forme $d - tg$ pour $1 \leq t \leq s$;
- 3) pour $\pi'_o = \pi_o$ et $j = d - tg$ avec $1 \leq t \leq s$, ils sont nuls si i n'est pas de la forme $1 - d + tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$;
- 4) pour $\pi'_o = \pi_o$ et $1 \leq t < s$, $[H^{d-tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+tg-r})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est isomorphe à

$$m(\Pi)[\overleftarrow{t-r}, \overrightarrow{r-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(1-s+2(t-r))).$$

Preuve. – On utilise la suite spectrale associée à la stratification

$$(IV.8.1.21) \quad E_1^{p,q;i} = H_c^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}^p, \Psi_{\mathcal{J}, \pi'_o}^i) \implies H_c^{p+q}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi'_o}^i)$$

On rappelle que d'après la proposition précédente, $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est non nul si et seulement si:

- ▷ π'_o est dans la classe d'équivalence inertielle de π_o ,
- ▷ $p = tg$ pour $1 \leq l \leq s$,
- ▷ $p + q = d - tg$,
- ▷ $d - 1 + i = tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$.

Les points 1), 2) et 3) en découlent alors directement. On a par ailleurs, pour $1 \leq t < s$,

$$[E_1^{tg, d-2tg; 1-d+tg-r}]\{\Pi^{\infty, o}\} \simeq m(\Pi)[\overleftarrow{t-r}, \overrightarrow{r-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(1-s-2(r-t)))$$

de sorte que pour tout $k \geq 1$, les flèches $d_k^{p,q;i} : E_k^{p,q;i} \rightarrow E_k^{p+k, q-k+1}$ de IV.8.1.21 induisent une application nulle sur $\{\Pi^{\infty, o}\}$. En effet pour qu'il y ait une application non nulle entre $[E_k^{p,q;i}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ et $[E_k^{p+k, q-k+1;i}]\{\Pi^{\infty, o}\}$, il faut qu'il existe $1 \leq t_1 \leq s$ et $1 \leq r_1 \leq t_1$ ainsi que $1 \leq t_2 \leq s$ et $1 \leq r_2 \leq t_2$ avec $(p, q, i) = (t_1g, d - 2t_1g, 1 - d + t_1g - r_1)$ et $(p+k, q-k+1, i) = (t_2g, d - 2t_2g, 1 - d + t_2g - r_2)$, ce qui impose $(t_2 - t_1)g = 1$ ce qui ne se peut pas avec $g > 1$. On en déduit donc que $[E_{\infty}^{p,q;i}]\{\Pi^{\infty, o}\} = [E_1^{p,q;i}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ d'où le résultat d'après la proposition précédente. \square

COROLLAIRE IV.8.1.4. – La partie de poids $d - s$ de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-i}(\pi_o[s]_D)$ est un constituant de $\Pi_i \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d - s))$ où

$$\Pi_i = \begin{cases} \left[\overleftarrow{s-1} \right]_{\pi_o} & \text{pour } i = 1, \\ \left[\overrightarrow{0} \right]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \left[\overleftarrow{s-2} \right]_{\pi_o} & \text{pour } i = 2, \\ \vdots & \\ \left[\overrightarrow{i-2} \right]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \left[\overleftarrow{s-i} \right]_{\pi_o} & \text{pour } i, \\ \vdots & \\ \left[\overrightarrow{s-2} \right]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \left[\overleftarrow{0} \right]_{\pi_o} & \text{pour } i = s. \end{cases}$$

En outre $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-s}(\pi_o[s]_D)$ contient $\left[\overrightarrow{s-1} \right]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}s(g-1))$ et la partie de poids $s(g-1)$ de $\sum_{i=1}^s (-1)^i \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-i}(\pi_o[s]_D)$ est égale à $(-1)^s \left[\overrightarrow{s-1} \right]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}s(g-1))$.

Preuve. – Traitons tout d’abord le cas $g > 1$: on étudie la $\Pi^{\infty, o}$ -partie de la suite spectrale

$$(IV.8.1.22) \quad E_2^{p,q} = H^p(\Psi^q) \implies H^{p+q}(\Psi_j).$$

des cycles évanescents pour Π vérifiant les propriétés du début de ce paragraphe.

LEMME IV.8.1.5. – Pour $g > 1$ et pour tout $0 \leq r \leq s - 1$, la partie de poids $1 - s$ de $[E_2^{0, -r}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est un constituant de $[E_2^{d-rg, 1-d+r(g-1)}]\{\Pi^{\infty, o}\}$, i.e. de

$$m(\Pi) \left[\overrightarrow{r-1} \right]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \left[\overleftarrow{s-r-1} \right]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(1-s) \right).$$

Preuve. – D’après la proposition précédente, les parties de poids $1 - s$ de $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ pour $p \neq 0$, non nulles, sont

$$[E_2^{d-tg, 1-d+t(g-1)}]\{\Pi^{\infty, o}\} \simeq m(\Pi) \left[\overrightarrow{t-1} \right]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \left[\overleftarrow{s-t-1} \right]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(1-s) \right).$$

Or, d’après IV.8.1.1, pour $r \neq 0$, la partie de poids $1 - s$ de $[E_{\infty}^{-r}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nulle et pour $r = 0$ elle est égale à $\left[\overleftarrow{s-1} \right]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(1-s) \right)$ d’où le résultat. \square

LEMME IV.8.1.6. – Pour $g > 1$ et tout $0 \leq r \leq s - 1$, on a

$$[E_2^{0, -r}]\{\Pi^{\infty, o}\} \simeq \mathcal{C}^{\infty}(\overline{D}(F) \times (\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \otimes_{\overline{D}_{\mathbb{C}}} \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-1-r})[\Pi^{\infty, o}].$$

Preuve. – D’après la proposition précédente, $[H_c^0(\overline{M}_j^{-tg}, \Psi_j^{-r})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nul pour tout $1 \leq t < s$; pour $g \neq 1$, il en est de même de $[H_c^1(\overline{M}_j^{-tg}, \Psi_j^{-r})]\{\Pi^{\infty, o}\}$. Le résultat découle alors de l’étude de la suite spectrale de stratification pour le faisceau Ψ_j^{-r} et de IV.7.1.3. \square

Ainsi pour tout $1 \leq i \leq s$, la partie de poids $d - s$ de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-i}(\pi_o[s]_D)$ est un constituant de $\Pi_i \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d - s))$ où Π_i est comme dans l'énoncé. Par ailleurs on remarque que $[E_2^{g, 1-d+(s-1)(g-1)}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ contient $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(1 - s))$ alors que $[E_2^{2g, 1-d+(s-2)(g-1)}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ non; on en déduit alors que $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-s}(\pi_o[s]_D)$ contient $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}s(g-1))$. Le calcul sur la somme alternée correspond à IV.2.1.8.

Pour $g = 1$ le raisonnement est similaire: en raisonnant comme dans la proposition précédente, $[H_c^1(\overline{M}_j^h, \Psi_j^{-r})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ a sa partie de poids $1 - s$ nulle si $h \neq d - 1$ et $r \neq d - 1$ et sinon elle est égale à $[\overrightarrow{d-2}]_{\xi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\xi_o} \otimes \xi_o(\frac{1}{2}(1 - s))$. Par ailleurs les parties de poids $1 - s$ des $[H_c^0(\overline{M}_j^h, \Psi_j^{-r})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ sont nulles pour $h \neq d$ de sorte que, en utilisant la suite spectrale de stratification de Ψ_j^{-r} , les constituants de poids $d - s$ de $\text{Hom}_{\overline{D}_o^\times}((\mathcal{C}^\infty(\overline{D}^\times \setminus ((\overline{D}_\mathbb{A}^\infty)^\times)^\vee, \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-1-r})[\Pi^{\infty, o}]$ qui ne sont pas des constituants de $[\overrightarrow{d-2}]_{\xi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\xi_o} \otimes \xi_o(\frac{1}{2}(s - d))$, sont des constituants de $[E_2^{0, -r}]\{\Pi^{\infty, o}\}(\frac{1}{2}(1 - d))$. Or comme d'après IV.8.1.1, $[E_\infty^{-r}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ n'a pas de constituants de poids $1 - s$, le résultat découle du fait que d'après la proposition précédente les parties de poids $1 - s$ des $[E_2^{p, 1-r-p}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ sont nulles sauf pour $p = d - r$ auquel cas elle est égale à $[\overrightarrow{d-2}]_{\xi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\xi_o} \otimes \xi_o(\frac{1}{2}(1 - s))$. \square

IV.8.2. Cas où $\Pi_o \simeq \text{Speh}_s(\pi_o)$. – On peut remarquer que la connaissance des $[E_2^{p, q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ de la suite spectrale IV.8.1.22 ne nous fournit pas le théorème local. La figure 1 illustre ce fait dans le cas $s = 2$, où pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_{d/2}(F_o)$, l'on n'arrive pas à exclure le cas:

- $\triangleright \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-1}(\pi_o[2]_D) = [\overleftarrow{1}]_{\pi_o} \otimes (\mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d - 1)) \otimes \text{Sp}_2);$
- $\triangleright \widetilde{\mathcal{U}}_{F_o, \ell, d}^{d-2}(\pi_o[2]_D) = [\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(d - 2)).$

Dans le cas où l'on considère une représentation automorphe Π de $D_\mathbb{A}^\times$ vérifiant $\text{Hyp}(\rho_\infty)$ et telle que $\Pi_o \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$, dans la figure 2, on illustre comment on exclut le cas défavorable ci-avant, en remarquant que $[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}$ n'est pas isomorphe à $[\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}$, contredisant le théorème de Lefschetz difficile. On pourra aussi se référer aux figures 3 et 4 qui détaillent pour $s = 4$ et $g = 2$, les $[E_2^{p, q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ respectivement dans les cas $\Pi_\infty = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_\infty}$ et $\Pi_\infty = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_\infty}$.

REMARQUE IV.8.2.1. – Si Π vérifie $\text{Hyp}(\rho_\infty)$, la condition $\Pi_o \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$ pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$, implique qu'il existe une représentation irréductible cuspidale π_∞ de $\text{GL}_{g'}(F_\infty)$ avec $d = s'g'$ telle que $\Pi_\infty \simeq [\overleftarrow{s'-1}]_{\pi_\infty}$ et donc Π vérifie $\text{Hyp}(\rho_\infty)$ avec $\rho_\infty = \text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s'-1}]_{\pi_\infty})$ et $s = s'$.

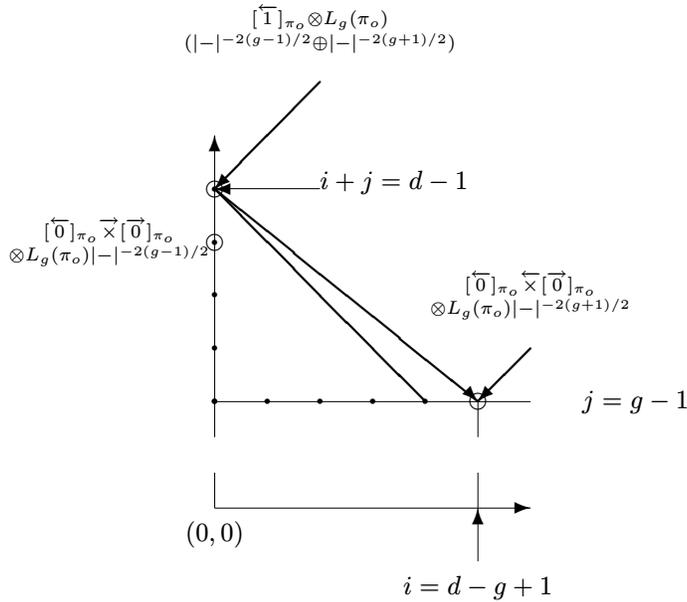


FIGURE 2. $E_{2, \pi_o}^{p, q}[\Pi^{\infty, o}]$ de IV.8.1.22 pour $\Pi_{\infty} \simeq \text{Speh}_s(\pi_{\infty})$ non compatible avec l'aboutissement

Preuve. – D'après IV.7.2.1, on a l'égalité

$$H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)) = \sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_o, \Pi_t \overleftarrow{\times} [\overline{a-1}]_{\pi_o})) (\frac{1}{2}a).$$

D'après II.1.2.2,

$$J_{N_{tg, d}^{\text{op}}}([\overline{s-1}]_{\pi_o}) \otimes \delta_{P_{tg, d}}^{\frac{1}{2}} = [\overline{t-1}]_{\pi_o \{ \frac{1}{2}(s-t)(g+1) \}} \otimes [\overline{s-t-1}]_{\pi_o \{ -\frac{1}{2}t(g+1) \}}$$

de sorte que

$$\text{red}_{\pi_o [t]_D}^{tg}([\overline{s-1}]_{\pi_o}) = (-1)^t \Xi^{-\frac{1}{2}(s-t)(g+1)} \otimes [\overline{s-t-1}]_{\pi_o \{ -\frac{1}{2}t(g+1) \}}.$$

On en déduit alors que dans $\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z})$, pour $tg < d$

$$[H^*(j_{\mathcal{J}, !}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty, o} \} = (-1)^t m(\Pi) [\Pi_t \overleftarrow{\times} [\overline{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \left(\Xi^{-\frac{1}{2}(s-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)],$$

ce qui donne l'égalité

$$\begin{aligned}
 [H^*(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty, o} \} &= (-1)^t \left[\Pi_t \overrightarrow{\times} \right. \\
 &\left. \left(m(\Pi) \sum_{a=0}^{s-t-1} [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-a-1}]_{\pi_o} \otimes \left(\Xi^{-\frac{1}{2}(s-t-2a)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \sum_{\bar{\Pi} \in \mathfrak{U}_{\bar{D}}(\Pi)} m(\bar{\Pi}) [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right) \right] .
 \end{aligned}$$

Du fait que $H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))$ est pur de poids i , on en déduit le résultat dans le groupe de Grothendieck pour tout $i \neq t - s$, et enfin pour $i = t - s$ par dualité.

En passant aux faisceaux non induits, on en déduit que

$$H^i(j^{\geq tg} \mathcal{F}(\pi_o, t)[d - tg]) [\Pi^{\infty, o}]$$

est égal dans le groupe de Grothendieck à

$$\begin{aligned}
 m(\Pi) [\overrightarrow{\frac{1}{2}(s-t-i)-1}]_{\pi_o \{ \frac{1}{4}((s-3t-i)g+s-i+t) \}} \times [\overrightarrow{\frac{1}{2}(s-t+i)-1}]_{\pi_o \{ -\frac{1}{4}(s+t-i)(g+1) \}} \\
 \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}((s-t)g+i)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

de sorte qu'il existe un sous-quotient de $H^i(j^{\geq tg} \mathcal{F}(\pi_o, t)[d - tg])$ qui soit isomorphe à la représentation ci-dessus, le résultat découle alors du fait que les strates sont induites. □

COROLLAIRE IV.8.2.4. – *L'ensemble $\mathfrak{U}_{\bar{D}}(\Pi)$ est réduit à un élément $\bar{\Pi}$ avec $m(\bar{\Pi}) = m(\Pi)$.*

PROPOSITION IV.8.2.5. – *Dans $\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z})$, $[H^i(\underline{\Psi}_{\mathcal{J}})] \{ \Pi^{\infty, o} \}$ est nul si $|i| > s - 1$ ou si $i \equiv s \pmod{2}$; sinon il est isomorphe à $m(\Pi) [s - 1]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}i)$.*

Preuve. – On considère la suite spectrale de monodromie-poids

$$E_1^{i,j} := H^{i+j}(\text{gr}_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{J}})) \implies H^{i+j}(\Psi_{\mathcal{J}})$$

dont on étudie les $\Pi^{\infty, o}$ -parties au sens où pour $r \geq 1$, on regarde l'image de $E_r^{i,j}$ dans le groupe de Grothendieck des $G(\mathbb{A}^{\infty}) \times W_o$ -modules et plus particulièrement les constituants de la forme $\Pi^{\infty, o} \otimes \Pi'_o \otimes \sigma_o$. ⁽²⁾ De la description des $\text{gr}_k^M(\Psi_{\mathcal{J}})$, et

⁽²⁾ Prendre la $\Pi^{\infty, o}$ -partie n'est pas un foncteur exact.

d'après IV.8.2.3, pour $\delta \geq 0$, on a

(IV.8.2.23)

$$\begin{aligned} & \frac{[E_1^{-k, \delta+k}]\{\Pi^{\infty, o}\}}{m(\Pi)} \\ &= \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \pmod{2}}} \left[\left(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_o}} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{1}{2}(s-t+\delta-2)]_{\pi_o}} \right) \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{1}{2}(s-t-\delta-2)]_{\pi_o}} \right] \\ &= \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(k-\delta) \right), \end{aligned}$$

(IV.8.2.24)

$$\begin{aligned} & \frac{[E_1^{-k, \delta+k}]\{\Pi^{\infty, o}\}}{m(\Pi)} \\ &= \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \pmod{2}}} \left[\left(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_o}} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{1}{2}(s-t-\delta-2)]_{\pi_o}} \right) \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{1}{2}(s-t+\delta-2)]_{\pi_o}} \right] \\ &= \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(\delta+k) \right). \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que $m(\Pi) \overrightarrow{[s-1]_{\pi_o}} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) (\frac{1}{2}(s-1))$ est un constituant de $[E_{\infty}^{0, 1-s}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ de sorte que $[H^{1-s+2r}(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ admet $m(\Pi) \overrightarrow{[s-1]_{\pi_o}} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) (\frac{1}{2}(s-1-2r))$ comme constituant d'après le théorème de Lefschetz difficile. En utilisant par ailleurs la pureté, on remarque que $[H^i(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nul si $i \equiv s \pmod{2}$ de sorte que le résultat découle du fait que la dimension virtuelle de $[H^*(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty}\}$ est égale à $dm(\Pi)$.

Remarque : on peut se passer de la pureté en étudiant la suite spectrale de monodromie et en utilisant que l'aboutissement doit vérifier le théorème de Lefschetz difficile (cf. [24], 14.19) et être compatible à la dualité de Verdier. Il faut alors être plus précis et ne pas travailler seulement dans le groupe de Grothendieck mais utiliser le fait que les strates non supersingulières sont induites pour dire qu'il existe un sous-quotient de $E_1^{i,j}$ qui soit isomorphe aux induites de IV.8.2.23 et IV.8.2.24. \square

Remarque : ce résultat correspond à la conjecture 14.21 de [24].

IV.8.3. Parties de poids minimal de la cohomologie locale

PROPOSITION IV.8.3.1. – *Pour tout diviseur g de $d = sg$ et π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$, la partie de poids $d-s$ de $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^{d-s+i}(\pi_o[s]_D)$ est nulle pour $0 < i < s$ et égale à $\overrightarrow{[s-1]_{\pi_o}} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) (-\frac{1}{2}(d-s))$ pour $i = 0$.*

Preuve. – Le principe est de se ramener à une situation analogue à celle de [3], où en ce qui concerne les parties de poids $1 - s$ des composantes $\Pi^{\infty, o}$ -isotypiques dans la suite spectrale des cycles évanescents, seuls les points supersinguliers contribuent.

LEMME IV.8.3.2. – Soit $1 \leq tg' \leq d$ et π'_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_o)$.

- ▷ Si $g' \neq g$ ou si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o , alors les $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ sont nuls pour tout i .
- ▷ Pour $g' = g$ et $\pi'_o = \pi_o$, $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est mixte de poids $t - s + 2k$ avec $0 \leq k \leq s - t$.
- ▷ La partie de poids $t - s$ de $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nulle pour tout $i \neq s - t$.

Preuve. – On considère comme précédemment la filtration par les poids du W_o -faisceaux pervers de Hecke $j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t)$ ainsi que la suite spectrale associée

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(\mathrm{gr}_{-i}^W(l, \pi'_o, t)) \implies H^{i+j}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t))$$

D'après IV.8.2.3, $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est non nul si et seulement si π'_o est dans la classe d'équivalence inertielle de π_o et (i, j) est de la forme $(a, t - s + 2r)$ avec $0 \leq a \leq s - t - r \leq s - t$ auquel cas on a

$$(IV.8.3.25) \quad \frac{[E_1^{a,t-s+2r}]\{\Pi^{\infty, o}\}}{m(\Pi)} = \left[(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o} \right] \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(2r-s+t)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right).$$

On observe en particulier que pour tout (i, j) tels que $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est non nul, il est alors pur de poids j de sorte qu'en particulier, la suite spectrale dégénère en E_2 . Il s'agit alors de montrer que $[E_2^{i,j}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nul pour tout $(i, j) = (a, t - s) \neq (0, s - t)$.

Pour cela, en raisonnant par récurrence sur t , on suppose la conclusion du lemme vérifiée pour tout $t' < t$; pour $t = 1$ l'hypothèse de récurrence est vide. Soit alors $t - s \leq i$ minimal tel que $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ soit non nul de sorte que sa partie de poids $t - s$ non nulle est

$$m(\Pi) \left[\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o} \right] \otimes \left(\Xi^{\frac{1}{2}(t-s)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \right)$$

avec $i = t - s + a$.

LEMME IV.8.3.3. – *Sous les hypothèses ci-avant, on a pour $g > 1$*

$$\begin{aligned} & [H^{d-tg+i}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)})]\{\Pi^{\infty, o}\} \\ & = m(\Pi) \left[\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[a, s-t-1-r-a]}_{\pi_o} \right] \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(t-s) \right). \end{aligned}$$

Pour $g = 1$, il contient $m(\Pi) \left[\overrightarrow{[t-1, a+1, s-t-1-r-a]}_{\pi_o} \right] \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(t-s) \right)$.

Preuve. – On considère la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}^{-p}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)}) \implies H^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)})$$

où $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nul si p n'est pas de la forme $t'g$ avec $t'(g-1) \leq t(g-1) \leq t'g-1$.

▷ En particulier pour $g > 1$, on a $t' \leq t$. En outre pour un tel t' , d'après IV.2.2.10, on a

$$\left((\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+t(g-1)}) \Big|_{\overline{M}_{\mathcal{J}}^{-t'g}} \right)^{e_{\pi_o}} \simeq \mathcal{G}(t', \pi_o) \otimes \Psi_{F_o, t'g}^{t(g-1)}(\pi_o[t']_D)$$

de sorte que pour $p = t'g < tg$, $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est nul pour $p+q \neq (s-t')(g+1) > (s-t)g+i$ pour tout $i \leq s-t$. On en déduit donc que $[E_{\infty}^{(s-t)g+i}]\{\Pi^{\infty, o}\} = [E_1^{tg, (s-2t)g+i}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ qui est donc isomorphe à

$$m(\Pi) \left[\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[a, s-t-1-r-a]}_{\pi_o} \right] \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(-\frac{1}{2}(t-s) \right),$$

d'où le résultat.

▷ Pour $g = 1$, on a $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\} = 0$ pour $p+q = (s-t)g+i-1$ comme précédemment. Reste alors à regarder le cas $p+q = (s-t)g+i+1$: la partie de poids $t-s$ est alors, d'après l'hypothèse de récurrence, à prendre parmi les constituants de $(\overrightarrow{[t'-1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[a+t-t']_{\pi_o}} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-2-a-t]_{\pi_o}})$ de sorte que $\overrightarrow{[t-1, a+1, s-t-1-a]}_{\pi_o}$ n'en est jamais un constituant, d'où le résultat. \square

LEMME IV.8.3.4. – *Avec les hypothèses précédentes, pour tout $j < t(g-1)$,*

$$[H^i(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty, o}\}$$

est de poids strictement supérieur à $t-s$.

Preuve. – On considère la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}^{-p}, \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+j}) \implies H^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+j}).$$

Pour que $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty, o}\}$ soit non nulle il faut, comme $j < t(g-1)$, que $p = t'g$ avec $t' < t$. Le résultat découle alors du fait que la propriété est vérifiée pour les termes initiaux d'après IV.8.3.25. \square

LEMME IV.8.3.5. — Avec les hypothèses précédentes, pour $j = t(g-1) + \alpha$ avec $\alpha > 0$, les constituants de poids $1 - s$ des $[H^i(\overline{M}_g, \Psi_j^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ sont à prendre parmi les constituants de

$$\overrightarrow{[t' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[a' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t' - 1 - a']}_{\pi_o}$$

avec $t' \geq t$ et $\alpha = (t' - t)(g - 1)$.

Preuve. — La suite spectrale de stratification nous ramène à prouver le résultat pour les $[H^i(\overline{M}_g^p, \Psi_{j,\pi_o}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ avec $p = t'g$. Pour $t' < t$, d'après IV.8.3.25, les parties de poids $t - s$ sont nulles. Pour $t' > t$, on doit alors avoir $j = t'(g - 1)$ et le résultat découle de IV.8.3.25. □

Fin de la preuve du lemme IV.8.3.2. — On considère la suite spectrale des cycles évanescents:

$$E_2^{p,q} = H^p(\overline{M}_g, \Psi_g^q) \implies H^{p+q}(\Psi_g).$$

Pour $0 \leq r < s - t$, d'après IV.8.3.3, $\overrightarrow{[t - 1, a + 1, s - t - a - 1]}_{\pi_o}$ est un constituant de la partie de poids $1 - s$ de $[E_2^{d-tg+t-s+a,t(g-1)}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ alors que d'après IV.8.3.4 il n'est pas un constituant de $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ pour tout $q < t(g - 1)$. Par ailleurs comme d'après IV.8.2.5, il n'est pas un constituant de l'aboutissement, on en déduit, d'après IV.8.3.5, qu'il existe $t' \geq t$ tel qu'il soit un constituant de

$$\overrightarrow{[t' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[a' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t' - 1 - a']}_{\pi_o}$$

avec $t' \geq t$, $\alpha = (t' - t)(g - 1)$ et $a' = a - (t' - t)g$. En reprenant les notations de §II.1, les constituants de ces derniers sont de la forme $\Gamma^{s-1} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ avec $a_1 = t' - 1$, t' et donc $a_1 > t - 1$, de sorte que $\overrightarrow{[t' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[a' - 1]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t' - 1 - a']}_{\pi_o}$ ne contient pas $\overrightarrow{[t - 1, a + 1, s - t - a - 1]}_{\pi_o}$, d'où le résultat. □

Fin de la preuve de la proposition IV.8.3.1. — On applique le lemme IV.8.3.2, en remarquant qu'en ce qui concerne les parties de poids $1 - s$ des $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ de la suite spectrale des cycles évanescents, seuls les points supersinguliers contribuent. On se retrouve alors dans la situation de [3] et on procède de même. Précisément, de la suite spectrale de stratification du W_o -faisceau de Hecke Ψ_j^i , on en déduit, d'après IV.8.3.2, que la partie de poids $1 - s$ de $[H^n(\Psi_j)]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nulle pour $n > 0$ et sinon, d'après IV.7.1.3, égale dans $\text{Groth}(\text{GL}_d(F_o) \times W_o)$ à la partie de poids $1 - s$ de $\widetilde{\mathcal{U}}_{F_o,\ell,d}^{d-s}(\pi_o[s]_D)(\frac{1}{2}(d - 1))$ qui est donc, via la suite spectrale des cycles évanescents, égale à la partie de poids $1 - s$ de $[H^n(\Psi_j)]\{\Pi^{\infty,o}\}$. Le résultat découle alors de IV.8.2.5. □

IV.9. Preuve des théorèmes globaux

IV.9.1. Faisceaux de cohomologie aux points supersinguliers des $\mathcal{P}(t, \pi_o)$

LEMME IV.9.1.1. – Pour z un point supersingulier de $\overline{M}_g^{(0)}$, si $z^*h^i\mathcal{P}(t, \pi_o)$ est non nulle, alors son image dans le groupe de Grothendieck de $\mathrm{GL}_d(F_o) \times W_o$ est celle de

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \pi \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-t) \right)$$

où π est une somme de représentation elliptique de type π_o de $\mathrm{GL}_{(s-t)_g}(F_o)$.

Preuve. – On raisonne par récurrence sur t de s à 1, le cas $t = s$ étant trivial car $\mathcal{P}(s, \pi_o) = j_{\mathcal{J},!}^{\geq sg} HT(s, [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o})$. Supposons donc le résultat acquis jusqu’au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On considère la suite spectrale associée à la filtration par les poids de $j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o})$. D’après l’hypothèse de récurrence, tous les $z^*E_1^{i,j}$ sont de la forme de l’énoncé pour $i > 0$ et nuls pour $i < 0$. Ainsi, $z^*E_\infty^n$ étant nul, $z^*h^i\mathcal{P}(t, \pi_o)$ est pur de poids $t - s$ de sorte que $z^*h^i\mathcal{P}(t, \pi_o)$ est de la forme

$$\mathrm{Ind}_{P_{t,g,d}(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o \{-\frac{1}{2}(s-t)(g-1)\}} \otimes \pi \left\{ \frac{1}{2}tg \right\} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-t) \right).$$

Le résultat découle alors du fait qu’en tant que représentation de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ tous les constituants irréductibles des $z^*E_1^{i,j}$ pour $i > 0$ sont π_o -elliptiques. \square

LEMME IV.9.1.2. – Pour tout point supersingulier z et pour tout $i \neq t - s$, $z^*h^i\mathcal{P}(t, \pi_o)$ est nul.

Preuve. – Considérons la suite spectrale $E_1^{i,j} = h^{i+j} \mathrm{gr}_{-i}^W(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}$ des poids de $\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}$, et plus particulièrement les parties de poids $1 - s$ des $z^*E_1^{i,j}$, où z est une tour de points supersinguliers. On raisonne par l’absurde: soit donc t minimal et $\delta > 0$ minimal pour lequel $z^*h^{t-s+\delta}\mathcal{P}(t, \pi_o)$ est non nul. On rappelle, cf. IV.7.2.2, que dans \mathfrak{G} ,

$$\mathrm{gr}_I^{t-1} \mathrm{gr}_0^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o}) - \mathcal{P}(t, \pi_o) \left(\frac{1}{2}(t-1) \right)$$

est effectif concentré aux points supersinguliers de la forme

$$\sum_{i=0}^{s-1} \epsilon_i(0, t-1) \mathcal{P}(s, \pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-1-2i) \right)$$

avec $\epsilon_i(0, t-1) = 0, 1$. De la suite spectrale des poids pour $\mathrm{gr}_I^{t-1} \mathrm{gr}_0^K(\Psi_{\mathcal{J},\pi_o}^{e\pi_o})$ et du lemme précédent, on en déduit que $z^*E_1^{t-1, 1-s+\delta}$ admet un constituant de la forme $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-1) \right)$. Or pour tout $i+j = \delta - s$ et $i < t-1$, (resp. $i+j = 2-s+\delta$ et $i > t-1$) les constituants irréductibles de poids $1 - s$ de $z^*E_1^{i,j}$ sont nuls (resp. de la forme $[\overleftarrow{i}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-i-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-1) \right)$). On en déduit donc que $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o) \left(\frac{1}{2}(s-1) \right)$ est un constituant de l’aboutissement, soit de $\mathcal{U}_{F_o, \ell, d}^{d-s+\delta} \left(\frac{1}{2}(d-1) \right)$ ce qui n’est pas d’après IV.8.3.1. \square

PROPOSITION IV.9.1.3. – Pour $p, q \geq 0$ avec $p + q + 1 \leq s$, et z un point supersingulier, $z^* h^i \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$ est nul en tant que $\text{GDW}_o(d)$ -module pour $i \neq p + q + 1 - s$ et sinon isomorphe à

$$\pi_o[s]_D \otimes [\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{[s-2-p-q]}_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(q-p)).$$

Preuve. – D’après IV.3.0.12, $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$ est isomorphe à $\mathcal{P}(p+q+1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q))$ de sorte que d’après IV.9.1.2, $z^* h^i \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$ est nul pour $i \neq p+q+1-s$. D’après IV.6.3.18 et IV.7.2.1, l’image de $\sum_i z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_o)$ dans le groupe de Grothendieck de $\text{GL}_d(F_o) \times W_o$ est égal à celle de $z^* \mathcal{F}(s, \pi_o) \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(s-t))$. Le faisceau étant induit on en déduit finalement que

$$z^* h^{t-s} \mathcal{P}(t, \pi_o) \simeq z^* \mathcal{F}(s, \pi_o) \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(s-t)).$$

D’après le théorème de Berkovich-Fargues, $z^* \mathcal{F}(s, \pi_o)$ est munie d’une action de $D_{o,d}^\times$ qu’il s’agit maintenant d’identifier. On regarde comme dans la preuve de IV.9.1.2, la suite spectrale des poids de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$, $E_1^{i,j} = h^{i+j} \text{gr}_{-i}^W(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}$ et on remarque alors que $z^* \mathcal{F}(s, \pi_o) \otimes [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(s-1))$ est un constituant $z^* E_1^{0,1-s}$ alors que $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}$ n’est pas un constituant de $z^* E_1^{i,j}$ pour $(i,j) \neq (0, 1-s)$. On en déduit alors que $z^* \mathcal{F}(s, \pi_o) \otimes [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o} \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(\frac{1}{2}(s-1))$ est un constituant de l’aboutissement de sorte que d’après IV.8.3.1 (iii) et le théorème de Berkovich, $z^* \mathcal{F}(s, \pi_o) \simeq \pi_o[s]_D$ d’où le résultat. \square

IV.9.2. Description de la suite spectrale de monodromie de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}$. – Il s’agit de prouver le théorème IV.3.0.15, i.e. montrer que, pour tout $p, q \geq 0$ avec $p + q + 1 \leq s - 1$, la flèche

$$(IV.9.2.26) \quad \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) \longrightarrow \text{gr}_I^{q+1} \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})[1]$$

déduite par décalage et rotation du triangle distingué $\text{gr}_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow \text{gr}_I^q$ est donnée en cohomologie en un point supersingulier z

$$z^* h^{p+q+1-s} \mathcal{P}(p+q+1, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q)) \longrightarrow z^* h^{p+q+2-s} \mathcal{P}(p+q+2, \pi_o)(-\frac{1}{2}(p-q-1))$$

par l’unique morphisme $\text{GL}_{s_g}(F_o)$ -équivariant non nul

$$[\overleftarrow{p+q}]_{\pi_o} \overrightarrow{[s-p-q-2]}_{\pi_o} \longrightarrow [\overleftarrow{p+q+1}]_{\pi_o} \overrightarrow{[s-p-q-3]}_{\pi_o}.$$

On rappelle que les gradués de la filtration de monodromie sont donnés par $\text{gr}_k^M = \bigoplus_{p-q=k} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K$. On remarque alors que pour tout $p, q \geq 0$ avec $p + q + 1 \leq s - 1$, il ne peut pas y avoir de morphisme $\text{GDW}_o(d)$ -équivariant entre deux sous-quotients irréductibles de

$$z^* h^{p+q+1-t} \text{gr}_I^q \text{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}}) \quad \text{et} \quad z^* h^{p+q+2-t} \text{gr}_I^{q'} \text{gr}_{p-q-\delta+q'}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e_{\pi_o}})$$

pour tout $\delta \geq 1$ sauf si $q' = q + 1$: en effet pour que $z^* h^{p+q+2-t} \text{gr}_I^{q'} \text{gr}_{p-q-\delta+q'}^K(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e\pi_o})$ soit non nul, il faut, d'après IV.3.0.13, que $p' + q' + 1 = p + q + 2$, et pour que le poids soit le même il faut que $p' = p$. Ainsi la suite spectrale de monodromie $E_1^{i,j} = h^{i+j} \text{gr}_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e\pi_o}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{e\pi_o}$ dégénère en E_2 et les $d_1^{i,j}$ sont données par IV.9.2.26. Par ailleurs en utilisant que N^p induit un isomorphisme $\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K \simeq \text{gr}_I^{q+p} \text{gr}_0^K$, on est ramené à traiter le cas de $p = 0$. On remarque alors que $z^* h^{q+1-s} \mathcal{P}(q+1, \pi_o)(\frac{1}{2}q)$ est de poids $1 - s$, le résultat découlant ainsi de IV.8.3.1.

CHAPITRE V

COMPLÉMENTS SUR LA COHOMOLOGIE GLOBALE ET APPLICATIONS

Introduction

Dans ce chapitre, on complète les calculs de groupes de cohomologie du chapitre précédent. On notera bien qu'en ce qui concerne l'action du groupe de Weil local W_o , nous n'obtenons des renseignements que sur les Frobenius semi-simplifiées.

0.1. — Après quelques calculs de foncteur de Jacquet, des calculs des groupes de cohomologie des $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)$, on en déduit, proposition V.2.5, les composantes locales des représentations automorphes de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$: on obtient ce que l'on déduirait des résultats de Mœglin-Waldspurger sur les représentations de carré intégrable de $GL_d(\mathbb{A})$ et de la conjecture de Ramanujan-Peterson, prouvée par Lafforgue dans ce cadre, si on disposait d'une correspondance de Jacquet-Langlands globale entre $GL_d(\mathbb{A})$ et $D_{\mathbb{A}}^{\times(1)}$. On en déduit alors, proposition V.3.1, une correspondance de Jacquet-Langlands globale entre $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ et $\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\times}$

0.2. — On étudie ensuite, proposition V.4.1, les groupes de cohomologie des variétés de Drinfeld, ce qui généralise les résultats de [24] et notamment leur conjecture 14.21.

0.3. — On généralise, proposition V.5.1, les résultats partiels du lemme IV.8.3.2 et on en déduit, corollaire V.5.6, un énoncé d'irréductibilité sur les variétés d'Igusa.

0.4. — Enfin § V.6, on prouve la semi-simplicité de l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$ sur tous les groupes de cohomologie calculés.

⁽¹⁾ On en déduit en particulier que l'hypothèse 14.23 de [24] est vérifiée.

V.1. Calculs de foncteur de Jacquet

NOTATION V.1.1. – D'après [28, §9], l'induite $[\overleftarrow{t}_1]_\pi \times [\overleftarrow{t}_2]_{\pi\{\delta\}}$ est irréductible si et seulement si les segments $\Delta = [-\frac{1}{2}t_1, \frac{1}{2}t_1]$ et $\Delta' = [-\frac{1}{2}t_2 + \delta, \frac{1}{2}t_2 + \delta]$ ne sont pas liés. Dans le cas contraire on écrit $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta' = [-\frac{1}{2}r_1 + \delta_1, \frac{1}{2}r_1 + \delta_1]$ et $\Delta_2 = \Delta \cap \Delta' = [-\frac{1}{2}r_2 + \delta_2, \frac{1}{2}r_2 + \delta_2]$ de sorte que l'induite précédente est de longueur 2 avec pour constituants (cf. [28, 4.6])

$$[\overleftarrow{r}_1]_{\pi\{\delta_1\}} \times [\overleftarrow{r}_2]_{\pi\{\delta_2\}} \quad [\overleftarrow{t}_1]_\pi \boxplus [\overleftarrow{t}_2]_{\pi\{\delta\}}$$

soit avec les notations de *loc. cit.* $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \langle \Delta_2 \rangle^t$ et $\langle \Delta, \Delta' \rangle^t$. De manière générale $[\overleftarrow{t}_1]_{\pi\{\delta_1\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t}_r]_{\pi\{\delta_r\}}$ désigne la représentation notée $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle^t$ dans [28], où les Δ_i sont les segments tels que $[\overleftarrow{t}_i]_{\pi\{\delta_i\}} = \langle \Delta_i \rangle^t$.

Remarque : Avec les notations précédentes $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ est noté $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1}{2}(s-t)\}} \boxplus [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}t\}}$.

PROPOSITION V.1.2. – Pour tout s, t , $J_{N_{k_g, (st-k)_g}}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi})$ est égal à

$$\sum_{\underline{k}} [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(s-t+k_1-1)\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(s-t+k_2-3)\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{k_s-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_s-t-s+1)\}} \\ \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(s+k_1-1)\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(s+k_2-3)\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-k_s-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_s-s+1)\}} \\ \text{où } \underline{k} \text{ décrit les suites } (t \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 0) \text{ avec } \sum_{i=1}^s k_i = k.$$

Preuve. – Commençons par traiter le cas $s = 2$, i.e.

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}} - [\overleftarrow{t}]_\pi \times [\overleftarrow{t-2}]_\pi.$$

Soit alors

$$[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(1-t+k_1)\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)\}} \\ \otimes [\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(1+k_1)\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}}$$

un constituant de $J_{N_{(k_1+k_2)_g, 2t_g}(F_o)}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{1}{2}\}})$.

▷ Si $k_1 < k_2$, alors la représentation ci-dessus est irréductible; par ailleurs elle est aussi un constituant de $J_{N_{k_g, 2t_g}(F_o)}([\overleftarrow{t}]_\pi \times [\overleftarrow{t-2}]_\pi)$ car $[\overleftarrow{t-k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(1+k_1)\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}}$ est un constituant de $[\overleftarrow{t-k_1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}k_1\}} \times [\overleftarrow{t-k_2-2}]_{\pi\{-\frac{1}{2}k_2\}}$ d'après V.1.1.

▷ Si $k_1 \geq k_2$, on a

$$[\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(1-t+k_1)\}} \times [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)2\}} = \\ [\overleftarrow{k_1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_1-t)\}} \times [\overleftarrow{k_2-2}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-t)\}} + [\overleftarrow{k_1-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(1-t+k_1)\}} \boxplus [\overleftarrow{k_2-1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)2\}}$$

$$\begin{aligned} & \overleftarrow{[t - k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(1+k_1)\}} \times \overleftarrow{[t - k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}} = \\ & \overleftarrow{[t - k_2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_2\}} \times \overleftarrow{[t - k_1 - 2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_1\}} + \overleftarrow{[t - k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(1+k_1)\}} \boxplus \overleftarrow{[t - k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}}. \end{aligned}$$

On remarque alors que $J_{N_{k_g, 2tg}}(\overleftarrow{[t]}_{\pi} \times \overleftarrow{[t - 2]}_{\pi})$ contient

$$\overleftarrow{[k_1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_1-t)\}} \times \overleftarrow{[k_2 - 2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-t)\}} \otimes \overleftarrow{[t - k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{k_1+1}{2}\}} \times \overleftarrow{[t - k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}}$$

et, pour $k_1 < t$,

$$\overleftarrow{[k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)2\}} \times \overleftarrow{[k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_1+1-t)\}} \otimes \overleftarrow{[t - k_2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_2\}} \times \overleftarrow{[t - k_1 - 2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_1\}}$$

et donc

$$\overleftarrow{[k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)2\}} \boxplus \overleftarrow{[k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_1+1-t)\}} \otimes \overleftarrow{[t - k_2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_2\}} \times \overleftarrow{[t - k_1 - 2]}_{\pi\{-\frac{1}{2}k_1\}}.$$

Il ne reste plus alors qu'à vérifier que pour $k_1 \geq k_2$

$$\begin{aligned} \psi := & \overleftarrow{[k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(1-t+k_1)\}} \boxplus \overleftarrow{[k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1-t)2\}} \otimes \overleftarrow{[t - k_1 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(1+k_1)\}} \\ & \boxplus \overleftarrow{[t - k_2 - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(k_2-1)\}} \end{aligned}$$

n'est pas un constituant de $J_{N_{k_g, 2tg}(F_o)}(\overleftarrow{[t]}_{\pi} \times \overleftarrow{[t - 2]}_{\pi}) = \sum_i \pi_i \otimes \pi'_i$ ce qui découle de l'observation suivante: pour tout i , π_i (resp π'_i) est de la forme $\overleftarrow{[\alpha]}_{\pi\{\dots\}} \times \overleftarrow{[\beta]}_{\pi\{\dots\}}$ avec $\alpha < \beta$ et où $\pi\{\frac{1}{2}t\}$ (resp. $\pi\{-\frac{1}{2}t\}$) appartient au support cuspidal de $\overleftarrow{[\alpha]}_{\pi\{\dots\}}$ (resp. $\overleftarrow{[\beta]}_{\pi\{\dots\}}$) alors que la situation est inversée pour ψ , d'où le résultat d'après [28, th. 6.1 (b)].

On raisonne alors par récurrence sur s en supposant le résultat acquis jusqu'au rang $s - 1$. Le cas s découle alors du fait que $\overleftarrow{[s - 1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi}}$ est un constituant des induites

$$\overleftarrow{[t - 1]}_{\pi\{\frac{1}{2}(s-1)\}} \times \overleftarrow{[s - 2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi}\{-\frac{1}{2}\}} \quad \text{et} \quad \overleftarrow{[s - 2]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi}\{\frac{1}{2}\}} \times \overleftarrow{[s - 1]}_{\pi\{-\frac{1}{2}(s-1)\}} \quad \square$$

Pour t, g des entiers positifs et π une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(K)$, on rappelle que $\pi[t]_D$ est la représentation $\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi))$ du groupe des inversibles $D_{K, tg}^{\times}$ de l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/tg$, où JL est la bijection de Jacquet-Langlands entre les représentations irréductibles admissibles de $D_{K, tg}^{\times}$ et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de $\text{GL}_{tg}(K)$.

Pour $1 \leq t g \leq d$, on introduit

$$\text{red}_{\pi[t]_D} : \text{Groth}(\text{GL}_d(K)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{K, tg}^{\times} / \mathcal{D}_{K, tg}^{\times} \times \text{GL}_{d-tg}(K))$$

comme la somme $\text{red}_{\pi[t]_D}^+ + (-1)^{t-1} \text{red}_{\pi[t]_D}^-$ où $\text{red}_{\pi[t]_D}^+$ (resp. $\text{red}_{\pi[t]_D}^-$) est défini comme la composée des deux applications suivantes:

▷ en premier lieu, on a

$$[\text{II}] \in \text{Groth}(\text{GL}_d(K)) \longmapsto [J_{N_{h, d}}(\text{II}) \otimes \delta_{P_{tg, d}}^{\frac{1}{2}}] \in \text{Groth}(\text{GL}_{tg}(K) \times \text{GL}_{d-tg}(K));$$

▷ ensuite on a

$$\text{Groth}(\text{GL}_{tg}(K) \times \text{GL}_{d-tg}(K)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{K,tg}^\times / \mathcal{D}_{K,tg}^\times \times \text{GL}_{d-tg}(K)),$$

$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \simeq^i [\overleftarrow{t-1}]_\pi \text{ (resp. } [\overleftarrow{t-1}]_\pi), \\ \xi \otimes \beta & \text{si } \alpha = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi \circ \xi} \text{ (resp. } [\overleftarrow{t-1}]_{\pi \circ \xi}). \end{cases}$$

On déduit alors de la proposition V.1.2 le calcul suivant.

COROLLAIRE V.1.3. – ▷ Pour tout $r > s+t-1$, on a $\text{red}_{\pi[r]_D}([\overleftarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}) = (0)$.

▷ Pour $r = s+t-1$ et $t, s > 1$ (resp. $t = 1$ ou $s = 1$) on a

$$\text{red}_{\pi[s+t-1]_D}([\overleftarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}) = (-1)^{s-1} \Xi^{\frac{(s-1)(t-1)g}{2}} \otimes [\overleftarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{(s+t-1)g}{2}\}}},$$

(resp. la représentation triviale de $\mathbb{Z} \simeq D_{K,tg}^\times / \mathcal{D}_{K,tg}^\times$).

▷ Pour $1 \leq r \leq s+t-1$, on a

$$\text{red}_{\pi[r]_D}([\overleftarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_\pi}) = \sum_{k=\max(0,r-t)}^{\min(r,s)-1} (-1)^k \Xi^{\frac{stg-rg+s-t+r-1-2k}{2}} \otimes$$

$$\left([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1-s}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1-s+2(s-2-k)}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{-\frac{1-s+2(s-3-k)+2}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{-\frac{s-3+2}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-r+k-1}]_{\pi\{-\frac{k-r}{2}\}} \right) \left\{ \frac{rg}{2} \right\}.$$

NOTATION V.1.4. – Pour tout $0 \leq k_s \leq s-1$ et $0 \leq k_t \leq t-1$, on notera $R_\pi(s, t)(k_s, k_t)\{-\frac{rg}{2}\}$ la représentation irréductible

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1-s}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-\frac{1-s+2(s-2-k_s)}{2}\}} \boxplus$$

$$[\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{-\frac{1-s+2(s-3-k_s)+2}{2}\}} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{-\frac{s-3+2}{2}\}} \boxplus [\overleftarrow{t-k_t-2}]_{\pi\{-\frac{k_t+1}{2}\}}.$$

Remarque : avec ces notations la formule précédente se réécrit

$$\sum_{k=\max(0,r-t)}^{\min(r,s)-1} (-1)^k \Xi^{\frac{stg-rg+s-t+r-1-2k}{2}} \otimes R_\pi(s, t)(k, r-k-1).$$

V.2. Composantes locales des représentations automorphes

La composante locale Π_o d'une représentation automorphe Π de $D_{\mathbb{A}}^\times$ est de la forme $[\overleftarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_{o,1}\{\lambda_1\}}} \times \cdots \times [\overleftarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{o,u}\{\lambda_u\}}}$ où les $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\lambda_i \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $s \sum_{i=1}^u g_i t_i = d$. Comme pour τ une représentation irréductible de $D_{o,h}^\times$, on a

$$\text{red}_\tau(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) = \sum_{i=1}^r \pi_1 \times \cdots \times \pi_{i-1} \times (\text{red}_\tau \pi_i) \times \pi_{i+1} \times \cdots \times \pi_r$$

on est ramené à étudier le cas $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}}$.

PROPOSITION V.2.5. – Soit Π une représentation irréductible automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ telle que $\Pi_o \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}}$. Pour tout $r \geq 1$, l'image de $[H^i(\mathcal{P}(r, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_o) \times W_o$ vérifie les propriétés suivantes:

- (i) si $r > s + t - 1$ alors elle est nulle pour tout i ;
- (ii) pour $r = s + t - 1$, elle est nulle pour tout $i \neq 0$ et pour $i = 0$ elle est égale à

$$e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) \overleftarrow{[s+t-2]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_o}} \otimes \mathcal{L}(\pi_o);$$

- (iii) pour $t \leq r \leq s + t - 1$, elle est nulle si $|i| > s + t - 1 - r$ et pour $i = s + t - 1 - r$ elle est égale, avec les notations de V.1.4, à $e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) R_{\pi_o}(s, t)(r - t, t - 1) \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{s+t-1-r}{2})$;
- (iv) pour $\max\{1, t - s\} \leq r \leq t$, elle est nulle pour tout $|i| > s - t + r$;
- (v) pour $t - s > 1$ et $1 \leq r < t - s$, elle est nulle pour tout i .

Preuve. – (i) D'après V.1.3, pour tout $r > s + t - 1$ on a $\text{red}_{\pi_o[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}}) = (0)$ de sorte que d'après IV.2.2.3 $[H^*(j_!^{\geq rg} HT(\pi_o, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_o}))]\{\Pi^{\infty, o}\} = (0)$ ce qui implique (i) d'après IV.7.2.1.

(ii) Pour $r = s + t - 1$, on a

$$\text{red}_{\pi_o[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}}) = \Xi^{\frac{(s-1)(t-1)g}{2}} \otimes \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_o\{\frac{s+t-1}{2}\}}}.$$

D'après (i) et IV.7.2.1 $[H^*(j_!^{\geq rg} HT(\pi_o, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_o}))]\{\Pi^{\infty, o}\} = H^*(j_{!*}^{\geq rg} HT(\pi_o, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_o}))$ est donc égal d'après IV.2.2.3 à $e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) \overleftarrow{[s+t-2]}_{\pi_o} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-2]}_{\overleftarrow{[t-2]}_{\pi_o}} \otimes (\mathcal{L}(\pi_o)$ avec $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$.

(iii) On raisonne par récurrence sur r de $s + t - 1$ à t ; l'initialisation $r = s + t - 1$ a été traitée en (ii). Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $r + 1$ et traitons le cas de r . D'après V.1.3, $\text{red}_{\pi_o[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}})$ est égal à $\Xi^{\frac{stg-rg+s+t-1-r}{2}} \otimes R_{\pi_o}(s, t)(r - t, t - 1)$ plus une somme de termes de la forme $\Xi^{\frac{stg-rg+\delta}{2}} \otimes \Pi_{\delta}$ avec $\delta \equiv s + t - 1 - r \pmod{2}$ et $\delta < s + t - 1 - r$. D'après IV.2.2.3 et le fait que $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$, on en déduit donc que $H^*(j_!^{\geq rg} HT(\pi_o, \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_o}))\{\Pi^{\infty, o}\}$ est égal à $e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) R_{\pi_o}(s, t)(r - t, t - 1) \otimes \Xi^{\frac{s+t-1-r}{2}}$ plus des termes de poids strictement plus petit de sorte que d'après IV.7.2.1 et l'hypothèse de récurrence, $[H^*(\mathcal{P}(r, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est égal à $e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) R_{\pi_o}(s, t)(r - t, t - 1) \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{s+t-1-r}{2})$ plus des termes de poids strictement plus petit. Le résultat découle alors de la pureté.

(iv) On raisonne par récurrence sur r de t à $\max\{1, t - s\}$; l'initialisation $r = t$ a été traitée en (iii). Le raisonnement est strictement identique à celui de (iii) en remarquant que les termes de $\text{red}_{\pi_o[r]_D}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_o}})$ sont tous de poids inférieur ou égal à $s - t - 1 + r$.

(v) Le raisonnement de (iv) fournit la nullité pour tout $i > -1$ et donc pour tout i par dualité de Grothendieck-Verdier. \square

COROLLAIRE V.2.6. – On reprend les hypothèses de la proposition précédente, en particulier $\Pi_o \simeq [s-1]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o}}$. Pour tout $1 \leq r \leq st$ et $r \neq t$ (resp. $r \neq t \pm 1$), $[H^i(\mathcal{P}(r, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\} = (0)$ pour tout $i \geq s-1$ (resp. $i = s-2$). Par ailleurs:

- (i) pour $r = t$, $[H^{s-1}(\mathcal{P}(t, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ contient $e_{\pi_o} m(\Pi^{\infty, o}) \Pi_o \otimes \mathcal{L}(\pi_o)$;
- (ii) pour $r = t \pm 1$, Π_o n'est pas un constituant de $[H^{s-2}(\mathcal{P}(r, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ en tant que $GL_d(F_o)$ -module.

Preuve. – Par rapport à la proposition précédente, il ne reste plus qu'à vérifier (ii). Pour $r = t + 1$ d'après le point (iii) de la proposition précédente, $[H^{s-2}(\mathcal{P}(t+1, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est, en tant que $GL_d(F_o)$ -module, isotypique pour $[\overleftarrow{t}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}} \times R_{\pi_o}(s, t)(1, t-1)$. Le résultat découle alors du lemme suivant.

LEMME V.2.7. – L'image de $[\overleftarrow{t}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}} \times R_{\pi_o}(s, t)(1, t-1)$ par $J_{P_{t_g, t_{s_g}}}$ ne contient jamais un élément de la forme $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}} \otimes ?$.

Preuve. – En effet comme $J_{P_{g, (t+1)_g}}([\overleftarrow{t}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}}) = [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{s-t-2}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}}$ par égalité des supports cuspidaux, on en déduit que si $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}} \otimes ?$ était un constituant de

$$J_{P_{t_g, t_{s_g}}}([\overleftarrow{t}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}} \times R_{\pi_o}(s, t)(1, t-1))$$

alors $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}}$ serait un constituant de $J_{P_{t_g, t_{(s-1)_g}}}(R_{\pi_o}(s, t)(1, t-1)\{-\frac{(t+1)g}{2}\})$ ce qui n'est pas car $\pi_o\{-\frac{s+t-2}{2}\}$ n'appartient pas au support cuspidal de $R_{\pi_o}(s, t)(1, t-1)\{-\frac{(t+1)g}{2}\}$. \square

Dans le cas $r = t - 1$, d'après la proposition précédente et comme $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$, dans $\text{Groth}(GL_d(F_o))$

$$[H^{s-2}(\mathcal{P}(t-1, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\} = [H^*(j_!^{\geq tg} HT(\pi_o, [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}))]_{s-1}\{\Pi^{\infty, o}\} - [H^*(j_!^{\geq (t-1)g} HT(\pi_o, [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o}))]_{s-2}\{\Pi^{\infty, o}\}$$

$\text{o}\ddot{Y} [M]_k$ indique la partie de poids k de $[M]$. On obtient alors que $[H^{s-2}(\mathcal{P}(t-1, \pi_o))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est égal à $e_{\pi_o} gm(\Pi^{\infty, o})$ fois

$$[\overleftarrow{s-2}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{1/2\}}} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}} \times [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{s+t-2}{2}\}} - R_{\pi_o}(s, t)(0, t-2) \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}}.$$

Comme d'après V.1.2, $J_{P_{g,t(s-1)g}}\left(\overrightarrow{[s-2]}_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{1/2\}}}\right) = [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{s-t-2}{2}\}} \otimes ?$, par égalité des supports cuspidaux, on en déduit que la somme des constituants de la forme $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}} \otimes ?$ de

$$J_{P_{t_g,t_s g}}\left(\overrightarrow{[s-2]}_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{1/2\}}} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}} \times [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{s+t-2}{2}\}}\right)$$

est égale à $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{-\frac{s-1}{2}\}} \otimes [\overrightarrow{[s-2]}_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_o\{1/2\}}}]$. Le même raisonnement appliqué à $R_{\pi_o}(s,t)(0,t-2) \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_o\{-\frac{s-2}{2}\}}$ donne exactement le même résultat, ce qui prouve l'affirmation. \square

Remarque : on pourrait être plus précis et donner explicitement le calcul de chacun des groupes de cohomologie; signalons simplement les corollaires suivant qui seront utilisés dans la suite.

COROLLAIRE V.2.8. – Soit Π une représentation irréductible automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$; sa composante locale Π_o est de la forme

$$[\overrightarrow{[s-1]}]_{[\overleftarrow{t_1-1}]_{\pi_{o,1}\{\lambda_1\}}} \times \cdots \times [\overrightarrow{[s-1]}]_{[\overleftarrow{t_u-1}]_{\pi_{o,u}\{\lambda_u\}}}$$

où les $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\lambda_i \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$. On a alors les résultats suivants:

- (i) $\lambda_i = 0$;
- (ii) si π_o est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $GL_g(F_o)$ qui n'est isomorphe à aucun des $\pi_{o,i} \otimes \chi$, alors $[H^i(\mathcal{P}(t, \pi_o))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul pour tout i et pour tout $1 \leq t \leq d/g$;
- (iii) pour tout $i = 1, \dots, u$, $[H^j(\mathcal{P}(t, \pi_{o,i}))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul pour tout $j > s-1$ et pour tout $1 \leq t \leq d/g_i$ et pour $j = s-1$ avec $1 \leq t \leq d/g_i$, $[H^{s-1}(\mathcal{P}(t, \pi_{o,i}))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ contient $e_{\pi_{o,i}} m(\Pi^{\infty,o}) \Pi_o \otimes \sum_{\substack{k/\pi_{o,k} \sim^i \pi_{o,i} \\ t_k = t}} \mathcal{L}(\pi_{o,k}) \Pi_{p,0}$;
- (iv) pour tout π_o et pour tout $1 \leq t \leq d/g$, $[H^{s-2}(\mathcal{P}(t, \pi_o))]\{\Pi^{\infty,o}\}$, en tant que $GL_d(F_o)$ -module, ne contient jamais Π_o .

Remarque : le point (i) du corollaire précédent correspond à la conjecture de Ramanujan-Peterson. On notera aussi que pour une telle représentation, on a $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$.

COROLLAIRE V.2.9. – Si $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{t_1}]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u}]_{\pi_{o,u}}$ est tempérée, où les $\pi_{o,i}$ pour $1 \leq i \leq u$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (t_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les t_i ont la même parité tout en étant distincts. Alors les $[H^i(j_{!*}^{\geq t_g} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ sont nuls pour $i \neq 0$ ou

- ▷ si π_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de l'un des $\pi_{o,i}$;
- ▷ si $t \neq t_i$ pour l'un des i tel que $\pi_o \sim \pi_{o,i}$;

Quitte à réarranger l'ordre des termes on suppose que $\pi_o \sim \pi_{o,1} \simeq \dots \simeq \pi_{o,r}$ et $\pi_o \not\sim \pi_{o,i}$ pour $r < i \leq u$, on a alors

$$[H^0(j_{!,*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,o} \} \simeq rm(\Pi) \Pi_t \times [\overleftarrow{t_2}]_{\pi_{o,2}} \times \dots \times [\overleftarrow{t_u}]_{\pi_{o,u}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}.$$

Remarque : il y a au plus un t de parité fixée tel que $[H^*(j_{!,*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,o} \}$ soit non nul.

Preuve. – Le résultat découle directement des calculs de la preuve du corollaire IV.7.1.1, en remarquant qu'il n'y a pas de "mélange", i.e. que les différents $\pi_{o,i}$ n'interfèrent pas entre eux dans les calculs. □

COROLLAIRE V.2.10. – Si Π_o n'est pas tempéré de la forme $[\overrightarrow{s_1}]_{\pi_{o,1}} \times \dots \times [\overrightarrow{s_u}]_{\pi_{o,u}}$, où pour tout $1 \leq i \leq u$, $s_i \equiv s_1 \pmod 2$ et le $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (s_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les s_i sont distincts. Alors $[H^i(j_{!,*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,o} \}$ est nul si:

▷ $i \equiv s_1 \pmod 2$;

π_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de l'un des $\pi_{o,i}$;

▷ si $t > 1 + \max_{1 \leq i \leq u} (s_i)$.

Quitte à réarranger l'ordre des termes on suppose que $\pi_o \sim \pi_{o,1} \simeq \dots \simeq \pi_{o,r}$ et $\pi_o \not\sim \pi_{o,i}$ pour $r < i < u$, on a alors dans $\text{Groth}(GL_d(F_o) \times \mathbb{Z})$, pour $|i| \leq s_1 - t$ et $i \equiv s_1 - t \pmod 2$

$$H^i(j_{!,*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)) [\Pi^{\infty,o}] \simeq rm(\Pi) (\Pi_t \overrightarrow{\times} [\frac{1}{2}(s-t-i)-1]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\frac{1}{2}(s-t+i)-1]_{\pi_o} \times [\overleftarrow{t_2}]_{\pi_{o,2}} \times \dots \times [\overleftarrow{t_u}]_{\pi_{o,u}} \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}((s_1-t)g+i)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

Preuve. – Le résultat découle directement des calculs de la preuve de la proposition IV.8.2.3, en remarquant qu'il n'y a pas de "mélange". □

V.3. Correspondances de Jacquet-Langlands globales

PROPOSITION V.3.1. – Il existe une bijection dite de Jacquet-Langlands entre:

▷ les représentations irréductibles automorphes $\overline{\Pi}$ de $\overline{D}_{\mathbb{A}}^{\times}$;

▷ les représentations irréductibles automorphes Π de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes:

- (a) Π_o est une représentation essentiellement de carré intégrable, i.e. $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}$ pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_o)$ avec $d = sg$;
- (b) $\Pi_o \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$,

compatible aux correspondances de Jacquet-Langlands locales, soit

$$\overline{\Pi}^{\infty,o} \simeq \Pi^{\infty,o} \text{ et } \Pi_o \simeq \text{JL}(\overline{\Pi}_o) \text{ dans le cas (a) et}$$

$$\Pi_o \simeq \iota(\text{JL}(\overline{\Pi}_o)) \text{ dans le cas (b),}$$

où ι désigne l'involution de Zelevinsky. En outre on a

$$m(\Pi) = m(\overline{\Pi}).$$

Par ailleurs soit Π^o une représentation de $(D_{\mathbb{A}}^o)^\times$ telle que pour toute représentation Π_o de $\text{GL}_d(F_o)$ avec $\Pi := \Pi^o \Pi_o$ automorphe, Π_o n'est pas de la forme $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}$ ou $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$ pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$ avec $d = sg$. Alors il n'existe pas de représentation irréductible automorphe $\overline{\Pi}$ de $\overline{D}_{\mathbb{A}}^\times$ telle que $\overline{\Pi}^{\infty,o} \simeq \Pi^{\infty,o}$.

Preuve. – Les situations (a) et (b) sont données respectivement au corollaire IV.7.1.5 et IV.8.2.4. Supposons alors que Π_o ne soit ni de la forme $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}$ ni $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$ pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation cuspidale π_o de $\text{GL}_g(F_o)$. La proposition IV.7.1.2 donne comme précédemment

$$[H^0(\mathcal{F}(s, \pi_o))] \{ \Pi^{\infty,o} \} = \left(\sum_{\substack{\overline{\Pi} \in \mathfrak{U}_{\overline{D}}(\Pi^{\infty,o}) \\ \overline{\Pi}_o \simeq \pi_o^\vee [s]_D}} m(\overline{\Pi}) \right) \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & [H^*(j_{\mathcal{J},1*}^{\geq (s-1)g} HT(s-1, \Pi_{s-1}))] \{ \Pi^{\infty,o} \} \\ &= \left(-m(\Pi) \Xi^{-\frac{1}{2}g} \text{Ind}_{P_{d-g,d}(F_o)}^{\text{GL}_d(F_o)} \Pi_{s-1} \otimes_{\delta} \text{red}_{\pi_o[s-1]_D}(\Pi_o) \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{\overline{\Pi} \in \mathfrak{U}_{\overline{D}}(\Pi^{\infty,o})} m(\overline{\Pi}) \right) \Pi_{s-1} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_o} \otimes \Xi^{-\frac{1}{2}} \right) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1} \end{aligned}$$

où la signification de \otimes_{δ} est rappelée dans la preuve du corollaire IV.7.1.1. Supposons que $\mathfrak{U}_{\overline{D}}(\Pi^{\infty,o})$ soit non vide et soit π_o tel que $\overline{\Pi}_o \simeq \pi_o^\vee [s]_D$. La condition de pureté et la compatibilité à la dualité de Verdier dans le calcul précédent, imposent alors que $\text{red}_{\pi_o[s-1]_D}(\Pi_o)$ est soit égal à $\Xi^{\frac{1}{2}(g-1)} \otimes [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}(s-1)\}}$ soit à $\Xi^{\frac{1}{2}(g+1)} \otimes [\overrightarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}(1-s)\}}$. En particulier on en déduit que $\mathcal{J}_{N(s-1)g,g}(\Pi_o)$ contient soit $[\overleftarrow{s-2}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}\}} \otimes [\overleftarrow{0}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}(s-1)\}}$ soit $[\overrightarrow{s-2}]_{\pi_o\{-\frac{1}{2}\}} \otimes [\overrightarrow{0}]_{\pi_o\{\frac{1}{2}(s-1)\}}$ de sorte que le support cuspidal de Π_o est un segment et donc d'après V.4.2, Π_o est soit isomorphe à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_o}$ soit à $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$ d'où la contradiction. \square

V.4. Groupes de cohomologie des variétés de Drinfeld

PROPOSITION V.4.1. – *Soit Π une représentation automorphe irréductible cohomologique.*

- (i) *Si $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{t}_1]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t}_u]_{\pi_{o,u}}$ est tempérée, où les $\pi_{o,i}$ pour $1 \leq i \leq u$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (t_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les t_i ont la même parité tout en étant distincts, alors dans $\mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z})$, $H^i(\Psi_{\mathcal{J}})[\Pi^{\infty,o}]$ est nul pour $i \neq 0$ et pour $i = 0$ on a*

$$[H^0(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty,o}\} \simeq m(\Pi)\Pi_o \otimes [\mathcal{L}(\Pi_o)].$$

- (ii) *Si Π_o n'est pas tempérée de la forme $[\overrightarrow{s}_1]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s}_u]_{\pi_{o,u}}$, où pour tout $1 \leq i \leq u$, $s_i \equiv s_1 \pmod{2}$ et le $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (s_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les s_i sont distincts, alors $[H^i(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul si $|i| > \max_{1 \leq i \leq u} (s_i)$ ou si $i \equiv s_1 \pmod{2}$. Sinon on a dans $\mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_d(F_o) \times \mathbb{Z})$*

$$[H^i(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty,o}\} = m(\Pi)\Pi_o \otimes \bigoplus_{\substack{j, |i| \leq s_j \\ i \equiv s_j \pmod{2}}} \mathcal{L}(\pi_{o,j})(-\frac{1}{2}i).$$

Preuve. – (i) Le résultat découle directement du corollaire V.2.9 et de la description des $\mathrm{gr}_k^M(\Psi_{\mathcal{J}})$, à travers la suite spectrale de monodromie.

(ii) On raisonne comme dans la preuve de la proposition IV.8.2.5. D'après V.2.10 et la description des $\mathrm{gr}_k^M(\Psi_{\mathcal{J}})$, on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq u$, $[E_{\infty}^{0,1-s_j}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ contient $m(\Pi)\Pi_o \otimes \mathcal{L}(\pi_{o,j})(\frac{1}{2}s_j)$, de sorte que d'après le théorème de Lefschetz difficile, pour tout i , $[H^i(\Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ contient $m(\Pi)\Pi_o \otimes \bigoplus_{\substack{j, |i| \leq s_j \\ i \equiv s_j \pmod{2}}} \mathcal{L}(\pi_{o,j})(-\frac{1}{2}i)$, et on conclut comme dans la fin de la preuve de IV.8.2.5. □

COROLLAIRE V.4.2. – *Soit Π une représentation irréductible automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ cohomologique et supposons qu'il existe une place o_0 telle que $G_{o_0}^{\times} \simeq \mathrm{GL}_d(F_{o_0})$ et Π_{o_0} tempérée (resp. $\Pi_{o_0} \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_{o_0}}$ pour π_{o_0} une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_g(F_{o_0})$ avec $d = sg$). On en déduit alors que pour toute place o non ramifiée Π_o est tempérée et (resp. $n_i = 0$ pour $i \neq s$ et $\Pi_o \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_o}$ pour π_o une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_g(F_o)$).*

Preuve. – Le résultat découle directement de la proposition précédente et des isomorphismes $H_{\eta}^{d-1+i} \simeq H^i(\Psi_{\mathcal{J}}) \simeq H^i(\Psi_{\mathcal{J},v_0})$ donnés par le changement de base propre. □

V.5. Irréductibilité des variétés d'Igusa

Nous allons calculer ici les groupes de cohomologie des $j_1^{\geq tg} HT(t, \pi_o)$. Dans un premier temps on considère une représentation irréductible automorphe Π de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ telle que $\Pi_o \simeq [\overline{s-1}]_{\pi_o}$, pour π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_o)$ et telle que si Π' est automorphe irréductible avec $(\Pi')^{\infty,o} \simeq \Pi^{\infty,o}$ alors $\Pi' \simeq \Pi$. Il s'agit alors de reprendre la preuve du lemme IV.8.3.2 dans le cas général.

PROPOSITION V.5.1. – *Soient $1 \leq tg' \leq d$ et π'_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_o)$.*

▷ *Si $g' \neq g$ ou si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o , alors les $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ sont nuls pour tout i .*

▷ *Pour $g' = g$ et $\pi'_o = \pi_o$, pour tout $i \neq s - t$, $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul et pour $i = s - t$*

$$[H^{s-t}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\} = [\Pi_t \overleftarrow{\times} [\overline{s-t-1}]_{\pi_o}] \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1})$$

en tant que représentation de $GL_d(F_o) \times \mathbb{Z}$.

Remarque : de manière équivalente, $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} \mathcal{F}(t, \pi'_o)_1)]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul si π'_o n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_o ou si $i \neq (s-t)(g+1)$, et on a

$$[H^{(s-t)(g+1)}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} \mathcal{F}(t, \pi_o)_1)]\{\Pi^{\infty,o}\} = [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_o\{t(g+1)/2\}} \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(s-t)(g+1)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

Preuve. – On considère comme précédemment la filtration par les poids du W_o -faisceaux pervers de Hecke $j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t)$ ainsi que la suite spectrale associée

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(\mathrm{gr}_{-i}^W(t, \pi'_o, t)) \implies H^{i+j}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg'} HT(\pi'_o, \Pi_t)).$$

D'après IV.8.2.3, $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est non nul si et seulement si π'_o est dans la classe d'équivalence inertielle de π_o et (i, j) est de la forme $(a, t - s + 2r)$ avec $0 \leq a \leq s - t - r \leq s - t$ auquel cas on a

(V.5.0.27)

$$\frac{[E_1^{a,t-s+2r}]\{\Pi^{\infty,o}\}}{m(\Pi)} = [(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overline{s-t-1-r-a}]_{\pi_o} \overleftarrow{\times} [\overline{r-1}]_{\pi_o}) \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(2r-s+t)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

On observe en particulier que pour tout (i, j) tels que $[E_1^{i,j}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est non nul, il est alors pur de poids j de sorte qu'en particulier, la suite spectrale dégénère en E_2 . Il s'agit alors de montrer que pour tout $(i, j) = (a, t - s + 2r) \neq (0, s - t)$, $[E_2^{i,j}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul.

Pour cela, en raisonnant par récurrence sur t , on suppose la conclusion de la proposition vérifiée pour tout $t' < t$; pour $t = 1$ l'hypothèse de récurrence est vide. Soit alors $t - s \leq i$ minimal tel que $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))\{\Pi^{\infty, o}\}]$ soit non nul de sorte que sa partie de poids minimale non nulle est, avec $i = t - s + 2r + a$, égale à

$$m(\Pi) [(\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o}] \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(2r-s+t)} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

LEMME V.5.2. – *Sous les hypothèses ci-avant, on a pour $g > 1$*

$$\begin{aligned} & [H^{d-tg+i}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)})\{\Pi^{\infty, o}\}] \\ & = m(\Pi) [([\overrightarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o}] \\ & \quad \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(2r-s+t)). \end{aligned}$$

Pour $g = 1$, il contient

$$m(\Pi) [([\overrightarrow{t-1}, \overleftarrow{a+1}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o}] \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(2r-s+t)).$$

Preuve. – On considère la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=p}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)}) \implies H^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+t(g-1)}).$$

D'après IV.7.1.1, $[E_1^{p,q}\{\Pi^{\infty, o}\}]$ est nul si p n'est pas de la forme $t'g$ avec $t'(g-1) \leq t(g-1) \leq t'g-1$. En particulier pour $g > 1$, on a $t' \leq t$. En outre pour un tel t' , d'après IV.2.2.10, on a

$$((\Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+t(g-1)})_{|\overline{M}_{\mathcal{J}}^{=t'g}})^{e_{\pi_o}} \simeq \mathcal{F}(t', \pi_o) \otimes \Psi_{F_o, t'g}^{t(g-1)}(\pi_o[t']_D),$$

de sorte que pour $p = t'g < tg$, $[E_1^{p,q}\{\Pi^{\infty, o}\}]$ est nul pour $p+q \neq (s-t')(g+1) > (s-t)g+i$ pour tout $i \leq s-t$. On en déduit donc que $[E_{\infty}^{(s-t)g+i}\{\Pi^{\infty, o}\}] = [E_1^{tg, (s-2t)g+i}\{\Pi^{\infty, o}\}]$ qui est donc isomorphe à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)m(\Pi) [([\overrightarrow{t-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o}] \otimes \mathcal{L}(\pi_o)(-\frac{1}{2}(2r-s+t))$$

d'après IV.8.3.25, d'où le résultat.

Pour $g = 1$, on a comme précédemment $[E_1^{p,q}\{\Pi^{\infty, o}\}] = 0$ pour $p+q = (s-t)g+i-1$, reste alors à regarder le cas $p+q = (s-t)g+i+1$: la partie de poids $t-s+2r$ est alors, d'après IV.8.3.25, à prendre parmi les constituants de

$$([\overrightarrow{t'-1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a+t-t'}, \overrightarrow{s-2-r-a-t'}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o},$$

de sorte que $([\overrightarrow{t-1}, \overleftarrow{a+1}, \overrightarrow{s-t-1-r-a}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_o}$ n'en est jamais un constituant, d'où le résultat. \square

LEMME V.5.3. – *Avec les hypothèses précédentes $[H^i(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+j})\{\Pi^{\infty, o}\}]$ est mixte de poids strictement supérieur à $s-2t+1$, pour tout $j < t(g-1)$.*

Preuve. – On raisonne comme précédemment via la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}^{-p}, \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+t(g-1)}) \implies H^{p+q}(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+t(g-1)}).$$

Pour que $[E_1^{p,q}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ soit non nulle il faut, car $j < tg - 1$, que $t' < t$. Le résultat découle alors du fait que, d'après V.5.0.27, la propriété est vérifiée pour les termes initiaux d'après l'hypothèse de récurrence sur les $t' < t$. \square

LEMME V.5.4. – *Avec les hypothèses précédentes, pour $j = t(g - 1) + \alpha$ avec $\alpha > 0$, les constituants de poids $1 - s + 2r$ des $[H^i(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ sont à prendre parmi ceux de*

$$([\overleftarrow{\delta}, \overleftarrow{t' - 1 - \delta}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a' - 1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s - t' - 1 - r' - a'}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{r' - 1}]_{\pi_o}$$

avec $t' \geq t$, $\delta = \alpha - (t' - t)(g - 1)$ et $r' = r - \delta$.

Preuve. – La suite spectrale de stratification nous ramène à prouver le résultat pour les $[H^i(\overline{X}_{\mathcal{J}}^{-p}, \Psi_{\mathcal{J}, \pi_o}^{1-d+j})]\{\Pi^{\infty,o}\}$ avec $p = t'g$. Comme nous l'avons remarqué dans la preuve du lemme précédent, pour $t' < t$, d'après l'hypothèse de récurrence, il n'y a pas de parties de poids $1 - s + 2r \leq s - 2t + 1$. Pour $t' \geq t$ le résultat découle alors de V.5.0.27. \square

Fin de la preuve de la proposition V.5.1. – On considère la suite spectrale des cycles évanescents:

$$E_2^{p,q} = H^p(\overline{M}_{\mathcal{J}}, \Psi_{\mathcal{J}}^{1-d+q}) \implies H_{\eta_o, \xi}^{p+q}.$$

Pour $0 \leq r < s - t$ $[\overleftarrow{t+r-1}, \overleftarrow{a+1}, \overleftarrow{s-t-r-a-1}]_{\pi_o}$, d'après V.5.2, est un constituant de la partie de poids $1 - s + 2r < s - 1 + 2t$ de $[E_2^{d-tg+t-s+2r+a,t(g-1)}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ alors que d'après V.5.3 il n'est pas un constituant de $[E_2^{p,q}]\{\Pi^{\infty,o}\}$ pour tout $q < t(g - 1)$. Par ailleurs comme d'après IV.8.2.5, il n'est pas un constituant de l'aboutissement, on en déduit, d'après V.5.4, qu'il existe $t' \geq t$ tel qu'il soit un constituant de

$$([\overleftarrow{\delta}, \overleftarrow{t' - 1 - \delta}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a' - 1}]_{\pi_o} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s - t' - 1 - r' - a'}]_{\pi_o}) \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{r' - 1}]_{\pi_o}$$

avec $t' \geq t$, $\delta = \alpha - (t' - t)(g - 1)$ et $r' = r - \delta$. En reprenant les notations de §II.1, les constituants de ces derniers sont de la forme $\Gamma^{s-1} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5})$ avec $(a_1, a_2) = (r' - 1, \delta + 1)$ ou (r', δ) de sorte que si l'on veut qu'il contienne $[\overleftarrow{t+r-2}, \overleftarrow{a+1}, \overleftarrow{s-t-r-a-1}]_{\pi_o}$, il faut que $\delta = 0$ et $a_2 = 0$. On a alors $(a_1, a_2, a_3) = (r', 0, t' - 1)$ ou $(r', 0, t')$; il faut alors $r' + t' - 1 \leq t + r - 1$ et donc $t' \leq t$ ce qui impose $t' = t$ et donc $\alpha = \delta + (t' - t)(g - 1) = 0$ ce qui n'est pas par hypothèse, d'où le résultat. \square

PROPOSITION V.5.5. – *Soit Π une représentation automorphe irréductible cohomologique.*

- (i) Si $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{t}_1]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t}_u]_{\pi_{o,u}}$ est tempérée, où les $\pi_{o,i}$ pour $1 \leq i \leq u$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (t_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les t_i ont la même parité tout en étant distincts, alors $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul pour $i \neq 0$ et pour $i = 0$ on a

$$\frac{[H^0(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}}{m(\Pi)} = \sum_{\substack{\pi_{o,i} \sim \pi_o \\ t_i \geq t}} (\Pi_t \times [\overleftarrow{t}_i - t]_{\pi_o}) \times [\overleftarrow{t}_1]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times \overbrace{[\overleftarrow{t}_i]_{\pi_{o,i}}}^{\vee} \times \cdots \times [\overleftarrow{t}_u]_{\pi_{o,u}} \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(t_i+1-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

- (ii) Si Π_o n'est pas tempérée de la forme $[\overrightarrow{s}_1]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s}_u]_{\pi_{o,u}}$, où pour tout $1 \leq i \leq u$, $s_i \equiv s_1 \pmod 2$ et le $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (s_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les s_i sont distincts, alors $[H^i(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul si π_o n'est pas inertiuellement équivalent à l'un des $\pi_{o,j}$ avec $i = s_j + 1 - t \geq 0$ auquel cas pour $\pi_o = \pi_{o,1}$ et avec r le nombre de i tels que $\pi_{o,i} \simeq \pi_o$, on a

$$\frac{[H^{s_1+1-t}(j_{\mathcal{J},!}^{\geq tg} HT(\pi_{o,1}, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty,o}\}}{m(\Pi)} = r \cdot (\Pi_t \times [\overleftarrow{s}_j - t]_{\pi_{o,1}}) \times [\overrightarrow{s}_2]_{\pi_{o,2}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s}_u]_{\pi_{o,u}} \otimes (\Xi^{-\frac{1}{2}(s_j+1-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

Preuve. – (i) Le résultat découle directement de V.2.9 via la suite spectrale des poids comme dans la preuve de IV.8.1.2.

(ii) On reprend la preuve de V.5.1 en utilisant V.2.10: celle-ci est strictement identique car les différents $\pi_{o,i}$ n'interagissent pas. □

COROLLAIRE V.5.6. – Pour tout $0 < h < d$, les variétés d'Igusa de première espèce $I_{U^p,m}^{(h)}$, sont géométriquement connexes. Plus généralement $J_{U^p,m}^{(h)} \rightarrow J_{U^p,m}^{(h),1}$ est un $\mathcal{D}_{o,d-h,m}^1$ -torseur géométriquement irréductible au-dessus de toute composante géométriquement connexe et

$$J_{U^p,m}^{(h),1}(\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq I_{U^p,m}^{(h)}(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathcal{D}_{o,d-h,m} / \mathcal{D}_{o,d-h,m}^1$$

où l'action est induite par l'action du groupe de Galois $\mathcal{D}_{o,d-h,m}$ du revêtement $J_{U^p,m}^{(h)} \rightarrow I_{U^p,m}^{(h)}$.

Preuve. – Le résultat découle classiquement du fait suivant: pour toute représentation irréductible τ_o de $D_{o,h}^\times$, $H^0(\overline{M}_{\mathcal{J}} \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p, Rj_*^{\geq h} \mathcal{G}_{\tau_o})$ est nul sauf si τ_o est un caractère

χ_o auquel cas on obtient $\chi_o \otimes \Xi^0$ en tant que représentation de $GL_{d-h}(F_o) \times \mathbb{Z}$. Or le résultat découle de V.5.5 par dualité de Poincaré. \square

V.6. Semi-simplicité de la cohomologie sous l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$

Une formulation équivalente de la proposition V.5.5 est la suivante: soit Π une représentation automorphe irréductible cohomologique.

- (i) Si $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{t_1}]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u}]_{\pi_{o,u}}$ est tempérée, où les $\pi_{o,i}$ pour $1 \leq i \leq u$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (t_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les t_i ont la même parité tout en étant distincts. Alors $[H_c^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul pour $i \neq d - tg$ et pour $i = d - tg$ on a

$$\frac{[H_c^{d-tg}(\mathcal{F}(\pi_o, t))]\{\Pi^{\infty,o}\}}{\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)m(\Pi)} = \sum_{\substack{\pi_{o,i} \sim \pi_o \\ t_i \geq t}} [\overleftarrow{t_i - t}]_{\pi_{o,\{t(g-1)/2\}}} \times [\overleftarrow{t_1}]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times \overbrace{[\overleftarrow{t_i}]_{\pi_{o,i}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u}]_{\pi_{o,u}}}^{\vee} \otimes (\Xi^{\frac{1}{2}(t_i+1-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1}).$$

- (ii) Si Π_o n'est pas tempéré de la forme $[\overrightarrow{s_1}]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s_u}]_{\pi_{o,u}}$, où pour tout $1 \leq i \leq u$, $s_i \equiv s_1 \pmod{2}$ et le $\pi_{o,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_o)$ avec $\sum_i (s_i + 1)g_i = d$, non isomorphes deux à deux si les s_i sont distincts. Alors $[H_c^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))]\{\Pi^{\infty,o}\}$ est nul si π_o n'est pas inertiuellement équivalent à l'un des $\pi_{o,j}$ avec $i = d - tg + s_j + 1 - t \geq 0$ auquel cas pour $\pi_o = \pi_{o,1}$ on a

$$\frac{[H_c^{d-tg+s_1+1-t}(\mathcal{F}(\pi_{o,1}, t))]\{\Pi^{\infty,o}\}}{rm(\Pi)} = [\overleftarrow{s_j - t}]_{\pi_{o,1}\{\frac{1}{2}t(g+1)\}} \times [\overrightarrow{s_2}]_{\pi_{o,2}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s_u}]_{\pi_{o,u}} \otimes (\Xi^{-\frac{1}{2}(s_j+1-t)} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_o)} \chi^{-1})$$

où r est le nombre de i tels que $\pi_{o,i} \simeq \pi_o$.

Il faut comprendre cet énoncé dans le groupe de Grothendieck correspondant. L'objet de ce paragraphe est de prouver que les $H_c^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))$ sont semi-simples soit l'énoncé suivant.

PROPOSITION V.6.1. – *Au regard de l'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$, la cohomologie de la variété de Drinfeld est semi-simple, i.e. la Frobenius semi-simplification de $H_{\eta_o}^i$ est égale à $\bigoplus_{\Pi} m(\Pi)\Pi^{\infty} \otimes \mathcal{L}(\Pi_o)$ où Π décrit les représentations irréductibles automorphes de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$.*

Preuve. – Soient Π et Π' des représentations cohomologiques de $G(\mathbb{A})$ telles que $[H^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))]\{\Pi^\infty\} \neq 0$ et $[H^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))]\{(\Pi')^\infty\} \neq 0$.

On rappelle que si $\text{Ext}_{(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times}^1(\Pi^\infty, \Pi'^\infty)$ est non nul, alors il existe une place o telle que pour tout $o' \neq \infty, o$, $\Pi_{o'} \simeq \Pi'_{o'}$ et $\text{Ext}_{G(F_o)}^1(\Pi_o, \Pi'_o) \neq 0$. On en déduit alors $\Pi_o \simeq \Pi'_o$ et comme par hypothèse D_o^\times est soit isomorphe à $\text{GL}_n(F_o)$ soit à $D_{o,d}^\times$, pour que $\text{Ext}_{G(F_o)}^1(\Pi_o, \Pi'_o)$ puisse être non nul, on doit être dans la première situation.

Dans la situation (i) avec $\Pi_o \simeq [\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{o,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{o,u}}$, on a alors

$$\begin{aligned} & \text{Ext}_{\text{GL}_n(F_o)}^1(\Pi_o, \Pi_o) \\ & \simeq \text{Ext}_{\text{GL}_{t_1 g_1}(F_o) \times \cdots \times \text{GL}_{t_u g_u}(F_o)}^1(J_{N_{t_1 g_1, \dots, d}(F_o)}(\Pi_o), [\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{o,1}} \otimes \cdots \otimes [\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{o,u}}). \end{aligned}$$

En séparant les supports cuspidaux et un utilisant le fait que les $\pi_{o,i}$ ne sont pas isomorphes entre eux si les t_i ont même parité, on en déduit que ce dernier groupe d'extension est isomorphe à

$$\text{Ext}_{\text{GL}_{t_1 g_1}(F_o) \times \cdots \times \text{GL}_{t_u g_u}(F_o)}^1([\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{o,1}} \otimes \cdots \otimes [\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{o,u}}, [\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{o,1}} \otimes \cdots \otimes [\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{o,u}}),$$

de sorte qu'il existe $1 \leq i \leq u$ tel que cette extension soit donnée par un élément non nul de $\text{Ext}_{\text{GL}_{t_i g_i}(F_o)}^1([\overleftarrow{t_i - 1}]_{\pi_{o,i}}, [\overleftarrow{t_i - 1}]_{\pi_{o,i}})$. On sait par ailleurs que $\text{Ext}_{\text{GL}_{t_g}(F_o)}^1([\overleftarrow{t}]_{\pi_o}, [\overleftarrow{t}]_{\pi_o})$ est trivial pour $t \neq 0$. On rappelle aussi que $[H_{\eta_o}^i]\{\Pi^{\infty, o}\}$ est égal à $m(\Pi)\Pi_o \otimes L(\Pi)$ où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes et où $L(\Pi)$ est une représentation galoisienne globale de dimension d . Quand on restreint $L(\Pi)$ au groupe de Weil local en o , on obtient $\bigoplus_{i=1}^u \rho_i$ où $\rho_i = \mathcal{L}([\overleftarrow{t_i - 1}]_{\pi_{o,i}})$ est indécomposable: en particulier d'après (i), dans la décomposition en indécomposable de $L(\Pi) = \bigoplus_i \rho(\Pi)_i$, les homomorphismes entre deux facteurs sont nuls. On en déduit alors que si H_η^{d-1} définit un élément non trivial de $\text{Ext}^1(\Pi_o, \Pi_o)$ associé à l'indice i_0 , alors la partie ρ_{i_0} isotypique de $H_{\eta, |W_o}^{d-1}$ aussi. Or d'après ce qui précède, cette dernière est isomorphe à l'induite de $P_{t_{i_0} g_{i_0}, d}(F_o)$ à $\text{GL}_d(F_o)$ de $H^0(j_{!*}^{\geq t_{i_0} g} \mathcal{F}(t_{i_0}, \pi_{o, i_0})) \otimes [\overleftarrow{t_{i_0} - 1}]_{\pi_{o, i_0}}$: dans ce dernier les extensions à la place o ne peuvent provenir que du facteur $\text{GL}_{d-t_{i_0} g}(F_o)$, d'où la contradiction.

Dans la situation (ii), on se ramène au cas précédent en remarquant que pour $t > 0$, $\text{Ext}_{\text{GL}_{t_g}(F_o)}^1([\overrightarrow{t}]_{\pi_o}, [\overrightarrow{t}]_{\pi_o})$ est nul et que par définition, $[\overrightarrow{0}]_{\pi_o} = [\overleftarrow{0}]_{\pi_o}$. \square

Remarque : on s'attend à ce que $m(\Pi) = 1$ de sorte que le résultat serait direct. Par ailleurs s'il existe une place telle que Π_o est de carré intégrable alors le résultat découle du fait que la partie correspondante dans H_η^{d-1} est donnée par les points supersinguliers et on conclut via la formule IV.7.1.19 et le fait que $\mathcal{C}^\infty(\overline{D}(F)^\times \backslash \overline{D}(F)^\times)$ est semi-simple.

REMARQUE V.6.2. – En ce qui concerne l'action de W_o , en l'état, on ne peut pas affirmer que les différents gradués de la filtration de monodromie sont en somme directe.

COROLLAIRE V.6.3. – Soit $\tau_o = \pi_o[t]_D$ une représentation irréductible de $D_{o,tg}^\times$ pour $1 \leq tg \leq d$. En tant que $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ -module, on a

$$H_c^i(\mathcal{F}(\pi_o, t)) \simeq \bigoplus_{\Pi} \Pi^{\infty, o} \otimes [H_c^i(\mathcal{F}(\pi_o, t))] \{\Pi^{\infty, o}\},$$

$$H^i(j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(\pi_o, t)) \simeq \bigoplus_{\Pi} \Pi^{\infty, o} \otimes [H^i(j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(\pi_o, t))] \{\Pi^{\infty, o}\}.$$

Preuve. – Le cas de l'extension intermédiaire a été prouvé ci-dessus. En ce qui concerne l'extension par zéro on considère la suite spectrale des poids

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(j_{!*}^{\geq (t+p)g} HT(\pi_o, \Pi_t \times \overleftarrow{[p-1]}_{\pi_o})) \implies H^{p+q}(j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_o, \Pi_t)).$$

On vient de voir que les termes initiaux sont semi-simples et d'après les calculs du § V.5, il n'y a qu'un seul terme $E_\infty^{p,q}$ qui contribue à l'aboutissement, d'où le résultat. □

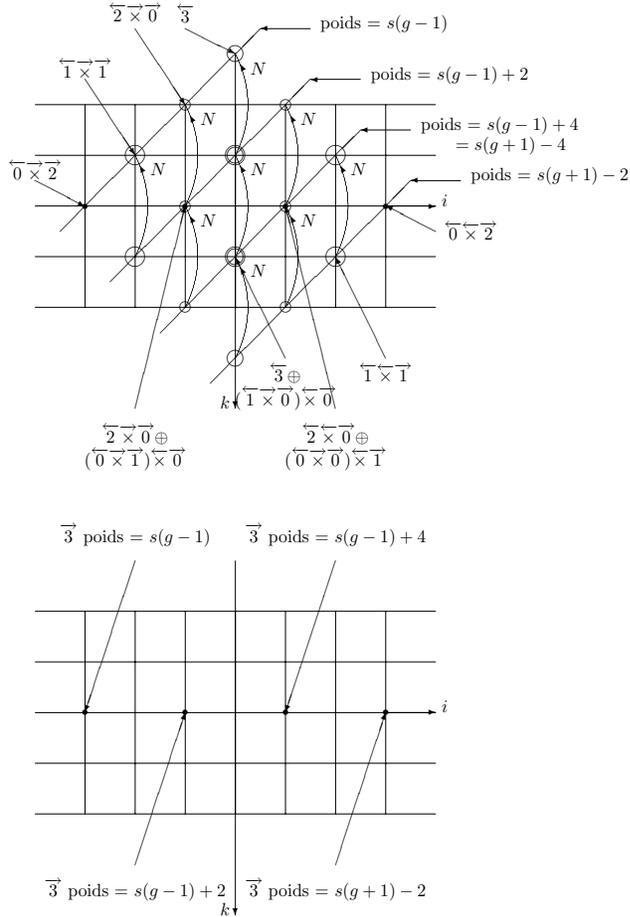


FIGURE 2. $[H^i(\text{gr}_k^M(\Psi_{\mathcal{J}}))]\{\Pi^{\infty, o}\}$ pour $\Pi_o \simeq \text{Speh}_4(\pi_o)$ avec π_o une représentation cuspidale de $\text{GL}_g(F_o)$. Le dessin du bas représente le terme E_2 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

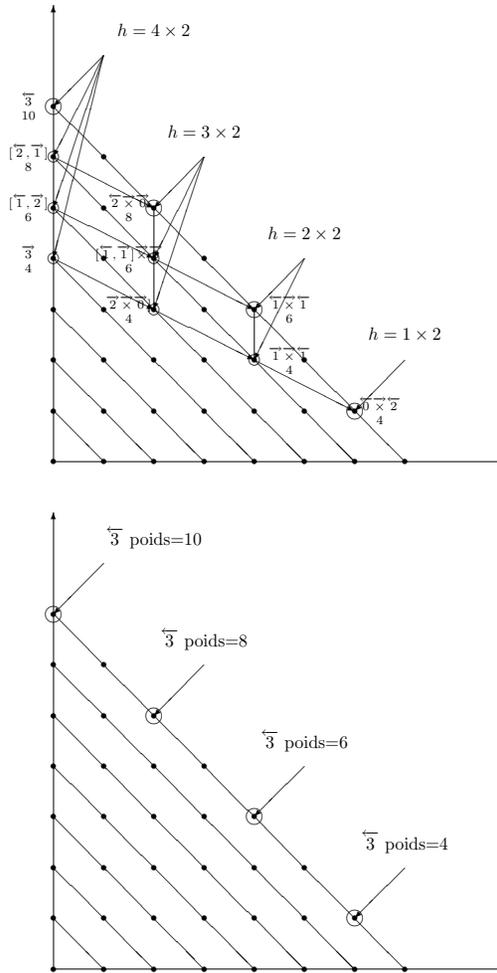


FIGURE 3. $s = 4, g = 2; E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,0}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents: cas $\Pi_o = \text{St}_4(\pi_o)$. Le dessin du bas représente le terme E_3 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

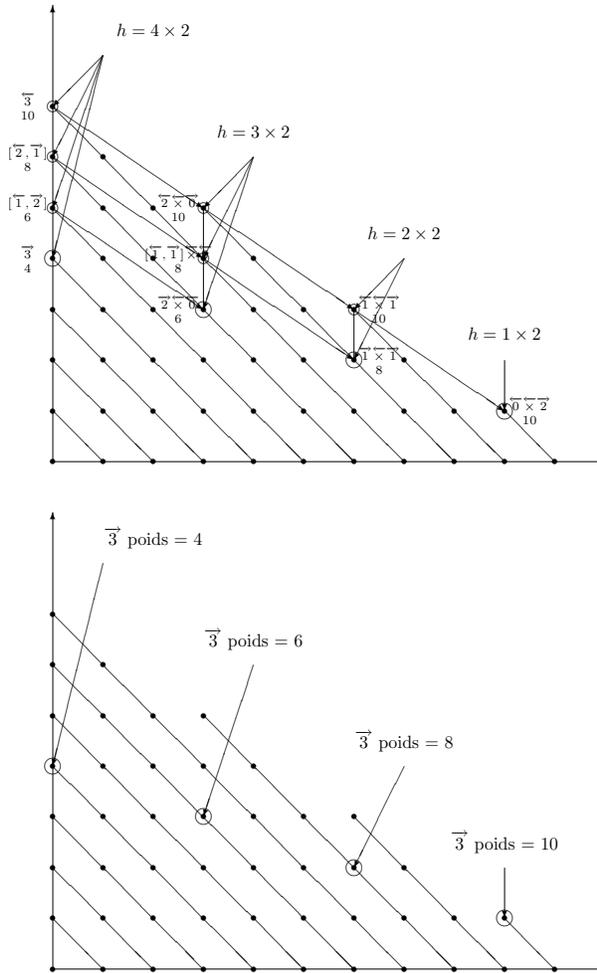


FIGURE 4. $s = 4, g = 2: E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,0}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents: cas $\Pi_o = \text{Speh}_s(\pi_o)$. Le dessin du bas représente le terme E_3 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BADULESCU – “Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **35** (2002), p. 695–747.
- [2] V. BERKOVICH – “Vanishing cycles for formal schemes. II”, *Invent. Math.* **125** (1996), p. 367–390.
- [3] P. BOYER – “Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale”, *Invent. Math.* **138** (1999), p. 573–629.
- [4] _____, “Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications”, <http://www.institut.math.jussieu.fr/~boyer/fichiers/MP-cohomologique.pdf>, 2006.
- [5] _____, “Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications”, <http://www.institut.math.jussieu.fr/~boyer/fichiers/MP-faisceutique.pdf>, 2006.
- [6] G. E. BREDON – *Sheaf theory*, McGraw-Hill Book Co., 1967.
- [7] H. CARAYOL – “Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura”, *Compo. Math.* **59** (1986), p. 151–236.
- [8] _____, “Sur les représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 409–468.
- [9] _____, *Nonabelian Lubin-Tate theory*, Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [10] J.-F. DAT – “Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques”, *Invent. Math.* (2007).
- [11] V. G. DRINFELD – “Elliptic modules”, *Mat. USSR Sb.* **23** (1974), p. 561–592.
- [12] G. FALTINGS – “A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld”, in *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math., vol. 300, Amer. Math. Soc., 2002, p. 115–129.

- [13] L. FARGUES – “Filtration de monodromie et cycles évanescents formels”, <http://www.math.u-psud.fr/~fargues/monodromie.dvi>, 2006.
- [14] K. FUJIWARA – “Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne’s conjecture”, *Invent. Math.* **127** (1997).
- [15] A. GENESTIER – “Espaces symétriques de Drinfeld”, *Astérisque* **234** (1996).
- [16] R. HARRIS & M. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.
- [17] T. HAUSBERGER – “Représentations cuspidales dans la cohomologie de l’espace de Drinfeld en égales caractéristiques: preuve de la conjecture de Drinfeld-Carayol”, *Ann. de l’Institut Fourier* (2005).
- [18] G. HENNIART – “On the local Langlands conjecture for $GL(n)$: the cyclic case”, *Ann. of Math.* **123** (1986), p. 145–203.
- [19] ———, “Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n ”, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), p. 167–187, 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001).
- [20] L. ILLUSIE – “Autour du théorème de monodromie locale”, in *Périodes p -adiques*, Astérisque, vol. 223, 1994.
- [21] N. M. KATZ – “Serre-Tate local moduli”, in *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–1978)*, Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, 1981, p. 138–202.
- [22] N. M. KATZ & B. MAZUR – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, vol. 108, Princeton Univ. Press, 1985.
- [23] G. LAUMON – *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 41, Cambridge Univ. Press, 1996, Geometry, counting of points and local harmonic analysis.
- [24] G. LAUMON, M. RAPOPORT & U. STUHLER – “ \mathcal{D} -elliptic sheaves and the Langlands correspondence”, *Invent. Math.* **113** (1993), p. 217–338.
- [25] P. SCHNEIDER & U. STUHLER – “The cohomology of p -adic symmetric spaces”, *Invent. Math.* **105** (1991), p. 47–122.
- [26] M. STRAUCH – “On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower”, Tilouine, Jacques (ed.) et al., *Automorphic forms (I)*. Proceedings of the semester of the Émile Borel Center, Paris, France, February 17–July 11, 2000. Paris: Société Mathématique de France. Astérisque 298, 391–410 (2005), 2005.
- [27] R. TAYLOR & T. YOSHIDA – “Compatibility of local and global Langlands correspondences”, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), p. 467–493.

- [28] A. V. ZELEVINSKY – “Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), p. 165–210.