

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROBLÈME DE PLATEAU,  
ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET  
PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Numéro 133  
Nouvelle série

Laura DESIDERI

2 0 1 3

---

### **Comité de rédaction**

Jean BARGE  
Gérard BESSON  
Emmanuel BREUILLARD  
Antoine CHAMBERT-LOIR  
Jean-François DAT  
Charles FAVRE

Daniel HUYBRECHTS  
Yves LE JAN  
Julien MARCHÉ  
Laure SAINT-RAYMOND  
Wilhelm SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

### **Diffusion**

Maison de la SMF  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### **Tarifs 2013**

*Vente au numéro* : 35 € (\$ 48)

*Abonnement* Europe : 262 €, hors Europe : 296 € (\$ 444)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-766-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

MÉMOIRES DE LA SMF 133

**PROBLÈME DE PLATEAU,  
ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET  
PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT**

Laura Desideri

Société Mathématique de France 2013  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*L. Desideri*

Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, 59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

*E-mail* : `Laura.Desideri@math.univ-lille1.fr`

*Url* : `http://math.univ-lille1.fr/~desideri/`

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 53A10, 34A30, 34M35, 34M50, 34M55, 32G34.

**Mots clefs.** — Surfaces minimales; systèmes complètement intégrables; équations fuchsienues et systèmes fuchiens; problème de Riemann-Hilbert; déformations isomonodromiques; système de Schlesinger.

---

# PROBLÈME DE PLATEAU, ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Laura Desideri

**Résumé.** — Ce mémoire est consacré à la résolution du problème de Plateau à bord polygonal dans l'espace euclidien de dimension trois. Il s'appuie sur la méthode de résolution proposée par René Garnier dans un article méconnu, voire inconnu, publié en 1928. L'approche de Garnier est très différente de la méthode variationnelle, elle est plus géométrique et constructive, et permet d'obtenir des disques minimaux sans point de ramification. Cependant, elle est parfois très compliquée, voire obscure et incomplète. On retranscrit sa démonstration dans un formalisme moderne, tout en proposant de nouvelles preuves plus simples, et en complétant certaines lacunes. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsien et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un système et sa monodromie.

La méthode de Garnier repose sur le fait que, par la représentation de Weierstrass spinorielle des surfaces minimales, on peut associer une équation fuchsienne réelle du second ordre, définie sur la sphère de Riemann, à tout disque minimal à bord polygonal. La monodromie de cette équation est déterminée par les directions orientées des côtés du bord. Le bon point de vue consiste à considérer des polygones pouvant avoir un sommet en l'infini. Pour résoudre le problème de Plateau, on est donc amené à résoudre un problème de Riemann-Hilbert. On procède ensuite en deux étapes : on construit d'abord, par déformations isomonodromiques, la famille de tous les disques minimaux dont le bord est un polygone de directions orientées données. Puis on montre, en étudiant les longueurs des côtés des bords polygonaux, qu'on obtient ainsi tout polygone comme bord d'un disque minimal.

***Abstract (The Plateau problem, Fuchsian systems and the Riemann-Hilbert problem)***

This dissertation is devoted to the resolution of the Plateau problem in the case of a polygonal boundary in the three-dimensional euclidean space. It relies on a method developed by René Garnier and published in 1928 in a paper which seems today to be totally forgotten. Even if Garnier's method is more geometrical and constructive than the variational one, it is sometimes really complicated, and even obscure or incomplete. We rewrite his proof with a modern formalism, we fill some gaps, and we propose some alternative easier proofs. This work mainly relies on a systematic use of Fuchsian systems and on the relation that we establish between the reality of such systems and their monodromy.

Garnier's method is based on the following result: using the spinorial Weierstrass representation for minimal surfaces, we can associate to each minimal disk with a polygonal boundary a real Fuchsian second order equation defined on the Riemann sphere. The monodromy of the equation is encoded by the oriented directions of the edges of the boundary. To solve the Plateau problem, we are thus led to solve a Riemann–Hilbert problem. Then, we proceed in two steps: first, by means of isomonodromic deformations, we construct the family of all minimal disks with a polygonal boundary with given oriented directions. Then, by studying the edges's lengths of these polygonal boundaries, we show that every polygon is the boundary of a minimal disk.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction .....	1
<b>1. Surfaces minimales</b> .....	9
1.1. Représentation de Weierstrass .....	9
1.2. Surface minimale conjuguée et famille associée .....	12
1.3. Principes de réflexion de Schwarz .....	14
1.4. Description quaternionique .....	14
<b>2. Équations fuchsienes et systèmes fuchsien</b> .....	19
2.1. Équations fuchsienes .....	19
2.2. Systèmes fuchsien .....	26
2.3. Passage d'une équation à un système d'équations .....	32
<b>3. Équation associée à un disque minimal à bord polygonal</b> .....	35
3.1. Disques minimaux à bord polygonal .....	36
3.2. Monodromie et propriétés de réalité .....	40
3.3. Singularités apparentes .....	48
3.4. Équations fuchsienes associées à un jeu de directions orientées .....	50
<b>4. Déformations isomonodromiques</b> .....	57
4.1. Les systèmes fuchsien associés à un jeu de directions orientées .....	58
4.2. La condition de réalité .....	63
4.3. Description par le système de Schlesinger .....	70
<b>5. Rapports de longueurs des côtés</b> .....	75
5.1. La fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$ .....	78
5.2. La démonstration par récurrence .....	82
5.3. Les pseudo-chocs .....	90
5.4. Le cas réel .....	98
<b>A. Le système de Garnier</b> .....	103

<b>B. Démonstrations de résultats utilisés au chapitre 5</b> .....	107
<b>Bibliographie</b> .....	113

## Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter une résolution du problème de Plateau à bord polygonal, qui est très différente de la méthode variationnelle, et qui repose sur une méthode élaborée par René Garnier. Garnier a exposé cette méthode dans l'article *Le Problème de Plateau* [16]. Publié en 1928, c'est-à-dire environ deux ans avant les démonstrations du problème de Plateau obtenues indépendamment par T. Radó [35] et J. Douglas [13], cet article semble avoir été complètement oublié, voire ignoré à l'époque. Même si l'existence de cette résolution est aujourd'hui connue de certains spécialistes, lorsque j'ai commencé ma thèse (dont ce mémoire est un des résultats), personne ne semblait être en mesure de dire comment elle fonctionnait, ni même si elle était correcte ou non. Sa démonstration est en effet très compliquée, parfois elliptique et obscure, et certains passages en sont même peu convaincants. En s'inspirant des idées de Garnier, on propose ici une nouvelle preuve de ce résultat, qui soit non seulement complète et compréhensible, mais aussi plus simple, et qui apporte un point de vue nouveau sur la méthode de Garnier. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsien et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un tel système et sa monodromie. Cette clarification des fondements de la méthode de Garnier m'a permis de l'étendre au cas où l'espace ambiant est l'espace de Minkowski de dimension trois [11].

Les surfaces minimales sont les surfaces dont la courbure moyenne est partout nulle. Elles constituent les points critiques de la fonctionnelle d'aire pour les variations fixant le bord. La théorie des surfaces minimales a commencé au XVIII<sup>e</sup> siècle, avec les débuts du calcul des variations, et connaît d'importantes avancées dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, avec notamment la représentation due à Weierstrass de toute immersion conforme minimale à partir de deux fonctions holomorphes. À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens s'intéressent au « problème de Plateau », du nom du physicien belge Joseph Plateau qui en 1873, a établi expérimentalement, par de très nombreuses expériences sur les films de savon, que toute courbe fermée de l'espace est le bord d'une surface minimale. L'énoncé mathématique du problème de Plateau est le suivant : *étant donné une courbe fermée connexe de Jordan de l'espace euclidien de dimension trois, montrer qu'il existe une surface minimale régulière et ayant la topologie d'un disque dont le bord soit la courbe fermée*. Au début des années 1930, Tibor Radó [35] et Jesse Douglas [13] obtiennent indépendamment par la méthode variationnelle les premiers résultats généraux (reconnus!) du problème de Plateau. Cependant, ils ne parviennent pas à exclure l'existence de points de branchement isolés à l'intérieur ou au bord du disque minimal. Il faut attendre les années 1970, et les travaux de R. Osserman [30], R. Gulliver [20] et R. Osserman, R. Gulliver et H.L. Royden [21] pour obtenir une démonstration du problème de Plateau qui soit absolument complète.

La méthode de Garnier pour résoudre le problème de Plateau est très différente de la méthode variationnelle. Même si elle paraît moins puissante, elle permet d'obtenir des surfaces, qui, contrairement aux solutions de Douglas-Radó, sont régulières partout. De plus, l'approche de Garnier est plus géométrique, s'inscrivant dans la continuation des travaux de K. Weierstrass, B. Riemann, H.-A. Schwarz et G. Darboux. Elle est également plus constructive que la méthode variationnelle.

La méthode de Garnier repose sur la correspondance de tout disque minimal à bord polygonal avec une équation fuchsienne réelle du second ordre définie sur la sphère de Riemann. Cette correspondance est antérieure aux travaux de Garnier. Elle est donnée par la représentation de Weierstrass, aujourd'hui dite spinorielle, des immersions conformes minimales. Cette équation fuchsienne semble être mentionnée pour la première fois, de manière indépendante et presque simultanée, dans un bref article de Karl Weierstrass [40] publié au mois de décembre 1866, et lors d'une présentation posthume des travaux de Bernhard Riemann [36] par Hattendorf le 6 janvier 1867 à la Société Royale de Göttingen. Riemann n'utilise pas la représentation de Weierstrass, mais deux représentations conformes (sphérique et plane) du même disque minimal. Gaston Darboux étudie en détail cette équation associée à un disque minimal à bord polygonal (voir [9], chapitre XIII), et expose les difficultés à surmonter pour être en mesure de résoudre le problème de Plateau. Au premier rang de celles-ci figure la détermination d'une équation fuchsienne à partir de sa monodromie : c'est le « problème de Riemann-Hilbert », qui deviendra bientôt le vingt-et-unième des vingt-trois problèmes proposés par David Hilbert au Congrès International de Paris en 1900. C'est seulement une vingtaine d'années après ces observations de Darboux que seront obtenues les premières solutions du problème de Riemann-Hilbert, par J. Plemelj [33] et G. Birkhoff [3] — solutions dont A.A. Bolibruch a montré des décennies plus tard par une série de contre-exemples [5], [6] qu'elles contiennent une erreur.

Garnier est un étudiant de Paul Painlevé. En 1912, il publie un article [14] qui rassemble les résultats de sa thèse et dans lequel il étudie en particulier les déformations isomonodromiques d'équations fuchiennes ayant un nombre arbitraire de singularités et aucune singularité logarithmique. Le système différentiel qui gouverne ces déformations, connu aujourd'hui sous sa forme hamiltonienne sous le nom de *système de Garnier*, est en un sens une généralisation de la sixième équation  $P_{VI}$  de Painlevé. En 1926, il propose une résolution du problème de Riemann-Hilbert [15] basée sur l'étude du système Schlesinger au voisinage de ses singularités non mobiles, et de ses liens avec le système de Garnier. Les résultats obtenus dans ces deux articles lui permettent d'espérer être en mesure de lever les difficultés mises en évidence par Darboux pour la résolution du problème de Plateau. Il lui reste néanmoins encore beaucoup de travail à accomplir pour obtenir cette résolution [16].

Depuis les années 1970, leurs liens avec des problèmes issus de la physique sont à l'origine de l'intérêt nouveau que suscitent les équations de Painlevé, et consécutivement, le système de Garnier. C'est à Kazuo Okamoto et à Hironobu Kimura que l'on doit la « redécouverte » du système de Garnier au début des années 1980 et, en particulier, la mise en évidence de sa structure hamiltonienne [29]. Dans ce contexte, et grâce notamment aux travaux de Mikio Sato, Tetsuji Miwa et Michio Jimbo [37] sur le problème de Riemann-Hilbert et le système de Schlesinger, la résolution du problème de Plateau par Garnier revêt elle aussi un intérêt nouveau, avec entre autre la possibilité d'une simplification.

**Résumé des chapitres.** — L'objet de ce mémoire est la démonstration du théorème suivant.

**THÉORÈME 0.0.1** (problème de Plateau à bord polygonal). — *Tout polygone  $P \subset \mathbb{R}^3$  en position générique, ayant éventuellement un sommet en l'infini, est le bord d'au moins un disque minimal immergé. De plus, si  $P$  a un sommet en l'infini, alors le disque minimal a un bout hélicoïdal en ce sommet.*

On dit ici qu'un polygone  $P$  à  $n + 3$  côtés est *en position générique* si le  $(n + 3)$ -uplet des directions orientées de ses côtés  $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$  est dans l'ensemble  $\mathcal{D}^n$  (définition 3.1.2), *i.e.* si deux directions quelconques de  $P$  ne sont pas colinéaires et trois directions quelconques ne sont pas coplanaires.

Pour toute direction orientée  $D \in \mathcal{D}^n$ , on introduit l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$  des polygones à  $n + 3$  côtés de direction  $D$  ayant éventuellement un sommet en l'infini (*i.e.* des lignes brisées éventuellement infinies), définis à translation et homothétie de rapport positif près (définition 3.1.3) : ces polygones sont caractérisés par  $n$  rapports de longueurs de côtés, entre leurs  $n + 1$  longueurs finies, et l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$  est ainsi isomorphe à  $]0, +\infty[^n$ . On définit également l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$  des immersions conformes minimales  $X$  qui représentent des disques minimaux ayant un bord polygonal  $P \in \mathcal{P}_D^n$ , et un bout hélicoïdal si  $P$  a un sommet en l'infini, également à translation et homothétie de rapport positif près (définition 3.1.4). On peut toujours supposer qu'une telle immersion est définie sur le demi-plan supérieur

$$\mathbb{C}_+ = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) > 0\}.$$

On peut alors paraphraser ainsi le théorème 0.0.1 : il revient à montrer que pour toute direction  $D \in \mathcal{D}^n$ , l'application suivante est surjective :

$$\mathcal{X}_D^n \longrightarrow \mathcal{P}_D^n, \quad X \longmapsto \partial X(\mathbb{C}_+).$$

Pour cela, la méthode que propose Garnier repose sur une correspondance bijective explicite entre une classe adéquate d'équations fuchsienes, notée  $\mathcal{E}_D^n$ , et l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . On cherchera donc plutôt à montrer que la composition suivante est surjective :

$$\mathcal{E}_D^n \xrightarrow{1:1} \mathcal{X}_D^n \xrightarrow{\partial} \mathcal{P}_D^n \xrightarrow{\sim} ]0, +\infty[^n.$$

Après deux premiers chapitres introductifs, on définit et on caractérise au chapitre 3 l'ensemble d'équations  $\mathcal{E}_D^n$ , en constituant une sorte de dictionnaire entre les ensembles  $\mathcal{X}_D^n$  et  $\mathcal{E}_D^n$ . Au chapitre 4, on considère l'ensemble analogue  $\mathcal{A}_D^n$  de systèmes fuchsien, et on décrit au moyen de déformations isomonodromiques l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . Le chapitre 5 est consacré à la résolution du problème de Plateau proprement dite : on utilise la description précédente pour étudier les rapports de longueurs des bords polygonaux des immersions de  $\mathcal{X}_D^n$ , et on montre ainsi que tout polygone de directions orientées  $D$  est le bord d'au moins un disque minimal.

*Chapitre 1. Surfaces minimales.* — On expose des aspects généraux sur les surfaces minimales de l'espace euclidien de dimension trois. Le point essentiel est la représentation de Weierstrass que l'on appelle aujourd'hui spinorielle : tout couple  $(G, H)$  de fonctions holomorphes sur le demi-plan supérieur et sans zéro commun définit une immersion conforme minimale de  $\mathbb{C}_+$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et réciproquement, toute immersion de ce type est obtenue par un couple de fonctions holomorphes sans zéro commun.

*Chapitre 2. Équations fuchsien et systèmes fuchsien.* — On donne une introduction assez détaillée des notions de base telles que le comportement local au voisinage des singularités, la monodromie, le problème de Riemann-Hilbert, les déformations isomonodromiques et, en particulier, le système de Schlesinger. On explicite aussi les liens entre équations et systèmes fuchsien.

*Chapitre 3. L'équation associée à un disque minimal à bord polygonal.* — Ce chapitre n'est pas consacré à la résolution du problème de Plateau proprement dite, mais plutôt à l'étude de la correspondance entre disques minimaux à bord polygonal et équations fuchsien. Cette correspondance est antérieure aux travaux de Garnier sur le problème de Plateau, elle est déjà étudiée par Darboux ([9], chapitre XIII).

On considère une immersion conforme minimale  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui représente un disque minimal à bord polygonal de direction  $D$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{X}_D^n$ . Cette immersion est caractérisée par ses données de Weierstrass  $G$  et  $H$ , qui sont des fonctions holomorphes dans  $\mathbb{C}_+$ , et qui sont linéairement indépendantes dès que l'image de  $X$  n'est pas plane. Elles sont donc solutions d'une unique équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

L'équation  $(E)$  est l'équation associée à l'immersion  $X$ . On note  $\mathcal{E}_D^n$  l'ensemble des équations qui sont associées en ce sens à une immersion appartenant à  $\mathcal{X}_D^n$ . Le but de ce chapitre est d'obtenir une caractérisation de l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$ , en traduisant des propriétés géométriques des immersions  $X$  en terme de propriétés analytiques des équations  $(E)$ . Une équation  $(E)$  de  $\mathcal{E}_D^n$  a deux types de singularités : les antécédents par l'immersion  $X$  des sommets du bord polygonal  $P$ , qui sont réels

$$t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 0, \quad t_{n+2} = 1, \quad t_{n+3} = \infty,$$

et les ombilics de  $X$ , qui sont des singularités apparentes. En appliquant le principe de réflexion de Schwarz, on montre que l'équation  $(E)$  s'étend à la sphère de Riemann, sur laquelle c'est une équation fuchsienne réelle, et on détermine comment les données de Weierstrass sont transformées autour des singularités  $t_i$ . On montre ainsi que la monodromie de l'équation  $(E)$  est entièrement déterminée par la direction orientée  $D$  du bord polygonal de  $X$  : l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  est isomonodromique. Il n'y a par contre aucune traduction naturelle des longueurs des côtés de  $P$  en terme de propriétés de l'équation  $(E)$ .

On obtient ainsi que les équations de  $\mathcal{E}_D^n$  sont caractérisées par trois conditions : une condition (i) qui est d'ordre local (nature et position des singularités, valeurs des exposants), une condition (ii) qui impose la monodromie à partir de la direction  $D$ , et une condition de réalité (iii). Finalement, on montre que l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ .

*Chapitre 4. Déformations isomonodromiques.* — Étant donné un  $(n + 3)$ -uplet de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , le but de ce chapitre est d'utiliser l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  pour décrire explicitement l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . Contrairement à Garnier, pour obtenir cette description, on va plutôt utiliser des systèmes fuchsien, à la place des équations fuchiennes de  $\mathcal{E}_D^n$ . Cette approche apporte un point de vue nouveau à la méthode de Garnier et la simplifie notablement.

On commence donc par introduire l'ensemble analogue  $\mathcal{A}_D^n$  des systèmes fuchsien du premier ordre de taille  $2 \times 2$ , qui sont associés, dans un sens que l'on précisera, aux immersions de l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . On établit une caractérisation de ces systèmes par des conditions (a), (b), et (c), qui sont les analogues des conditions (i), (ii), et (iii) précédentes. Notamment, les conditions (ii) et (b), qui portent sur la monodromie, sont identiques. L'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  n'est pas en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ , puisque des systèmes fuchsien différents peuvent définir la même équation.

Pour décrire l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$ , on lève ensuite une difficulté ignorée par Garnier, qu'est la condition de réalité (c). On montre que la « réalité » d'un système fuchsien peut être caractérisée par sa monodromie : on établit une condition nécessaire et suffisante portant sur la monodromie d'un système pour que celui-ci satisfasse la condition (c). En particulier, cette condition est vérifiée par une monodromie satisfaisant la condition (b) : l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  est donc simplement l'ensemble des systèmes vérifiant les conditions (a) et (b).

Enfin, on utilise des déformations isomonodromiques pour décrire les systèmes de  $\mathcal{A}_D^n$ . On obtient que l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  contient une famille isomonodromique de systèmes fuchsien  $(A_D(t), t \in \pi^n)$  paramétrée par la position des singularités  $t = (t_1, \dots, t_n)$  variant dans le simplexe

$$\pi^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \dots < t_n < 0\},$$

décrite par le système de Schlesinger et qui est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . On obtient également un résultat de régularité en  $t$  pour cette famille. On en déduit une description explicite de l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n = (X_D(t), t \in \pi^n)$ , et de la famille  $(P_D(t), t \in \pi^n) \subset \mathcal{P}_D^n$  des polygones de direction  $D$  qui sont le bord d'au moins un disque minimal.

*Chapitre 5. Rapports de longueurs des côtés.* — Le but de chapitre est de montrer que la famille de polygones  $(P_D(t), t \in \pi^n)$  décrit entièrement l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$ . Un système de coordonnées sur  $\mathcal{P}_D^n$  est donné par  $n$  rapports de longueurs de côtés. Pour chaque valeur de  $t \in \pi^n$ , les données de Weierstrass  $(G(x, t), H(x, t))$  de l'immersion  $X_D(t)$  sont obtenues à partir d'une solution fondamentale du système fuchsien  $(A_D(t))$ . Les rapports de longueurs des côtés du polygone  $P_D(t)$  s'écrivent donc

$$r_i(t) = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (|G(x, t)|^2 + |H(x, t)|^2) dx}{\int_0^1 (|G(x, t)|^2 + |H(x, t)|^2) dx} \quad (i = 1, \dots, n),$$

et on obtient ainsi la fonction « rapports des longueurs »  $F_D(t)$  associée à la direction  $D$

$$F_D : \pi^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n, \quad F_D(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)).$$

Le but de ce chapitre est donc d'établir le théorème suivant, qui conclut la démonstration du théorème 0.0.1, et qui en est la partie la plus difficile.

**THÉORÈME.** — *Étant donné un  $(n + 3)$ -uplet de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , la fonction « rapports des longueurs »  $F_D : \pi^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$  est surjective.*

On propose une démonstration de ce théorème très différente de celle Garnier, basée sur l'étude de la famille  $(A_D(t), t \in \pi^n)$  au bord du simplexe  $\pi^n$  et une récurrence portant sur le nombre  $n + 3$  de côtés des polygones. Par identification naturelle des simplexes  $\pi^n$  et  $]0, +\infty[^n$ , on obtient une fonction  $\tilde{F}_D : ]0, +\infty[^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$ . Pour montrer que la fonction  $F_D$  est surjective, on montre que la fonction  $\tilde{F}_D$  est de degré 1, c'est-à-dire homotope à l'identité. On établit un résultat de topologie qui nous permet de nous ramener à montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  est continue et de degré 1 au bord de  $]0, +\infty[^n$ . Pour obtenir cela, il faut interpréter la fonction  $F_D|_{\partial\pi^n}$  en terme de nouvelles fonctions « rapports des longueurs » de dimension inférieure : c'est l'objet de la proposition 5.2.2 dont l'énoncé paraît naturel et qui est l'étape la plus importante de la démonstration : la fonction  $F_D(t)$  s'étend continûment à chacune des faces du bord du simplexe  $\pi^n$  (qui sont des simplexes de dimension inférieure). Chaque face est caractérisée par la « disparition » de certains  $t_i$ , qui ont fusionné avec la singularité suivante  $t_{i+1}$ . On affirme qu'alors la fonction  $F_D(t)$  restreinte à chaque face est, à homéomorphisme près, la fonction « rapports des longueurs »  $F_{D'} : \pi^k \rightarrow ]0, +\infty[^k$  ( $1 \leq k \leq n - 1$ ) définie par les directions orientées  $D' \in \mathcal{D}^k$  obtenues à partir de  $D$  en « enlevant » les composantes  $D_i$  correspondant aux  $t_i$  qui ont disparu. Une fois que l'on a obtenu la proposition 5.2.2, il suffit pour conclure de faire une récurrence sur le nombre  $n + 3$  de côtés, dont l'hérédité est assurée par le résultat de topologie mentionné

plus haut, et dont l'initialisation au rang  $n = 1$  (cas d'un bord quadrilatéral) est immédiate une fois que l'on a obtenu la proposition 5.2.2.

La majeure partie de ce chapitre est donc consacrée à la démonstration de la proposition 5.2.2. La partie la plus difficile est d'obtenir la continuité de la fonction  $F_D(t)$  au bord, et non pas son interprétation géométrique. On s'appuie sur des résultats généraux sur les singularités fixes du système de Schlesinger, que Garnier appelle les pseudo-chocs, c'est-à-dire en les points tels que  $t_i = t_j$ ,  $i \neq j$ . Ces résultats sont une partie plus connue du travail de Garnier [15], et ont été développés et généralisés par Sato, Miwa et Jimbo [37]. On reprend ces résultats en en approfondissant des aspects qui nous seront utiles pour étudier l'holomorphie de la fonction  $F_D(t)$  en les pseudo-chocs. On applique ensuite cette étude générale aux solutions particulières du système de Schlesinger qui nous intéresse, c'est-à-dire au cas réel, et on établit la proposition 5.2.2.

REMERCIEMENTS. — Je souhaite remercier mon directeur de thèse Frédéric Hélein de m'avoir suggéré de travailler sur la résolution du problème de Plateau par R. Garnier, et pour son aide tout au long de ce travail. Je souhaite également remercier le rapporteur anonyme pour ses commentaires utiles et intéressants.



## CHAPITRE 1

### SURFACES MINIMALES

On expose dans ce chapitre des aspects généraux sur les surfaces minimales de l'espace euclidien de dimension trois  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On note  $(O, e_1, e_2, e_3)$  un repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Une immersion conforme  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'une surface de Riemann  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^3$  est dite minimale si sa courbure moyenne est partout nulle. Rappelons que la courbure moyenne d'une immersion est la moitié de la trace de sa deuxième forme fondamentale.

#### 1.1. Représentation de Weierstrass

La représentation de Weierstrass est un outil fondamental dans l'étude des surfaces minimales. Elle permet à la fois de caractériser et de construire des surfaces minimales. Donnons tout d'abord une première forme, classique, de cette représentation.

THÉORÈME 1.1.1. — *Soient  $\Sigma$  une surface de Riemann et  $x_0$  un point de  $\Sigma$ .*

*Soient une fonction  $g$  méromorphe dans  $\Sigma$  et une 1-forme différentielle  $\omega$  holomorphe dans  $\Sigma$  telles que :*

- ▷ *les zéros de  $\omega$  sont d'ordre pair,*
- ▷  *$g$  a un pôle d'ordre  $m$  en un point  $a \in \Sigma$  si et seulement si  $\omega$  a un zéro d'ordre  $2m$  en  $a$ .*

*Alors l'application  $X$  définie sur le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  par*

$$X(x) = \Re \int_{x_0}^x (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$$

*est une immersion conforme minimale de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Réciproquement, si  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion conforme minimale, alors il existe un point  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ , une fonction  $g$  méromorphe dans  $\Sigma$  et une 1-forme différentielle  $\omega$  holomorphe dans  $\Sigma$  vérifiant les*

deux conditions ci-dessus tels que

$$X(x) = X_0 + \Re \int_{x_0}^x (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega.$$

La différentielle de Hopf de l'immersion  $X$  est, par définition, la 2-forme différentielle

$$Q = \left\langle \frac{d^2 X}{dx^2}, N \right\rangle dx^2,$$

et elle s'exprime en fonction des données  $(g, \omega)$  par  $Q = -\omega dg$ . On peut voir facilement que la fonction  $g$  est le projeté stéréographique par rapport au pôle Nord du vecteur de Gauss  $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$  de l'immersion  $X$ . Les données géométriques de l'immersion  $X$  sont caractérisées par les données  $(g, \omega)$  : sa métrique induite et sa seconde forme fondamentale sont

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad \text{II} = Q + \bar{Q}.$$

Cependant, la représentation qu'utilise Garnier, et que l'on va utiliser exclusivement dans ce mémoire, est la représentation aujourd'hui dite spinorielle des surfaces minimales. Bien que soit probablement sous cette forme que la représentation de Weierstrass ait été donnée pour la première fois — par Weierstrass lui-même [40] —, elle n'est pas considérée aujourd'hui comme la représentation *classique*. Par souci de simplicité, comme on ne s'intéresse dans ce mémoire qu'aux disques minimaux, on n'énonce cette représentation que dans le cas des immersions  $X$  définies dans un domaine du plan complexe. On pourra se reporter à [25] pour un énoncé plus général et pour plus de détails sur la représentation spinorielle.

**THÉORÈME 1.1.2.** — *Soient  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ , et  $x_0$  un point de  $\Omega$ . Pour tout couple  $(G, H) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  de fonctions holomorphes dans  $\Omega$  sans zéro commun, l'application  $X$  définie sur le revêtement universel  $\tilde{\Omega}$  de  $\Omega$  par*

$$(1) \quad X(x) = \Re \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} i(G(\xi)^2 - H(\xi)^2) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

*est une immersion conforme minimale de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Réciproquement, si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion conforme minimale, alors il existe un point  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ , et un couple  $(G, H) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  de fonctions holomorphes tels que*

$$X(x) = X_0 + \Re \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} i(G(\xi)^2 - H(\xi)^2) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Comme on utilisera exclusivement cette représentation, on l'appellera, contrairement à l'usage actuel, la représentation de Weierstrass, et le couple de fonctions holomorphes  $(G, H)$  les données de Weierstrass de l'immersion  $X$ . Les données de

Weierstrass sont déterminées, à un signe près, par l'immersion  $X$ . La correspondance entre les deux représentations précédentes est donnée par

$$g = -\frac{G}{H}, \quad \omega = -iH^2 dx.$$

Le projeté stéréographique nord du vecteur de Gauss  $N$  est  $-G/H$ . La différentielle de Hopf est donnée par le wronskien des fonctions  $G$  et  $H$

$$(2) \quad Q = i(GH' - HG') dx^2,$$

et la métrique induite et la seconde forme fondamentale par

$$(3) \quad ds^2 = (|G|^2 + |H|^2)^2 |dx|^2, \quad \Pi = Q + \bar{Q}.$$

EXEMPLE 1.1.3. — Voici les exemples les plus classiques de surfaces minimales.

- 1) Si les fonctions  $G$  et  $H$  sont proportionnelles, alors l'immersion associée définit une surface minimale contenue dans un plan (c'est même une équivalence).
- 2) Si on choisit  $\Omega = \mathbb{C}^*$ ,  $G(x) = 1$ ,  $H(x) = 1/x$ , on obtient une *hélicoïde*. L'immersion  $X$  est définie dans le revêtement universel de  $\mathbb{C}^*$ . Les hélicoïdes sont des surfaces réglées (figure 1).
- 3) Si on choisit  $\Omega = \mathbb{C}^*$ ,  $G(x) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $H(x) = e^{i\frac{\pi}{4}}/x$ , on obtient une *caténoïde*. On peut montrer qu'alors l'immersion  $X$  est bien définie dans  $\mathbb{C}^*$ . Les caténoïdes sont les seules surfaces minimales de révolution (figure 1).

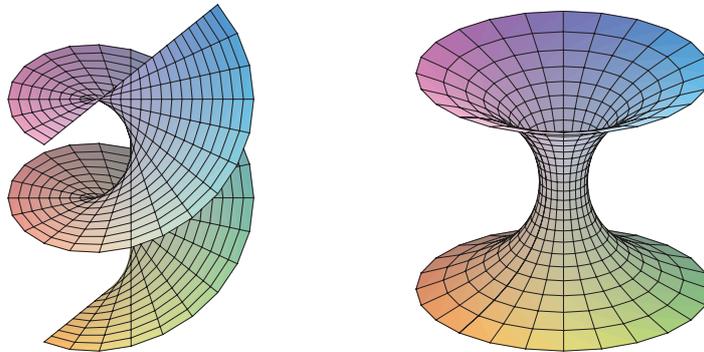


FIGURE 1. Une hélicoïde (à gauche), une caténoïde (à droite)

Une application différentiable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par (1) où les fonctions  $G$  et  $H$  sont seulement supposées holomorphes, représente une surface minimale *généralisée*, c'est-à-dire qui peut avoir des points de branchement. Ces points de branchement sont les points où la dérivée  $\partial X/\partial x$  s'annule, et où donc la surface minimale n'est plus immergée. Ce sont exactement les zéros communs des fonctions  $G$  et  $H$ .

On ne considèrera par la suite que des surfaces minimales du type topologique du disque, que l'on peut toujours représenter de manière conforme sur le demi-plan supérieur ou demi-plan de Poincaré

$$(4) \quad \mathbb{C}_+ = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) > 0\},$$

où  $\Im(x)$  désigne la partie imaginaire du nombre complexe  $x$ . Il n'y a pas alors de problème de période, ni de passage au revêtement universel. Si on considère deux représentations conformes sur  $\mathbb{C}_+$  du même disque minimal, elles se déduisent l'une de l'autre par composition à droite par une représentation conforme du demi-plan  $\mathbb{C}_+$  dans lui-même, *i.e.* par une application de Möbius

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Il suffit donc de fixer l'image de trois points par une immersion  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  pour la déterminer entièrement à partir de son image.

Remarquons que si la représentation de Weierstrass donne une description locale très simple des immersions conformes minimales, elle paraît *a priori* peu utile à la résolution du problème de Plateau. Il semble en effet difficile de déduire d'une courbe que l'on s'est fixée à l'avance des conditions sur les données de Weierstrass  $(G, H)$  qui assurent que l'immersion conforme minimale associée passe par cette courbe. On verra au chapitre 3 comment l'équation associée à un disque minimal à bord polygonal permet de déduire de cette description locale des contraintes globales sur les données de Weierstrass.

## 1.2. Surface minimale conjuguée et famille associée

Les coordonnées d'une immersion conforme minimale sont les parties réelles de fonctions holomorphes : elles sont donc harmoniques. Rappelons qu'à toute application harmonique  $f$  définie sur une surface de Riemann  $\Sigma$ , on peut associer une autre application harmonique  $f^*$ , qui est *a priori* définie dans le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$ , telle que la fonction  $f + if^*$  soit holomorphe dans  $\tilde{\Sigma}$  ( $f^*$  est définie à une constante additive près). L'application  $f^*$  est appelée *l'application harmonique conjuguée* de  $f$ . On peut ainsi introduire la définition suivante.

**DÉFINITION 1.2.1.** — Soit  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion conforme minimale. Alors l'immersion conforme minimale  $X^* : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont les coordonnées sont les applications harmoniques conjuguées de celles de  $X$  est appelée *l'immersion conjuguée* de  $X$ . Elle est définie à une translation près.

Si une immersion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  a pour données de Weierstrass  $(G, H)$ , alors son immersion conjuguée  $X^*$  s'écrit

$$X^*(x) = \Im \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} i(G(\xi)^2 - H(\xi)^2) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi,$$

et ses données de Weierstrass sont

$$e^{\frac{1}{4}i\pi}G, \quad e^{\frac{1}{4}i\pi}H.$$

Les immersions  $X$  et  $X^*$  ont la même application de Gauss, et elles sont localement isométriques. Par exemple, la surface conjuguée d'une caténoïde est une hélicoïde, bien qu'elles ne soient pas globalement isométriques. L'équation différentielle des lignes de courbure de  $X$  est donnée par

$$\Re(GH' - HG') dx^2 = 0,$$

et celle des lignes asymptotiques par

$$\Im(GH' - HG') dx^2 = 0.$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sont donc échangées entre une surface minimale et sa conjuguée. Comme une surface minimale et sa conjuguée ont les mêmes géodésiques et la même application de Gauss, on en déduit donc le lemme suivant.

LEMME 1.2.2. — *Si une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$  contient un segment de droite de vecteur directeur  $v$ , alors ce segment correspond sur la surface minimale conjuguée à une courbe plane contenue dans un plan normal à  $v$  et que la surface coupe perpendiculairement.*

En effet, si  $(\mathcal{S})$  est une surface immergée dans  $\mathbb{R}^3$ , alors les droites contenues dans  $(\mathcal{S})$  sont exactement les courbes qui sont à la fois des lignes asymptotiques et des géodésiques de  $(\mathcal{S})$ . De même, les courbes tracées sur  $(\mathcal{S})$  et contenues dans un plan que la surface  $(\mathcal{S})$  coupe perpendiculairement sont exactement les courbes qui sont à la fois des lignes de courbure et des géodésiques de  $(\mathcal{S})$ .

Par exemple, les méridiens d'une caténoïde correspondent sur une hélicoïde conjuguée aux droites qui engendrent l'hélicoïde. Le cercle médian de la caténoïde correspond à la droite centrale de l'hélicoïde.

Plus généralement, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , on peut définir l'immersion conforme minimale  $X_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de données de Weierstrass  $\lambda(G, H)$ . On a

$$X_\lambda(x) = \Re(\lambda^2)X(x) + \Im(\lambda^2)X^*(x).$$

Si le scalaire  $\lambda$  est réel ou purement imaginaire, alors les immersions  $X_\lambda$  sont homothétiques à l'immersion  $X$ . Lorsque le scalaire  $\lambda$  appartient au cercle unité  $\mathbb{S}^1$ , les immersions  $X_\lambda$  sont localement isométriques à l'immersion  $X$ . La famille d'immersions conformes minimales  $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{S}^1}$  est appelée *famille associée* à l'immersion  $X$ .

### 1.3. Principes de réflexion de Schwarz

Les deux propositions suivantes mettent en évidence certaines symétries apparaissant sur les surfaces minimales. Elles permettent également d'étendre les surfaces minimales ayant un bord au delà de celui-ci, lorsque ce bord contient un segment de droite ou une courbe contenue dans un plan que la surface coupe perpendiculairement. Ces résultats nous seront très utiles par la suite.

On note  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ ,

$$\mathbb{D}^+ = \{x \in \mathbb{D} \mid \Im(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}^- = \{x \in \mathbb{D} \mid \Im(x) < 0\}.$$

PROPOSITION 1.3.1. — *Soit une immersion conforme minimale  $X : \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $X$  s'étend continûment à l'intervalle  $] -1, 1[ = \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ , et si l'image par  $X$  de l'intervalle  $] -1, 1[$  est un segment de droite, alors l'immersion  $X$  se prolonge à  $\mathbb{D}^-$  par réflexion par rapport à cette droite et  $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion conforme minimale. De plus, deux points symétriques sur l'image  $X(\mathbb{D})$  ont des antécédents conjugués.*

PROPOSITION 1.3.2. — *Soit une immersion conforme minimale  $X : \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $X$  s'étend continûment à l'intervalle  $] -1, 1[ = \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ , et si l'image par  $X$  de l'intervalle  $] -1, 1[$  est une courbe contenue dans un plan que la surface  $X(\mathbb{D}^+)$  coupe perpendiculairement, alors l'immersion  $X$  se prolonge à  $\mathbb{D}^-$  par réflexion par rapport à ce plan et  $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion conforme minimale. De plus, deux points symétriques sur l'image  $X(\mathbb{D})$  ont des antécédents conjugués.*

On donnera une démonstration de ces propositions au chapitre 3.

Par le lemme 1.2.2, une réflexion axiale sur une surface minimale correspond sur la surface minimale conjuguée à une réflexion par rapport à un plan orthogonal à cet axe, et réciproquement.

### 1.4. Description quaternionique

Considérons l'isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans l'ensemble  $E^3$  des matrices de  $M(2, \mathbb{C})$  hermitiennes à trace nulle, qui identifie un vecteur  $X = (X_1, X_2, X_3)^t \in \mathbb{R}^3$  avec la matrice  $\tilde{X}$  définie par

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} -X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 & X_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  induit sur  $E^3$  le produit scalaire suivant

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\tilde{X}\tilde{Y}),$$

et la norme euclidienne d'un vecteur  $X$  est donnée par l'opposé du déterminant de la matrice  $\tilde{X}$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -\det \tilde{X}.$$

Pour toute matrice  $A \in \text{SU}(2)$ , l'application

$$R_A : M \mapsto \bar{A}^t M A$$

est une isométrie directe de  $E^3$  pour ce produit scalaire. On identifie  $\text{SO}(E^3)$  avec le groupe  $\text{SO}(3)$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$  : pour toute matrice  $A \in \text{SU}(2)$ , on appelle aussi  $R_A$  la rotation correspondante dans  $\text{SO}(3)$  et pour tout vecteur  $X \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\widetilde{(R_A X)} = \bar{A}^t \tilde{X} A.$$

On obtient le morphisme de groupe

$$R : S \longrightarrow \text{SO}(3), \quad A \mapsto R_A$$

qui est le revêtement à deux feuilletés de  $\text{SO}(3)$  par le groupe  $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$ . On peut expliciter ce morphisme : si  $R \in \text{SO}(3)$  est une rotation d'angle  $\varphi$  et d'axe unitaire  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ , alors les deux relevés de  $R$  sont  $A$  et  $-A$  avec

$$(5) \quad A = \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) I_2 - i \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \begin{pmatrix} -\delta_3 & \delta_1 - i\delta_2 \\ \delta_1 + i\delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que si on pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors pour toute matrice  $M \in \text{SU}(2)$ , on a

$$(6) \quad MJ = J\bar{M}.$$

La proposition suivante explicite le caractère spinoriel de la représentation de Weierstrass (1).

**PROPOSITION 1.4.1.** — *Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion conforme minimale d'un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , de données de Weierstrass  $Y = (G, H)$ . Soit une matrice  $A$  dans  $\text{SU}(2)$ . Alors le vecteur  $YA$  constitue les données de Weierstrass de l'immersion conforme minimale  $R_A(X)$  image de l'immersion  $X$  par la rotation  $R_A$ .*

*Démonstration.* — Supposons que l'immersion  $X = (X_1, X_2, X_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  soit donnée par le vecteur  $Y$  par la formule de Weierstrass (1) (i.e.  $X_0 = O$ ). Il suffit d'écrire l'immersion  $X$  en terme de matrices  $2 \times 2$  :

$$\tilde{X}(x) = \begin{pmatrix} -X_3(x) & X_1(x) - iX_2(x) \\ X_1(x) + iX_2(x) & X_3(x) \end{pmatrix}.$$

Calculons  $X_1 + iX_2$  :

$$\begin{aligned} X_1(x) + iX_2(x) &= \frac{i}{2} \int_{x_0}^x (G(\xi)^2 - H(\xi)^2) d\xi - \frac{i}{2} \int_{x_0}^x (\overline{G}(\xi)^2 - \overline{H}(\xi)^2) d\bar{\xi} \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{x_0}^x (G(\xi)^2 + H(\xi)^2) d\xi + \frac{i}{2} \int_{x_0}^x (\overline{G}(\xi)^2 + \overline{H}(\xi)^2) d\bar{\xi} \\ &= i \int_{x_0}^x G(\xi)^2 d\xi + i \int_{x_0}^x \overline{H}(\xi)^2 d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\tilde{X}(x) = i \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} -GH & -H^2 \\ G^2 & GH \end{pmatrix} d\xi + i \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} \overline{G}\overline{H} & -\overline{G}^2 \\ \overline{H}^2 & -\overline{G}\overline{H} \end{pmatrix} d\bar{\xi},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\tilde{X}(x) = i \int_{x_0}^x J \cdot Y(\xi)^t \cdot Y(\xi) d\xi + i \int_{x_0}^x \overline{Y}(\xi)^t \cdot \overline{Y}(\xi) \cdot J d\bar{\xi}.$$

Par l'identité (6), on trouve

$$\overline{A}^t \tilde{X}(x) A = i \int_{x_0}^x J \cdot (Y(\xi)A)^t \cdot (Y(\xi)A) d\xi + i \int_{x_0}^x \overline{(Y(\xi)A)^t} \cdot \overline{(Y(\xi)A)} \cdot J d\bar{\xi}.$$

Les données de Weierstrass  $YA$  définissent donc l'immersion conforme minimale  $R_A(X)$ .  $\square$

On reprend les notations de la section précédente.

LEMME 1.4.2. — Soit  $X : \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion conforme minimale de données de Weierstrass  $Y : \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{C}^2$ . On suppose que  $Y$  s'étend continûment à  $] - 1, 1[$ . Alors :

▷ l'image par  $X$  de l'intervalle  $] - 1, 1[$  est un segment de droite si et seulement s'il existe une matrice  $A \in \text{SU}(2)$  telle que le vecteur  $YA$  soit à valeurs réelles ou purement imaginaires sur  $] - 1, 1[$  ;

▷ l'image par  $X$  de l'intervalle  $] - 1, 1[$  est une courbe contenue dans un plan que la surface coupe perpendiculairement si et seulement s'il existe une matrice  $A$  appartenant à  $\text{SU}(2)$  telle que le vecteur  $e^{\frac{1}{4}i\pi}YA$  soit à valeurs réelles ou purement imaginaires sur  $] - 1, 1[$ .

*Démonstration.* — Soit  $Y = (G, H)$  les données de Weierstrass de l'immersion  $X$ . Pour la première assertion, on va montrer que l'image de  $] - 1, 1[$  par l'immersion  $X$  est un segment de droite dirigé par le vecteur de base  $e_2 = (0, 1, 0)$  si et seulement si les fonctions  $G^2(x)$ ,  $H^2(x)$  et  $G(x)H(x)$  sont réelles sur  $] - 1, 1[$ , c'est-à-dire si et seulement si les fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  sont toutes les deux réelles ou purement imaginaires. On en déduit alors la première assertion par la proposition 1.4.1.

La condition suffisante est immédiate. Pour la nécessité, il faut exprimer par exemple que sur  $] - 1, 1[$ , la troisième composante  $X_3(x)$  de l'immersion est constante

et que son application de Gauss  $N(x)$  est orthogonale au vecteur  $e_2$ . Comme la projection stéréographique nord de  $N(x)$  est  $-G(x)/H(x)$ , on obtient que sur  $] -1, 1[$

$$-G/H \in \mathbb{R} \text{ et } GH \in \mathbb{R}, \quad \text{i.e. } G\bar{H} = \overline{GH} \text{ et } GH = \overline{G\bar{H}}.$$

Ceci donne le résultat annoncé, puisque les données de Weierstrass  $G(x)$  et  $H(x)$  ne peuvent pas être simultanément nulles.

Pour la deuxième assertion, il suffit de considérer l'immersion conjuguée  $X^*$ , qui a pour données de Weierstrass  $e^{\frac{1}{4}i\pi}Y$ . Alors le lemme 1.2.2 nous permet de nous ramener au cas précédent.  $\square$

Comme on va le voir à la section 3.2, le lemme 1.4.2 permet de retrouver les principes de réflexion de Schwarz.



## CHAPITRE 2

### ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET SYSTÈMES FUCHSIENS

On présente dans ce chapitre les notions de base de la théorie des équations et systèmes fuchsien sur la sphère de Riemann. On commence par étudier les équations fuchsien, on donne ensuite les résultats analogues pour les systèmes d'équations, et enfin, on précise les liens entre systèmes fuchsien et équations fuchsien (dans le cas non résonnant), dont on aura besoin au chapitre 4. Pour une approche plus complète, ainsi que pour connaître les démonstrations des résultats énoncés, on pourra se reporter à [23] — particulièrement pour ce qui concerne les transformations isomonodromiques, que ce soit le système de Garnier ou le système de Schlesinger. Pour le problème de Riemann-Hilbert pour les systèmes fuchsien, on pourra se référer à Anosov et Bolibruch [1], ou plus simplement à [2] pour une présentation générale du problème et des résultats de Bolibruch.

#### 2.1. Équations fuchsien

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre définie sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$(E) \quad D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0$$

où  $D = d/dx$  désigne la dérivation par rapport à la variable complexe  $x \in \mathbb{C}$ . On suppose que les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  sont des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{P}^1$ . On note  $S$  l'ensemble des singularités de l'équation (E), *i.e.* des points en lesquels  $p(x)$  ou  $q(x)$  a un pôle

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Les solutions de l'équation (E) sont des fonctions *multi-formes* dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S$ , c'est-à-dire des fonctions holomorphes dans le revêtement universel de  $\mathbb{P}^1 \setminus S$ . Par abus de langage, on notera encore  $y(x)$  une telle fonction. Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. On appelle *système fondamental de solutions* un vecteur  $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$  dont les composantes forment une base de cet espace.

**2.1.1. Étude locale.** — On commence par étudier le comportement des solutions de l'équation  $(E)$  au voisinage de ses singularités. On en déduira ensuite une caractérisation globale des équations fuchsiennes.

*Singularités régulières et singularités fuchsiennes.* — En général, les solutions de l'équation  $(E)$  ne sont pas uniformes au voisinage d'une singularité. On distingue certains types de singularités.

**DÉFINITION 2.1.1.** — On dit qu'une singularité  $x = x_0$  de l'équation  $(E)$  est *fuchsienne* si la fonction  $p(x)$  a en  $x = x_0$  un pôle d'ordre au plus 1 et la fonction  $q(x)$  un pôle d'ordre au plus 2.

On distingue une autre catégorie de singularités : on considère les singularités  $x = x_0$  au voisinage desquelles toute solution a une croissance au plus polynomiale en  $1/|x - x_0|$  quand  $x \rightarrow x_0$ . Comme *a priori* une solution de l'équation  $(E)$  a un point de branchement logarithmique en une singularité, il faut être plus précis dans cette définition.

**DÉFINITION 2.1.2.** — On dit qu'une singularité  $x = x_0$  de l'équation  $(E)$  est *régulière* si pour tout secteur  $S$  centré en  $x_0$ , pour tout revêtement  $\tilde{S}$  de ce secteur dans le revêtement de  $\mathbb{P}^1 \setminus S$  et pour toute solution  $y$  de l'équation  $(E)$ , la restriction  $y|_{\tilde{S}}$  a une croissance polynomiale en  $1/|x - x_0|$  quand  $x \rightarrow x_0$ ,  $x \in S$ .

Comme on va le voir, une singularité fuchsienne est toujours régulière. Pour les équations, la réciproque est également vraie ([22]), mais elle est fautive en général pour les systèmes d'équations.

*Méthode de Fröbenius.* — La méthode de Fröbenius permet de décrire le comportement local des solutions de l'équation  $(E)$  au voisinage d'une singularité fuchsienne. On se place au point  $x = 0$  en supposant qu'il est une telle singularité. Si on cherche les solutions formelles de l'équation  $(E)$  de la forme

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

on se rend compte que le nombre complexe  $s$  ne peut prendre au plus que deux valeurs, qui sont les racines de l'équation quadratique

$$(7) \quad s^2 + (a - 1)s + b,$$

avec

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$$

L'équation (7) s'appelle l'*équation caractéristique* de l'équation  $(E)$  en la singularité fuchsienne  $x = 0$ . Ses racines s'appellent les *exposants* en  $x = 0$ . Si on les note  $s_1$  et  $s_2$  avec

$$\Re s_2 \leq \Re s_1,$$

alors on peut vérifier qu'il existe toujours une solution convergente (multi-valuée)  $y_1(x)$  de l'équation  $(E)$  de la forme

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 = 1.$$

Pour expliciter une autre solution linéairement indépendante de  $y_1(x)$ , il faut distinguer deux cas :

▷ s'il existe également une solution convergente  $y_2(x)$  de la forme

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 = 1,$$

alors la singularité fuchsienne  $x = 0$  est dite *non logarithmique*. En particulier, c'est toujours le cas si  $s_1 - s_2$  n'est pas un entier naturel ;

▷ sinon, la singularité fuchsienne  $x = 0$  est dite *logarithmique*, et la deuxième solution canonique en  $x = 0$  est de la forme

$$y_1(x) \log x + x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

On peut observer que la singularité fuchsienne  $x = 0$  est non logarithmique si et seulement s'il existe un système fondamental de solutions  $Y(x)$  dont la matrice de monodromie en  $x = 0$  soit diagonale.

Les expressions que l'on vient de donner pour les solutions de l'équation  $(E)$  au voisinage d'une singularité fuchsienne montrent qu'une singularité fuchsienne est régulière.

*Équations fuchsiennes.* — Il nous reste à étudier le point  $x = \infty$ . Pour cela, on fait le changement de variable  $w = 1/x$  dans l'équation  $(E)$ , et la nature du point  $x = \infty$  est celle du point  $w = 0$  dans la nouvelle équation. On montre ainsi facilement que le point  $x = \infty$  est une singularité fuchsienne de l'équation  $(E)$  si et seulement si les fonctions

$$w^{-1}p(w^{-1}) \quad \text{et} \quad w^{-2}q(w^{-1})$$

sont holomorphes au point  $w = 0$ . On note alors  $a_\infty$  et  $b_\infty$  leurs valeurs respectives en  $w = 0$ , et l'équation caractéristique au point  $x = \infty$  est

$$s^2 + (1 - a_\infty)s + b_\infty = 0.$$

**DÉFINITION 2.1.3.** — On dit que l'équation  $(E)$  est une *équation fuchsienne* sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  si toutes ses singularités, y compris éventuellement le point en l'infini, sont fuchsiennes.

On obtient alors la caractérisation suivante des équations fuchsiennes.

PROPOSITION 2.1.4. — *L'équation (E) est fuchsienne sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , de singularités  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \infty$ , si et seulement si ses coefficients sont de la forme*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x - x_i}, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{(x - x_i)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{x - x_i},$$

avec  $c_1 + \dots + c_{n-1} = 0$ .

On range dans un tableau appelé *schéma de Riemann* les singularités fuchiennes de l'équation (E), et les exposants  $\theta_i^+$  et  $\theta_i^-$  en chaque singularité  $x = x_i$  :

$$(8) \quad \begin{pmatrix} x = x_1 & \cdots & x = x_n \\ \theta_1^+ & \cdots & \theta_n^+ \\ \theta_1^- & \cdots & \theta_n^- \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 2.1.5 (relation de Fuchs). — *Supposons que l'équation (E) soit fuchsienne et que son schéma de Riemann soit donné par (8). Alors la somme de tous les exposants de (E) ne dépend que du nombre de singularités, et plus précisément*

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n (\theta_i^+ + \theta_i^-) = n - 2.$$

*Démonstration.* — Il suffit d'écrire que la somme des résidus du coefficient  $p(x)$  est nulle. Par la proposition 2.1.4, on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x - x_i}$$

et par définition du résidu  $a_\infty$ , on a  $a_\infty = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ . D'après les équations caractéristiques en chacune des singularités, on déduit

$$a_i = 1 - \theta_i^+ - \theta_i^- \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad a_\infty = 1 + \theta_n^+ + \theta_n^-,$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**2.1.2. Équations projectivement équivalentes et schwarziennes.** — Étant donné une fonction  $u$  non constante et méromorphe dans un ouvert  $U$  d'une surface de Riemann, le *schwarzien* de  $u$  par rapport à une coordonnée conforme  $x$  est donné par

$$S_x(u) = \left(\frac{u''}{u'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

où  $u' = du/dx$ . Si  $z$  est une autre coordonnée conforme, alors

$$S_z(u) = S_x(u) + S_x(u) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

De plus, le schwarzien est invariant sous l'action de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  :

$$S_x\left(\frac{au+b}{cu+d}\right) = S_x(u) \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Ces deux propriétés assurent en particulier que le schwarzien  $S_x(u)$  est identiquement nul si et seulement si la fonction  $u$  est une homographie  $u(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Une fonction  $u$  est dite  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ -*multi-forme* si deux branches arbitraires de  $u(x)$  sont reliées par une homographie. Si une fonction est  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ -multi-forme, alors son schwarzien est uniforme.

Pour tout système fondamental de solutions  $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$  de l'équation  $(E)$ , le schwarzien du rapport  $u = \frac{y_1}{y_2}$  est indépendant du choix de  $Y(x)$  et vaut

$$(10) \quad S_x\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = 2q(x) - \frac{1}{2}p(x)^2 - Dp(x).$$

Le rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  est défini à partir de l'équation  $(E)$  à une homographie près.

**DÉFINITION 2.1.6.** — La classe d'équivalence du rapport de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation  $(E)$  est appelée *la solution projective* de l'équation  $(E)$ . Deux équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes dans la sphère de Riemann sont dites *projectivement équivalentes* si elles ont la même solution projective.

Soient deux équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$  ayant le même ensemble de singularités  $S$ . Alors elles sont projectivement équivalentes si et seulement s'il existe une fonction  $\Phi(x)$  holomorphe et jamais nulle dans le revêtement universel de l'ensemble  $\mathbb{P}^1 \setminus S$  telle que toute solution  $y_2(x)$  de l'équation  $(E_2)$  soit obtenue par la multiplication d'une solution  $y_1(x)$  de l'équation  $(E_1)$  par la fonction  $\Phi(x)$ . La fonction  $\Phi(x)$  est alors de la forme

$$\Phi(x) = \prod_{a \in S \setminus \{\infty\}} (x - a)^{\theta_a}.$$

**2.1.3. Monodromie.** — On ne suppose pas que l'équation  $(E)$  est fuchsienne. On a vu qu'en général, les solutions de l'équation  $(E)$  sont des fonctions multi-formes dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S$ . Pour mesurer ce défaut d'uniformité de ses solutions, on introduit la *monodromie* de l'équation  $(E)$ , qui est une classe d'équivalence de représentations du groupe fondamental de l'ensemble  $\mathbb{P}^1 \setminus S$ .

Soient un point  $x_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus S$  et un ouvert simplement connexe  $U$  de  $\mathbb{P}^1 \setminus S$  contenant  $x_0$ . On considère un système fondamental de solutions  $Y(x)$  de l'équation  $(E)$  défini dans  $U$ . On peut prolonger analytiquement le système  $Y(x)$  le long de tout lacet de point de base  $x_0$  et contenu dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S$ , et ce prolongement ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet. Pour toute classe  $\alpha$  dans le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$ , on peut donc noter  $\alpha * Y(x)$  le prolongement du système  $Y(x)$  le long de tout représentant de  $\alpha$ . Alors le système  $\alpha * Y(x)$  est défini dans  $U$  et il est aussi un système fondamental de solutions de l'équation  $(E)$ . Il existe donc une

unique matrice  $M_\alpha(Y) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  qui vérifie

$$\alpha * Y(x) = Y(x)M_\alpha(Y).$$

On appelle la matrice  $M_\alpha(Y)$  la *matrice de monodromie* du système  $Y(x)$  le long de  $\alpha$ . On définit ainsi une application

$$\rho_Y : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0) \longrightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \alpha \longmapsto M_\alpha(Y).$$

On choisit un ordre dans le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$  de la façon suivante : on définit le produit  $\beta\alpha$  de deux éléments  $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$  comme étant la classe du lacet qui suit d'abord  $\alpha$  puis  $\beta$  (dans le sens naturel). On a alors

$$(\beta\alpha) * Y(x) = \beta * (\alpha * Y)(x),$$

donc

$$M_{\beta\alpha}(Y) = M_\beta(Y)M_\alpha(Y),$$

et l'application  $\rho_Y$  est un homéomorphisme du groupe  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$  dans  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$  : c'est une *représentation linéaire* de rang 2 (si on inverse l'ordre dans  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$ , on obtient une anti-représentation). On appelle l'application  $\rho_Y$  la *représentation de monodromie* de l'équation  $(E)$  par rapport au système fondamental  $Y(x)$ .

Considérons à présent un autre système fondamental de solutions  $Z(x)$  défini dans l'ouvert  $U$ . Il existe une unique matrice  $C \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ , appelée *matrice de connexion* entre les systèmes  $Y(x)$  et  $Z(x)$ , telle que

$$Z(x) = Y(x)C.$$

Alors pour tout  $\alpha \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$ , on a

$$\alpha * Z(x) = \alpha * Y(x) \cdot C = Y(x)M_\alpha(Y)C = Z(x)C^{-1}M_\alpha(Y)C,$$

c'est-à-dire

$$(11) \quad M_\alpha(Z) = C^{-1}M_\alpha(Y)C.$$

Les deux représentations  $\rho_Y$  et  $\rho_Z$  sont donc conjuguées. La relation de conjugaison entre représentations est une relation d'équivalence. On voit donc que l'ensemble de toutes les représentations de monodromie de l'équation  $(E)$  (par rapport à chaque système fondamental) constitue une classe de conjugaison. Cette classe est canoniquement associée à l'équation  $(E)$  : on l'appelle la *monodromie* de l'équation  $(E)$ .

Le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0)$  est engendré par les classes de lacets  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  tournant respectivement une fois dans le sens direct autour de la singularité  $x = x_i$ , en laissant les autres singularités à l'extérieur, soumises à la relation  $\gamma_n \cdots \gamma_1 = 1$ . La représentation de monodromie  $\rho_Y$  par rapport à un système  $Y(x)$  est donc déterminée par la famille  $(M_1, \dots, M_n)$ , où

$$M_i = M_{\gamma_i}(Y).$$

Les matrices  $M_i$  vérifient aussi

$$M_n \cdots M_1 = I_2.$$

On appelle la famille  $(M_1, \dots, M_n)$  un *système de générateurs* de la monodromie de l'équation  $(E)$ .

**DÉFINITION 2.1.7.** — Une représentation  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$  d'un groupe  $G$  est dite *irréductible* si les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^m$  invariants par  $\rho$  sont exactement  $\{0\}$  et  $\mathbb{C}^m$ .

La monodromie de l'équation  $(E)$  est dite *irréductible* si elle admet un représentant irréductible, c'est-à-dire si elle admet un système de générateurs  $(M_1, \dots, M_n)$  constitué de matrices qui ne soient pas simultanément trigonalisables. Si l'équation  $(E)$  est fuchsienne, alors le fait qu'elle ait une monodromie irréductible est équivalent à ce qu'elle soit elle-même irréductible, *i.e.* que l'opérateur différentiel

$$L = D^2 + p(x)D + q(x)$$

n'admette que des factorisations triviales.

**2.1.4. Le problème de Riemann-Hilbert pour les équations linéaires du second ordre.** — On ne considère pour l'instant le problème de Riemann-Hilbert que dans le cas des équations du second ordre. Il n'y a pas de différence fondamentale avec les équations d'ordre supérieur. Par contre, la discussion est différente dans le cas des systèmes fuchsien. Le problème de Riemann-Hilbert pour les équations fuchsien est exactement le vingt-et-unième des vingt-trois problèmes proposés par Hilbert au Congrès International de Paris en 1900 :

**Le problème de Riemann-Hilbert.** — *Trouver une équation fuchsienne ayant des singularités données et une monodromie donnée.*

Formulé ainsi, on peut facilement voir que le problème de Riemann-Hilbert n'a en général pas de solution. En effet, soit  $S = \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \infty\} \subset \mathbb{P}^1$  un ensemble de singularités. D'après la proposition 2.1.4, une équation fuchsienne du second ordre dont l'ensemble des singularités soit  $S$  dépend de  $e(S)$  paramètres, avec

$$e(S) = 3n - 4.$$

Par ailleurs, on peut montrer que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, x_0) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  dépend de  $m(S)$  paramètres, avec

$$m(S) = 4(n - 2) + 1.$$

Dès que  $n > 3$ , on a donc

$$m(S) - e(S) > 0.$$

À singularités fixées, l'application qui à une équation fuchsienne du second ordre associe sa monodromie n'est donc pas surjective dès que  $n > 3$ . Ce calcul remonte à Poincaré [34]. Si on veut pouvoir construire une équation fuchsienne dont la monodromie est donnée, il faut donc s'autoriser à ajouter des paramètres supplémentaires : les singularités apparentes sont les seuls paramètres possibles.

DÉFINITION 2.1.8. — Une singularité fuchsienne de l'équation  $(E)$  est dite *apparente* si elle n'est pas logarithmique et si ses exposants sont des entiers relatifs.

Une singularité fuchsienne  $x = a$  est apparente si et seulement si toutes les solutions de l'équation  $(E)$  sont méromorphes en  $x = a$ . Il n'y a donc pas de monodromie en ces singularités.

On vérifie alors qu'une équation fuchsienne du second ordre ayant ses singularités dans  $S$ , et ayant au plus  $N$  singularités apparentes à l'extérieur de  $S$  dépend de  $e(S) + N$  paramètres. Pourtant, il n'est pas évident qu'autoriser

$$N = m(S) - e(S) = n - 3$$

singularités apparentes soit suffisant pour obtenir une réponse positive au problème de Riemann-Hilbert. Lorsque la monodromie est irréductible, Ohtsuki [28] a obtenu la bonne majoration du nombre de singularités apparentes, à la condition qu'un des générateurs de la monodromie soit diagonalisable. Mais le résultat le plus général est dû à Bolibruch.

THÉORÈME 2.1.9 (voir [4]). — *Étant donné un ensemble fini  $S \subset \mathbb{P}^1$  à  $n$  éléments et une représentation irréductible  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ , il existe une équation fuchsienne du second ordre dont l'ensemble des singularités soit  $S$ , dont la monodromie soit la classe de  $\rho$  et ayant au plus  $n - 3$  singularités apparentes.*

## 2.2. Systèmes fuchsien

2.2.1. **Définitions.** — Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre

$$(A_0) \quad DY = A(x)Y$$

où  $D = \frac{d}{dx}$  et la fonction  $A(x)$  est méromorphe sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , à valeurs dans  $M(2, \mathbb{C})$ . On suppose que le système  $(A_0)$  est *fuchsien*, c'est-à-dire que tous les pôles de  $A(x)$  sont simples<sup>(1)</sup>. Comme l'ensemble des systèmes fuchsien sur la sphère de Riemann est stable par transformation de Möbius, on peut supposer que les singularités du système  $(A_0)$  sont

$$t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty,$$

et on a donc

$$(12) \quad A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}.$$

---

1. Contrairement à ce qui se passe pour les équations, les notions de singularités régulières et fuchiennes ne coïncident pas pour les systèmes d'équations. Une singularité fuchsienne, c'est-à-dire un pôle simple, est régulière (cf. définition 2.1.2), mais la réciproque est fautive.

Comme on suppose que l'infini est un point singulier, le résidu

$$A_\infty := - \sum_{i=1}^{n+2} A_i$$

n'est pas la matrice nulle (on note parfois  $A_{n+3}$  pour  $A_\infty$ ). On note  $S(t)$  l'ensemble des singularités :

$$S(t) := \{t_1, \dots, t_{n+3}\}.$$

Le système  $(A_0)$  est donc défini dans l'ensemble  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ . Ses solutions, qui sont des couples de fonctions définies sur le revêtement universel de  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ , forment un espace vectoriel de dimension 2. On appelle *matrice fondamentale de solutions* une matrice  $\mathbf{Y}(x)$  dont les colonnes  $Y_1(x), Y_2(x)$  forment une base de cet espace. Une telle matrice vérifie l'équation  $D\mathbf{Y} = A(x)\mathbf{Y}$ . On définit la monodromie du système  $(A_0)$  comme on l'a fait pour les équations du second ordre.

On suppose de plus que le système  $(A_0)$  vérifie les deux hypothèses suivantes :

- ▷ le système  $(A_0)$  est *non résonnant* : les valeurs propres  $\theta_i^+$  et  $\theta_i^-$  de la matrice  $A_i$  satisfont  $\theta_i^+ - \theta_i^- \notin \mathbb{Z}$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) ;
- ▷ le système  $(A_0)$  est *normalisé en l'infini* :

$$A_\infty = - \sum_{i=1}^{n+2} A_i = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix}.$$

Comme le système  $(A_0)$  est non résonnant, les singularités  $x = t_i$  ne sont pas logarithmiques. Ceci assure l'existence au voisinage de chaque singularité d'une matrice fondamentale de la forme suivante.

PROPOSITION 2.2.1. — *On suppose le système  $(A_0)$  non résonnant. Alors, pour tout  $i = 1, \dots, n+2$ , il existe une unique matrice  $P_i(x)$  holomorphe au point  $x = t_i$  vérifiant  $P_i(t_i) = I_2$  et telle que*

$$P_i(x)(x - t_i)^{A_i}$$

*soit une matrice fondamentale de solutions du système  $(A_0)$ , où*

$$(x - t_i)^{A_i} = \exp(A_i \log(x - t_i)).$$

Nous ne donnons pas la démonstration de cette proposition, mais remarquons simplement que la matrice  $P_i(x)$  est solution de l'équation

$$DP_i = A(x)P_i - P_i \frac{A_i}{x - t_i}.$$

Soit  $L_i$  la matrice diagonalisée de  $A_i$

$$L_i = \begin{pmatrix} \theta_i^+ & 0 \\ 0 & \theta_i^- \end{pmatrix}.$$

Alors, il existe des matrices fondamentales de solutions de la forme

$$R_i(x)(x - t_i)^{L_i}$$

où la matrice  $R_i(x)$  est holomorphe et inversible au point  $x = t_i$  et  $R_i(t_i) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  diagonalise  $A_i$

$$A_i = R_i(t_i)L_iR_i(t_i)^{-1}.$$

Ces solutions sont dites *canoniques* au point  $x = t_i$ , parce que leur matrice de monodromie en ce point est diagonale :

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_i^+} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta_i^-} \end{pmatrix}.$$

En l'infini, comme le système  $(A_0)$  est normalisé en l'infini, il existe une unique solution canonique de la forme

$$Y_\infty(x) = R_\infty\left(\frac{1}{x}\right)x^{-L_\infty}$$

où la matrice  $R_\infty(w)$  est holomorphe en  $w = 0$  et  $R_\infty(0) = I_2$ .

**2.2.2. Déformations isomonodromiques.** — On s'intéresse à présent au problème suivant : si on considère que le système  $(A_0)$  dépend d'un paramètre variable, comment décrire l'ensemble des systèmes fuchsien (ou des équations fuchsiennes) ayant une monodromie donnée ? On présente d'abord la théorie générale des déformations isomonodromiques, et on en déduira le système de Schlesinger à la section suivante (le système de Garnier est quant à lui introduit à l'appendice A).

On considère une famille de systèmes différentiels linéaires  $2 \times 2$  dépendant d'un paramètre  $t$  variant dans un ouvert simplement connexe  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  :

$$(13) \quad DY = A(x, t)Y$$

où la fonction  $A(x, t)$  est définie dans  $\mathbb{P}^1 \times U$ , à valeurs dans  $M(2, \mathbb{C})$ . On suppose que pour tout  $t \in U$  fixé, la fonction  $x \mapsto A(x, t)$  est holomorphe en dehors d'un ensemble fini  $S(t) \subset \mathbb{P}^1$  de points singuliers, et que les points de  $S(t)$  sont des fonctions holomorphes de  $t$ . On définit le sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{P}^1 \times U$  des singularités du système

$$S := \bigcup_{t \in U} S(t) \times \{t\},$$

qui est donc une hypersurface. Localement, l'ensemble  $S$  a autant de composantes connexes qu'il y a de points dans les ensembles  $S(t)$  et chacune de ces composantes connexes est un graphe de  $\mathbb{P}^1 \times U$  au dessus de l'ouvert  $U$ . Quitte à restreindre l'ouvert simplement connexe  $U$ , on suppose que ceci est vrai dans  $U$  entier. Sans entrer dans des détails techniques de topologie, on voit que les classes d'homotopie des lacets de  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$  basés en un point  $x_0(t)$  de  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$  sont alors indépendantes de  $t$ .

Quitte à restreindre de nouveau l'ouvert  $U$ , on peut choisir un point de base  $x_0 \in \mathbb{P}^1$  indépendant de  $t$ . Il suffit pour cela que  $x_0$  et  $U$  vérifient

$$(\{x_0\} \times U) \cap S = \emptyset.$$

On note  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0)$  le groupe d'homotopie correspondant.

On peut ainsi définir la monodromie de la famille de systèmes (13). Soit une solution fondamentale  $\mathbf{Y}(x, t)$ , *i.e.* une matrice solution de (13), holomorphe et inversible en tout point  $(x_0, t)$  ( $t \in U$ ). Pour toute classe d'homotopie  $\alpha \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0)$ , le prolongement analytique  $\alpha * \mathbf{Y}(x, t)$  de  $\mathbf{Y}(x, t)$  le long de  $\alpha$  est encore une solution fondamentale en  $(x_0, t)$  : il existe une unique matrice  $\rho_{\mathbf{Y}}(t, \alpha) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  telle que

$$\alpha * \mathbf{Y}(x, t) = \mathbf{Y}(x, t) \rho_{\mathbf{Y}}(t, \alpha).$$

On obtient donc une famille analytique de représentations de monodromie

$$\rho_{\mathbf{Y}}(t, \cdot) : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

DÉFINITION 2.2.2. — Une solution fondamentale  $\mathbf{Y}(x, t)$  est dite *M-invariante* si sa représentation de monodromie  $\rho_{\mathbf{Y}}(t, \cdot)$  est indépendante de  $t$ .

DÉFINITION 2.2.3. — La famille (13) de systèmes différentiels est dite *isomonodromique* si elle admet une solution fondamentale qui soit *M-invariante*.

On note  $d$  la différentiation par rapport à la variable  $t = (t_1, \dots, t_n)$

$$d = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t_i} dt_i.$$

On a les résultats suivants.

LEMME 2.2.4. — Une solution fondamentale  $\mathbf{Y}(x, t)$  est *M-invariante* si et seulement si la 1-forme à valeurs matricielles

$$\Omega(x, t) := d\mathbf{Y}(x, t)\mathbf{Y}(x, t)^{-1}$$

est uniforme dans  $(\mathbb{P}^1 \times U) \setminus S$ .

PROPOSITION 2.2.5. — Le système de Pfaff

$$(14) \quad D\mathbf{Y} = A(x, t)\mathbf{Y}, \quad d\mathbf{Y} = \Omega(x, t)\mathbf{Y}$$

est complètement intégrable si et seulement si le système suivant est vérifié

$$(15) \quad \begin{cases} dA(x, t) = D\Omega(x, t) + [\Omega(x, t), A(x, t)], \\ d\Omega(x, t) = \Omega(x, t) \wedge \Omega(x, t). \end{cases}$$

Le système (14) s'écrit

$$d_{(x,t)}Y = \omega Y$$

où la 1-forme  $\omega$  est définie par  $\omega = A dx + \Omega$ , et  $d_{(x,t)}$  est la différentiation par rapport à la variable  $(x, t)$ . S'il existe une matrice inversible  $Y(x, t)$  telle que  $\omega = d_{(x,t)}Y \cdot Y^{-1}$ , alors on a de manière immédiate

$$d_{(x,t)}\omega = \omega \wedge \omega,$$

où le produit extérieur  $\alpha \wedge \alpha$  d'une 1-forme  $\alpha = (\alpha_{ij})$  à valeurs dans  $M(2, \mathbb{C})$  est la matrice dont l'élément  $(i, j)$  est  $\alpha_{i1} \wedge \alpha_{1j} + \alpha_{i2} \wedge \alpha_{2j}$ . La réciproque constitue le théorème de Frobenius. La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de  $d_{(x,t)}\omega = \omega \wedge \omega$  est exactement le système (15). Le système (15) s'appelle l'équation de déformation de (13).

La proposition 2.2.5 nous dit donc que le système (13) admet une solution fondamentale  $M$ -invariante  $Y(x, t)$  si et seulement si le système (15) admet une solution  $\Omega(x, t)$  uniforme dans  $(\mathbb{P}^1 \times U) \setminus S$ . La solution fondamentale  $Y(x, t)$  vérifie alors

$$DY = A(x, t)Y, \quad dY = \Omega(x, t)Y.$$

La 1-forme  $\Omega$  dépend du choix d'une solution fondamentale  $M$ -invariante. La proposition suivante permet de comparer entre elles les solutions fondamentales  $M$ -invariantes.

**PROPOSITION 2.2.6.** — *On suppose que la famille de systèmes (13) est isomonodromique, de monodromie irréductible. Soit une solution fondamentale  $Y_1(x, t)$   $M$ -invariante. Alors une solution fondamentale  $Y_2(x, t)$  est aussi  $M$ -invariante si et seulement s'il existe une fonction holomorphe  $\mu : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  et une matrice  $C$  appartenant à  $GL(2, \mathbb{C})$  indépendante de  $t$  telles que*

$$Y_2(x, t) = \mu(t)Y_1(x, t) \cdot C.$$

**2.2.3. Le système de Schlesinger.** — On applique les résultats précédents à la déformation d'un système fuchsien non résonnant. On pose

$$(16) \quad \mathcal{B}^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^n \mid \forall i \neq j, t_i \neq t_j\},$$

et on considère à présent la position des singularités  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{B}^n$  comme un paramètre du système  $(A_0)$ , dont dépendent les matrices  $A_i = A_i(t)$ . On suppose que les valeurs propres  $\theta_i^+$  et  $\theta_i^-$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) sont indépendantes de  $t$ . Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$ . Les déformations de paramètre  $t \in U$  du système  $(A_0)$  qui préservent la monodromie sont gouvernées par le système de Schlesinger :

THÉORÈME 2.2.7. — *On suppose le système fuchsien  $(A_0)$  non résonnant et normalisé en l'infini. Alors la matrice fondamentale de solutions  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est  $M$ -invariante si et seulement si les matrices  $A_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ , satisfont le système aux dérivées partielles (système de Schlesinger)*

$$(17) \quad dA_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+2} [A_j, A_i] d \log(t_i - t_j), \quad i = 1, \dots, n+2.$$

De plus, le système de Schlesinger (17) est complètement intégrable.

De manière plus détaillée, le système de Schlesinger s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t_j} &= \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}, & i = 1, \dots, n+2, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j; \\ \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial A_i}{\partial t_j} &= 0, & j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

La première partie du théorème 2.2.7 est obtenue en appliquant la proposition 2.2.5. La première étape consiste à calculer la 1-forme  $\Omega(x, t)$  associée à la matrice fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  et définie au lemme 2.2.4. Elle est obtenue par une étude locale au voisinage de chaque singularité  $x = t_i$  grâce aux matrices fondamentales canoniques  $R_i(x)(x - t_i)^{L_i}$ .

LEMME 2.2.8. — *Si la matrice fondamentale de solutions  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est  $M$ -invariante, alors la 1-forme  $\Omega(x, t) = d\mathbf{Y}_\infty(x, t)\mathbf{Y}_\infty(x, t)^{-1}$  s'écrit*

$$\Omega(x, t) = - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i} dt_i.$$

On montre ensuite facilement que l'équation de déformation (15)

$$dA = D\Omega + [\Omega, A], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega,$$

avec

$$A(x, t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i}, \quad \Omega(x, t) = - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i} dt_i$$

est équivalente au système de Schlesinger (17).

**2.2.4. La propriété de Painlevé.** — Soit une équation différentielle

$$(18) \quad F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0$$

où la fonction  $F(t, y_0, y_1, \dots, y_n)$  est polynomiale en  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  à coefficients méromorphes en  $t$ .

DÉFINITION 2.2.9. — On dit que l'équation (18) a des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) *mobiles* si ses solutions ont des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) dont la position dépend des constantes d'intégration.

On dit que l'équation (18) a la *propriété de Painlevé* si elle n'a ni point de branchement mobile, ni singularité essentielle mobile.

Quand  $n = 2$ , les six équations de Painlevé  $P_I, \dots, P_{VI}$  constituent, à changement de variables près, l'ensemble des équations (18) rationnelles ayant la propriété de Painlevé qui ne sont ni linéaires, ni intégrables par une quadrature.

THÉORÈME 2.2.10 (cf. [26], [27]). — *Le système de Schlesinger (17) a la propriété de Painlevé. De plus, toute solution du système de Schlesinger (17) s'étend au revêtement universel de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$  de manière méromorphe.*

Par contre, le système de Garnier (70), qui décrit les déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes sans singularité logarithmique (voir l'appendice A), n'a pas la propriété de Painlevé.

### 2.3. Passage d'une équation à un système d'équations

Comme on va le voir au chapitre suivant, les équations fuchsiennes sont les objets naturellement associés aux disques minimaux à bord polygonal. Cependant, le système de Garnier (70), qui décrit les déformations isomonodromiques de ces équations, n'a pas la propriété de Painlevé. On va donc choisir, contrairement à l'approche suivie par Garnier, de transformer les équations fuchsiennes du second ordre que l'on va obtenir au chapitre suivant en systèmes fuchsien du premier ordre de taille  $2 \times 2$ . On donne ici une description des relations entre équations et systèmes fuchsien, dans le cas non résonnant (*i.e.* sans singularité logarithmique), qui est celui qui nous intéresse.

**2.3.1. D'un système du premier ordre à une équation du second ordre.** — C'est le sens immédiat. On considère un système différentiel  $2 \times 2$  du premier ordre

$$(19) \quad DY = A(x)Y, \quad A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix},$$

où les fonctions  $A_{ij}(x)$  sont méromorphes sur la sphère de Riemann.

LEMME 2.3.1. — *Si la fonction  $A_{12}(x)$  n'est pas identiquement nulle, alors la première composante  $y_1(x)$  de toute solution  $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$  du système (19) vérifie l'équation du second ordre*

$$(20) \quad D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0,$$

avec

$$(21) \quad p(x) = -\frac{DA_{12}(x)}{A_{12}(x)} - \operatorname{Tr} A(x),$$

$$(22) \quad q(x) = -DA_{11}(x) + A_{11}(x)\frac{DA_{12}(x)}{A_{12}(x)} + \det A(x).$$

De plus, si  $\mathbf{Y}(x) = (Y(x), Z(x))$  est une matrice fondamentale de solutions du système (19), alors sa première ligne  $(y_1(x), z_1(x))$  est un système fondamental de solutions de l'équation (20).

Il est donc immédiat que si le système (19) est fuchsien, alors l'équation qui lui est associée est fuchsienne. De plus, on a :

LEMME 2.3.2. — Si  $x = \lambda$  est un zéro de  $A_{12}(x)$  d'ordre  $m$ , mais n'est pas une singularité du système (19), alors  $x = \lambda$  est une singularité apparente de l'équation (20), d'exposants 0 et  $m + 1$ .

Considérons l'équation associée au système fuchsien  $(A_0)$ , toujours supposé non résonnant et normalisé en l'infini. Comme la fraction rationnelle  $A_{12}(x)$  a exactement  $n + 2$  pôles simples et, par la normalisation en l'infini, un zéro d'ordre deux en l'infini, alors elle a exactement  $n$  zéros dans  $\mathbb{C}$  comptés avec multiplicité. Supposons à présent que les zéros de la fonction  $A_{12}(x)$  sont simples. On les note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , et on a donc

$$A_{12}(x) = \xi \frac{\Lambda(x)}{T(x)},$$

où

$$(23) \quad \xi = \sum_{i=1}^{n+2} t_i A_{12}^i, \quad \Lambda(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k), \quad T(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i).$$

Étant donnée la dernière partie du lemme 2.3.1, le schéma de Riemann de l'équation (20) est donné par

$$(24) \quad \begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ \theta_i^+ & \theta_\infty^+ & 0 \\ \theta_i^- & \theta_\infty^- + 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} i = 1, \dots, n + 2, \\ k = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

et les singularités  $x = \lambda_k$  sont apparentes. La différence entre les exposants en l'infini du système  $(A_0)$  et de l'équation (20) provient de la normalisation en l'infini : puisque la matrice  $A_\infty$  est diagonale, la solution canonique en l'infini  $\mathbf{Y}_\infty(x)$  du système  $(A_0)$  s'écrit

$$\mathbf{Y}_\infty(x) = \left( \mathbf{I}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right) x^{-A_\infty},$$

et donc la fonction  $(\mathbf{Y}_\infty(x))_{1,1}$  est d'exposant  $\theta_\infty^+$ , mais la fonction  $(\mathbf{Y}_\infty(x))_{1,2}$  est d'exposant  $\theta_\infty^- + 1$ .

**2.3.2. Les systèmes fuchsien associés à une équation fuchsienne.** — On considère une équation fuchsienne du second ordre définie sur la sphère de Riemann

$$(25) \quad D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0,$$

de schéma de Riemann (24), dont les singularités sont distinctes, telle que ses exposants vérifient  $\theta_i^+ - \theta_i^- \notin \mathbb{Z}$  ( $i = 1, \dots, n + 3$ ), et que les singularités  $x = \lambda_k$  sont apparentes. On peut caractériser l'ensemble des systèmes fuchsien  $(A_0)$  normalisés en l'infini qui définissent au sens du lemme 2.3.1 l'équation (25). On vient de voir que si un tel système existe, alors son coefficient  $A_{12}(x)$  est entièrement déterminé par les paramètres  $t_i$  et  $\lambda_k$  de l'équation (25) et le paramètre supplémentaire  $\xi$ , qui est indépendant de l'équation. Il en est en fait de même pour les autres coefficients de  $A(x)$ . Dans [23] est donnée l'expression explicite des matrices  $A_i$  en fonction de ces paramètres (proposition 6.3.1, p. 208). Comme un résultat aussi précis ne nous sera pas utile par la suite, on se contente ici de donner l'existence de ces systèmes et de préciser leur dépendance en  $\xi$ . Comme on n'impose à l'avance aucune normalisation en l'infini, on obtient « deux fois plus » de systèmes que dans [23], *i.e.* on obtient deux familles à un paramètre de systèmes, à la place d'une seule. Dans la résolution du problème de Plateau, on aura en effet besoin de pouvoir choisir la normalisation en l'infini. On ne donne pas la démonstration de la proposition suivante (on pourra se reporter à [23] ou à [10], proposition 3.8).

PROPOSITION 2.3.3. — *L'ensemble des systèmes fuchsien  $(A_0)$  normalisés en l'infini associés au sens du lemme 2.3.1 à l'équation (25) est constitué de deux familles à un paramètre :*

$$DY = A_\xi^+(x)Y \quad (\xi \in \mathbb{C}^*) \quad \text{et} \quad DY = A_\xi^-(x)Y \quad (\xi \in \mathbb{C}^*).$$

*Ces deux familles se caractérisent par leur normalisation en l'infini : pour tout  $\xi \in \mathbb{C}^*$*

$$(A_\xi^+)_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A_\xi^-)_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^- - 1 & 0 \\ 0 & \theta_\infty^+ - 1 \end{pmatrix}.$$

*De plus,*

$$A_\xi^\pm(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} A_0^\pm(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

*où les matrices  $A_0^+(x)$  et  $A_0^-(x)$  sont explicitement déterminées par l'équation (25).*

Remarquons que la proposition 2.3.3 permet d'étudier les liens entre le système de Garnier et le système de Schlesinger, qui sont étudiés en détail dans [23], mais qui ne nous seront finalement pas utiles dans la suite.

## CHAPITRE 3

### ÉQUATION ASSOCIÉE À UN DISQUE MINIMAL À BORD POLYGONAL

Dans ce chapitre, on se donne une immersion conforme minimale  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  du demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$  dont l'image est limitée par un polygone  $P$  à  $n + 3$  sommets. On note  $Y_0 = (G, H) : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^2$  ses données de Weierstrass spinorielles. On suppose que  $X$  n'est pas contenue dans un plan, et on voit alors facilement que les fonctions  $G$  et  $H$  sont linéairement indépendantes : la fonction  $Y_0$  constitue un système fondamental de solutions d'une unique équation différentielle linéaire du second ordre

$$(E) \quad D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0$$

où  $D = d/dx$  désigne la dérivation par rapport à  $x$ . Les solutions de (E) sont les fonctions  $y$  définies dans  $\mathbb{C}_+$  telles que le déterminant suivant soit identiquement nul

$$\begin{vmatrix} G & H & y \\ G' & H' & y' \\ G'' & H'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa troisième colonne, on obtient que les coefficients de l'équation (E), qui sont définis dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$ , s'expriment en fonction des données  $G$  et  $H$  par

$$p(x) = -\frac{GH'' - HG''}{GH' - HG'} \quad \text{et} \quad q(x) = \frac{G'H'' - H'G''}{GH' - HG'}.$$

Rappelons que le projeté stéréographique nord du vecteur de Gauss de l'immersion  $X$  est donné par  $g = -G/H$ , et, par (10), le schwarzien de  $g$  est donc relié aux coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  par

$$S_x(g) = 2q(x) - \frac{1}{2}p(x)^2 - p'(x).$$

La différentielle de Hopf (2) est donnée par le wronskien du système fondamental  $Y_0$

$$Q = i(GH' - HG')dx^2 = i \exp\left(-\int p\right)dx^2.$$

On peut tout de suite observer que les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$ , qui sont méromorphes dans  $\mathbb{C}_+$ , ont deux types de singularités :

- ▷ les antécédents  $t_i$  des sommets du polygone, en lesquels  $Y_0$  est singulière,
- ▷ les ombilics de l'immersion  $X$ , *i.e.* les zéros de sa différentielle de Hopf, en lesquels la fonction  $Y_0$ , et donc toute solution de l'équation  $(E)$ , est holomorphe.

Les ombilics sont donc des singularités fuchsiennes *apparentes* (définition 2.1.8). On verra que les  $t_i$  sont également des singularités fuchsiennes.

On peut définir une équation  $(E)$  à partir de toute surface minimale qui n'est pas contenue dans un plan. Différentes immersions conformes minimales peuvent définir la même équation. À la proposition 1.4.1, on a vu qu'une rotation de la surface représentée par  $X$  se traduit par une transformation linéaire sur  $Y_0$ . Une telle transformation ne change donc pas l'équation  $(E)$ . De même, la famille associée d'immersions conformes minimales  $X_\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{S}^2$ ), qui ont pour données de Weierstrass  $\lambda \cdot Y_0$ , et en particulier l'immersion conjuguée à  $X$ , définissent la même équation que l'immersion  $X$ . Pour étudier l'équation  $(E)$ , on pourra donc transformer le système  $Y_0$  par toute application linéaire inversible, et par exemple changer la position du repère orthonormal  $(O, e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Le but de ce chapitre est d'obtenir une caractérisation des équations différentielles linéaires du second ordre qui proviennent, dans le sens que l'on vient de donner, d'une surface minimale à bord polygonal. On va voir que certaines propriétés géométriques de l'immersion  $X$  se traduisent élégamment en terme de propriétés analytiques de l'équation  $(E)$ , comme la nature des singularités et leurs exposants (proposition 3.2.4 et lemme 3.3.1). On va montrer que l'équation  $(E)$  est fuchsienne réelle et que sa monodromie est entièrement déterminée par la direction des côtés du polygone  $P$  (proposition 3.2.3). Le contenu de ce chapitre était connu avant que Garnier ne s'attaque au problème de Plateau. Les résultats connus à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle sont rassemblés par Darboux au chapitre XIII de [9]. On y ajoute, et ceci ne figure pas non plus dans l'article de Garnier, des précisions sur l'orientation du polygone, l'expression de la monodromie de l'équation et surtout la démonstration de la proposition 3.4.2, qui assure la validité de la méthode de résolution proposée par Garnier. On décrit également plus précisément les ensembles de surfaces que l'on va construire, et les ensembles correspondants d'équations.

### 3.1. Disques minimaux à bord polygonal

On commence par introduire les espaces et les notations appropriés pour les disques minimaux que l'on souhaite construire, et pour leurs bords polygonaux. On va voir tout d'abord que l'on doit imposer certaines conditions naturelles sur ces polygones, ainsi que d'autres conditions qui sont peut-être moins naturelles, mais dont on aura besoin dans la résolution du problème de Plateau.

Soit un polygone  $P$  à  $n+3$  sommets distincts de  $\mathbb{R}^3$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On note  $a_1, \dots, a_{n+3}$  ses sommets, et pour tout  $i = 1, \dots, n+3$

$$\ell_i = \|a_i a_{i+1}\| > 0$$

la longueur du  $i$ -ième côté, et

$$u_i = \frac{1}{\ell_i} \overrightarrow{a_i a_{i+1}}$$

le vecteur unitaire qui dirige et oriente le  $i$ -ième côté de  $P$ . On note également par  $D_i$  la direction vectorielle orientée du vecteur  $u_i$ . On a la condition de fermeture du polygone

$$(26) \quad \sum_{i=1}^{n+3} \ell_i u_i = 0.$$

L'ensemble des polygones non plans à  $n+3$  sommets est paramétré par un point de  $\mathbb{R}^3$ ,  $n$  nombres réels non nuls et  $n+3$  vecteurs unitaires formant une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Comme on peut extraire une base de cette famille génératrice, les trois longueurs manquantes seront définies de manière unique par la condition de fermeture (26), mais les côtés correspondant du polygone ne seront pas nécessairement orientés par les vecteurs unitaires que l'on s'est donnés (les longueurs  $\ell_i$  peuvent être négatives). Il ne paraît donc pas très naturel de paramétrer un polygone par ses directions *orientées*. Pourtant, la méthode de Garnier permet de prescrire la direction et l'orientation des côtés des bords polygonaux des surfaces minimales que l'on construit. En contrepartie, elle ne nous permettra pas de contrôler la fermeture de ces bords : on va obtenir des polygones qui ne sont pas nécessairement des courbes fermées, ce sont des lignes brisées éventuellement infinies.

**DÉFINITION 3.1.1.** — On appelle *polygone à  $n+3$  sommets* de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  la donnée de  $n+2$  points  $a_1, \dots, a_{n+2}$  de  $\mathbb{R}^3$  et de deux directions orientées  $D_{n+2}$  et  $D_{n+3}$ .

En quelque sorte, un polygone de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  est un polygone dont le dernier sommet  $a_{n+3}$  peut être en l'infini. Les polygones de  $\mathbb{R}^3$  sont les polygones de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  dont le premier et le dernier côtés sont sécants, c'est-à-dire tels que les demi-droites affines  $(a_{n+2}, D_{n+2})$  et  $(a_1, -D_{n+3})$  sont sécantes; le point d'intersection est le sommet supplémentaire  $a_{n+3} \in \mathbb{R}^3$ .

Par abus de langage, on appellera simplement *polygone* tout polygone de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

On dit qu'un polygone  $P$  est *non dégénéré* si aucun des produits vectoriels  $u_{i-1} \times u_i$  n'est nul ( $i = 1, \dots, n+3$ , les indices se comprennent modulo  $n+3$ ). On peut alors définir en chacun de ses sommets  $a_i$  :

- ▷ la mesure  $\theta_i \pi$  de l'angle extérieur à  $P$  (*i.e.* l'angle entre les vecteurs  $u_{i-1}$  et  $u_i$ ) telle que  $0 < \theta_i < 1$ ;

▷ le vecteur unitaire normal au polygone  $P$  au sommet  $a_i$

$$v_i = \frac{-u_{i-1} \times u_i}{\|u_{i-1} \times u_i\|}.$$

Tous les résultats des chapitres 3 et 4 s'appliquent à l'ensemble des polygones non plans et non dégénérés. Mais pour résoudre le problème de Plateau, on sera amené, au chapitre 5, à imposer des restrictions supplémentaires sur les polygones que l'on considère. Comme on va procéder par récurrence, il faut introduire une famille de polygones telle que les conditions sur les directions des côtés se transmettent à des sous-ensembles de directions.

DÉFINITION 3.1.2. — On définit l'ensemble  $\mathcal{D}^n$  des  $(n+3)$ -uplets  $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$  de directions orientées de  $\mathbb{R}^3$  qui vérifient les deux conditions suivantes

- ▷ deux directions quelconques  $D_i$  et  $D_j$  ( $i \neq j$ ) ne sont pas colinéaires ;
- ▷ pour tout  $i \neq n+1, n+2$ , les directions  $D_i, D_{n+1}$  et  $D_{n+2}$  ne sont pas coplanaires.

On appellera un élément de  $\mathcal{D}^n$  un *jeu de directions orientées*.

Si les directions  $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$  d'un polygone  $P$  sont dans  $\mathcal{D}^n$ , alors tous ses « sous-polygones » — obtenus en éliminant des côtés de  $P$  en faisant fusionner des sommets successifs — seront non plans et non dégénérés.

Dans la résolution du problème de Plateau, on va construire des surfaces minimales, et donc des polygones, définies à translations et homothéties de rapport positif près. Les directions orientées sont invariantes par l'action de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$ . On introduit donc :

DÉFINITION 3.1.3. — Pour tout jeu  $D \in \mathcal{D}^n$ , on définit le quotient  $\mathcal{P}_D^n$  de l'ensemble des polygones à  $n+3$  sommets distincts de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  dont le jeu de directions orientées soit  $D$  par le groupe  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$  des translations et des homothéties de rapport positif.

Les ensembles  $\mathcal{P}_D^n$  ne sont jamais vides, puisqu'il n'y a pas de condition de fermeture. Pour tout jeu  $D \in \mathcal{D}^n$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$  contient en particulier tous les polygones fermés de  $\mathbb{R}^3$  de directions orientées  $D$ . Sur chaque ensemble  $\mathcal{P}_D^n$ , un système de coordonnées est donné par le choix de  $n$  rapports de longueur entre les  $n+1$  longueurs qui sont toujours finies. On choisit le système de coordonnées défini par

$$(27) \quad (r_1, \dots, r_n) : \mathcal{P}_D^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n, \quad r_i(P) = \frac{\|a_i a_{i+1}\|}{\|a_{n+1} a_{n+2}\|},$$

où  $a_1, \dots, a_{n+2}$  sont les sommets d'un représentant de  $P \in \mathcal{P}_D^n$ . On a alors l'isomorphisme

$$\mathcal{P}_D^n \simeq ]0, +\infty[^n.$$

Décrivons à présent l'ensemble des surfaces minimales que l'on va construire par la méthode de Garnier, et dont les bords sont des éléments de  $\mathcal{P}_D^n$ . On souhaite construire des surfaces minimales qui ne se recouvrent pas elles-mêmes aux sommets de leur

bord polygonal, et qui seront donc localement plongée au voisinage des sommets. En conservant les notations précédentes, cela signifie qu'elles font au sommet  $a_i$  ou bien un angle saillant (*i.e.* compris entre 0 et  $\pi$ ) de  $(1 - \theta_i)\pi$  ou bien un angle rentrant (*i.e.* compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ ) de  $(1 + \theta_i)\pi$ . Au sommet  $a_{n+3}$ , puisqu'on autorise un bout hélicoïdal, on suppose que les surfaces ont nécessairement un angle saillant, de manière à ce qu'elles puissent « se refermer correctement » au cours de la déformation isomonodromique.

Les surfaces que l'on va construire sont les éléments des ensembles suivants. Comme on ne considère que des surfaces ayant la topologie du disque, on peut toujours supposer qu'elles sont représentées sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$ .

**DÉFINITION 3.1.4.** — Pour tout jeu  $D \in \mathcal{D}^n$ , on définit le quotient  $\mathcal{X}_D^n$  par le groupe  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$  des translations et des homothéties de rapport positif de l'ensemble des immersions conformes minimales  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  telles que :

- ▷  $X$  s'étend continûment à  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $X|_{\overline{\mathbb{R}}}$  représente un polygone  $P \in \mathcal{P}_D^n$ , et  $X$  n'a pas de point de branchement au bord, excepté peut-être en les sommets de  $P$  ;
- ▷  $X$  a au sommet  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ) un angle de  $(1 - \varepsilon_i \theta_i)\pi$ , où  $\varepsilon_i = \pm 1$ , et au sommet  $a_{n+3}$  un angle de  $(1 - \theta_{n+3})\pi$  ;
- ▷ si le dernier sommet,  $a_{n+3}$ , du polygone  $P$  est en l'infini, alors  $X$  a un bout hélicoïdal ;
- ▷ si  $a_{n+3} \in \mathbb{R}^3$ , *i.e.* si les demi-droites issues de  $a_1$  et de  $a_{n+2}$  et dirigées respectivement par  $-D_{n+3}$  et  $D_{n+2}$  sont sécantes, alors la surface représentée par  $X$  est bornée dans  $\mathbb{R}^3$ .

On continue à appeler *immersions* les éléments des ensembles  $\mathcal{X}_D^n$ , même s'il s'agit de classes d'équivalence d'immersions. Soit  $X$  une immersion de  $\mathcal{X}_D^n$ . On note  $P \in \mathcal{P}_D^n$  son bord polygonal, et

$$Y_0 = (G, H) : \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ses données de Weierstrass. La fonction  $Y_0$  est holomorphe dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$  et l'immersion  $X$  est donnée par

$$X(x) = \Re \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} i(G(\xi)^2 - H(\xi)^2) \\ G(\xi)^2 + H(\xi)^2 \\ 2iG(\xi)H(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

où  $x_0$  est un point arbitraire de  $\mathbb{C}_+$  (puisque  $X$  est définie à translation près). On définit les points

$$t_1 < \dots < t_{n+3}$$

de  $\overline{\mathbb{R}}$  qui sont les antécédents des sommets de  $P$  par l'immersion  $X$ . Quitte à composer  $X$  par une homographie, on peut toujours supposer

$$t_{n+1} = 0, \quad t_{n+2} = 1, \quad t_{n+3} = \infty.$$

D'après la première des conditions de la définition précédente, la fonction  $Y_0$  est continue et non nulle sur chacun des intervalles  $]t_i, t_{i+1}[$ . Cette hypothèse est naturelle si l'on veut pouvoir prolonger la surface à travers chacun des côtés du polygone  $P$ , et appliquer le principe de réflexion de Schwarz. Sous cette hypothèse, l'application de Gauss  $N(x)$  de l'immersion  $X$  admet une limite en chaque sommet de  $P$ , qui est orthogonale aux côtés adjacents au sommet. On note  $N(t_i)$  le vecteur de Gauss limite en  $x = t_i$ , il vérifie  $N(t_i) = \pm v_i$ . On verra à la section 3.2.3 que la deuxième des conditions implique que l'immersion  $X$  a un point de branchement au bord en un sommet  $a_i$  si et seulement si elle a un angle rentrant, *i.e.* si  $\varepsilon_i = -1$ . L'ordre du point de branchement est alors 1.

### 3.2. Monodromie et propriétés de réalité

On note  $S(t)$  l'ensemble des singularités de l'immersion  $X$

$$S(t) := \{t_1, \dots, t_{n+3}\} \subset \overline{\mathbb{R}}$$

où  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . On va voir que l'équation (E) est bien définie dans la sphère de Riemann, tandis que les données de Weierstrass  $G(x)$  et  $H(x)$  ont des points de branchement en les points  $x = t_i$ , et sont donc holomorphes dans le revêtement universel de l'ensemble  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ . On va déterminer, par des considérations géométriques, le comportement et la monodromie des fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  en ces singularités. On va voir que ceux-ci sont reliés aux propriétés de réalité de l'immersion  $X$ .

**3.2.1. Propriétés de réalité.** — La proposition suivante est une conséquence directe du lemme 1.4.2. Elle assure en particulier que les points  $x = t_i$  ne sont donc pas des points de branchement pour les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$ .

**PROPOSITION 3.2.1.** — *Les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  de l'équation (E) sont à valeurs réelles dans  $\overline{\mathbb{R}} \setminus S(t)$  et s'étendent en des fonctions méromorphes et uniformes dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ .*

*Démonstration.* — Pour montrer que les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  sont réels sur l'axe réel, il suffit de trouver pour tout  $i = 1, \dots, n+3$  un système fondamental de solutions  $(G_i(x), H_i(x))$  dont les composantes soient toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ . Par le lemme 1.4.2, on sait qu'il existe une matrice  $S_i \in \text{SU}(2)$  telle que le système fondamental  $(G_i(x), H_i(x)) = Y_0(x) \cdot S_i$  convienne. On peut choisir la matrice  $S_i$  telle que le système  $Y_0(x) \cdot S_i$  soit réel sur  $]t_i, t_{i+1}[$ . La matrice  $S_i$  est un relevé d'une rotation envoyant le vecteur  $u_i$  sur le deuxième vecteur de base  $e_2 = (0, 1, 0)$ , ou sur son opposé  $(0, -1, 0)$ .

On peut donc prolonger les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  au demi-plan inférieur  $\mathbb{C}_- = \{x \in \mathbb{C} \mid \Im(x) < 0\}$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{C}_-$ ,

$$p(x) = \overline{p(\bar{x})}, \quad q(x) = \overline{q(\bar{x})},$$

et on obtient ainsi qu'elles sont méromorphes dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ .  $\square$

Comme les propriétés de réalité jouent un rôle essentiel dans l'étude de l'équation (E), on introduit l'application suivante  $\tau$  définie sur le faisceau des fonctions méromorphes  $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}$ , qui à une fonction méromorphe dans un ouvert  $\Omega$  associe sa « conjuguée » définie dans  $\overline{\Omega}$ , dans le sens suivant :

$$(28) \quad \tau : \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}(\overline{\Omega}), \quad f \longmapsto \tau(f) = (x \mapsto f(\bar{x})).$$

L'application  $\tau$  est anti-linéaire. Si  $\Omega = \overline{\Omega}$ , alors pour toute fonction  $f$  méromorphe dans  $\Omega$ , on a

$$\tau(f) = f \iff f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \overline{\mathbb{R}}, \quad \tau(f) = -f \iff f(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset i\overline{\mathbb{R}}.$$

La fonction holomorphe  $\tau(Y_0) = (\tau(G), \tau(H)) : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}^2$  constitue également les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale  $X^- : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Un calcul rapide montre que cette immersion représente la surface minimale symétrique de  $X(\mathbb{C}_+)$  par rapport au second axe de coordonnées  $(O, e_2)$ . Comme la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est un relevé du demi-tour par rapport au second axe de coordonnées, on obtient :

LEMME 3.2.2. — *Soit une fonction holomorphe  $Y : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Alors, les deux fonctions*

$$Y : \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad \tau(Y) \cdot J : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

*sont les données de Weierstrass de la même surface minimale.*

On obtient ainsi le principe de réflexion de Schwarz. En effet, de même que les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$ , pour tout  $i = 1, \dots, n+3$ , le système fondamental  $(G_i(x), H_i(x))$  introduit à la démonstration de la proposition 3.2.1 se prolonge analytiquement au demi-plan inférieur  $\mathbb{C}_-$  à travers l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$  en posant pour tout  $x \in \mathbb{C}_-$

$$(G_i, H_i)(x) = \tau((G_i, H_i))(x).$$

Le système  $(G_i, H_i)$  est alors holomorphe dans l'ouvert simplement connexe  $U_i$

$$U_i = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup ]t_i, t_{i+1}[.$$

L'immersion de données de Weierstrass  $(G_i, H_i)$  se prolonge donc également en une immersion définie dans l'ouvert  $U_i$ , et le lemme 3.2.2 nous dit qu'elle définit une surface minimale symétrique par rapport au second axe de coordonnées  $(O, e_2)$ . Comme on a

$$(G \ H) = (G_i \ H_i) S_i^{-1},$$

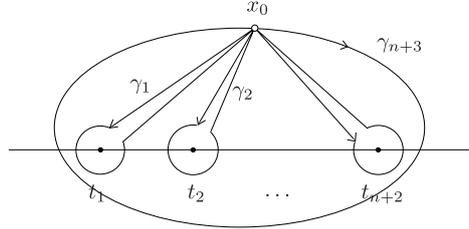


FIGURE 1. Les lacets  $\gamma_i$

on obtient ainsi  $n + 3$  prolongements  $Y_i(x)$  du système  $Y_0(x)$  à travers chacun des intervalles  $]t_i, t_{i+1}[$  :

$$(29) \quad Y_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad Y_i|_{\mathbb{C}_+} = Y_0.$$

Chacun de ces prolongements induit un prolongement  $X^i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  de l'immersion  $X$ , qui représente dans  $\mathbb{C}_-$  la surface minimale symétrique de  $X(\mathbb{C}_+)$  par rapport au  $i$ -ième côté du polygone  $P$ . De plus, les points symétriques sur la surface minimale ont des antécédents par l'immersion  $X^i$  qui sont conjugués. Ceci nous permet de déterminer la monodromie de l'équation (E).

**3.2.2. Monodromie.** — L'étude précédente des propriétés de réalité de l'immersion  $X$  et de l'équation (E) nous permet de déterminer comment le système fondamental  $Y_0(x)$  est transformé autour de chaque singularité  $x = t_i$ , c'est-à-dire de déterminer un système de générateurs de la monodromie de l'équation (E). On fixe un point  $x_0$  dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0)$  est engendré par les classes de lacets  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+3}$  basés en  $x_0$ , qui sont représentés à la figure 1. On note  $M_1, \dots, M_{n+3}$  les matrices de monodromie du système fondamental de solutions  $Y_0(x)$  le long des classes de lacets  $\gamma_i$  :

$$(30) \quad M_i := M_{\gamma_i}(Y_0).$$

Ces matrices constituent un système de générateurs de la monodromie de l'équation (E).

**PROPOSITION 3.2.3.** — *Les matrices de monodromie  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) du système fondamental de solutions  $Y_0(x)$  le long des lacets  $\gamma_i$  s'écrivent*

$$(31) \quad M_i = D_i D_{i-1}^{-1},$$

où pour tout  $i = 1, \dots, n + 3$ , la matrice  $D_i$  est un relevé dans  $SU(2)$  du demi-tour vectoriel d'axe  $u_i$ .

Par cette proposition, on obtient que la monodromie de l'équation (E) est déterminée par les directions des côtés du polygone  $P$ . L'expression des matrices  $M_i$  sous la forme de produit de demi-tours successifs n'est donnée ni par Darboux, ni par

Garnier. Cette expression sera pourtant essentielle pour établir que les déformations isomonodromiques que l'on va construire définissent bien des solutions du problème de Plateau (par la proposition 4.2.4), fait qui n'est jamais justifié par Garnier.

*Démonstration.* — On note  $\gamma_i * Y_0(x)$  le prolongement du système fondamental  $Y_0(x)$  le long du lacet  $\gamma_i$ . Ce prolongement est également holomorphe dans  $\mathbb{C}_+$ , et c'est encore un système fondamental de solutions de l'équation (E), étant donné que les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  sont uniformes dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ . La matrice  $M_i$  est l'unique matrice inversible qui satisfait

$$\gamma_i * Y_0(x) = Y_0(x)M_i.$$

Le système fondamental  $\gamma_i * Y_0(x)$  constitue les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale. Pour déterminer la matrice de monodromie  $M_i$ , on compare cette immersion à l'immersion  $X$ . Lorsqu'on suit le lacet  $\gamma_i$ , on croise d'abord l'axe réel entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$  et l'immersion  $X$  se prolonge donc en définissant la surface minimale symétrique de  $X(\mathbb{C}_+)$  par rapport au  $(i-1)$ -ième côté de  $P$ ; puis on croise l'axe réel entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  et on fait un nouveau demi-tour par rapport au  $i$ -ième côté de la surface obtenue à l'étape précédente. L'immersion de données de Weierstrass  $\gamma_i * Y_0(x)$  est donc l'image de l'immersion  $X$  par le produit de ces deux demi-tours, c'est-à-dire par la rotation d'axe  $v_i$  et d'angle  $2\pi\theta_i$ . On en déduit que la matrice  $M_i$  est un des deux relevés de cette rotation. Ceci constitue le résultat qu'obtiennent Darboux et Garnier.

On veut pouvoir comparer les relevés des demi-tours intervenant dans des matrices de monodromie successives  $M_i$  et  $M_{i+1}$ , c'est-à-dire, en fait, associer un unique relevé au demi-tour autour du  $i$ -ième côté de  $P$ . On vient de voir que l'immersion  $X^i : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de données de Weierstrass  $Y_i : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}^2$  définies par (29), représente la surface minimale symétrique de la surface initiale par rapport au  $i$ -ième côté de  $P$ . D'après le lemme 3.2.2, il existe donc un relevé  $D_i \in \text{SU}(2)$  du demi-tour autour de ce côté tel que pour tout  $x \in \mathbb{C}_+$  on ait

$$Y_0(x) \cdot D_i = \tau(Y_i)(x) \cdot J,$$

ce qui s'écrit

$$Y_0(x) = -\tau(Y_i \cdot J \cdot \bar{D}_i)(x),$$

vu que les matrices  $A \in \text{SU}(2)$  qui sont des relevés de demi-tours sont caractérisées par l'équation  $A^2 = -I_2$ . En écrivant la relation précédente pour les systèmes  $Y_{i-1}(x)$  et  $Y_i(x)$ , on trouve que pour tout  $x \in \mathbb{C}_-$  on a

$$Y_{i-1}(x) \cdot J \cdot \bar{D}_{i-1} = Y_i(x) \cdot J \cdot \bar{D}_i,$$

ce qui, par l'identité (6), donne

$$Y_{i-1}(x) = Y_i(x) \cdot D_i \cdot D_{i-1}^{-1}.$$

Or la matrice  $M_i$  est l'unique matrice qui vérifie

$$Y_{i-1}(x) = Y_i(x) \cdot M_i,$$

ce qui donne le résultat annoncé.  $\square$

**3.2.3. Exposants en les sommets du polygone.** — Pour l'instant, la monodromie de l'équation  $(E)$  n'est pas entièrement déterminée à partir du bord polygonal de l'immersion  $X$ , puisqu'elle dépend du choix des relevés de chaque demi-tour  $D_i$ . L'étude locale de l'immersion  $X$  au voisinage des singularités  $x = t_i$  va nous permettre de lever cette indétermination. Ceci nous permet également de calculer précisément les exposants de l'équation  $(E)$ , qui ne sont donnés par la monodromie qu'à un entier près.

Rappelons que l'immersion  $X$  fait au sommet  $a_i$  (avec  $i = 1, \dots, n+2$ ) un angle de  $(1 - \varepsilon_i \theta_i)\pi$ , où  $\varepsilon_i = \pm 1$ , et au sommet  $a_{n+3}$ , un angle de  $(1 - \theta_{n+3})\pi$ , que la surface ait un bout en  $a_{n+3}$  ou qu'elle soit bornée.

PROPOSITION 3.2.4. — *Les points  $x = t_1, \dots, t_{n+3}$  sont des singularités fuchsienues et non logarithmiques de l'équation  $(E)$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n+2$ , les exposants en  $x = t_i$  sont de la forme*

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_i \theta_i, \quad r_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i \theta_i \quad (r_i \in \mathbb{N}).$$

De plus, si  $\varepsilon_i = -1$ , alors  $r_i \geq 1$ . Les exposants au point  $x = \infty$  sont de la forme

$$1 - \frac{1}{2}\theta_{n+3}, \quad r_{n+3} - 1 + \frac{1}{2}\theta_{n+3} \quad (r_{n+3} \in \mathbb{N}^*).$$

De plus, la surface a un bout hélicoïdal en  $x = \infty$  si et seulement si  $r_{n+3} = 1$ .

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que la singularité  $x = t_i$  est fuchsienne. Comme on s'intéresse à présent à des propriétés locales de l'équation  $(E)$ , on peut choisir la position du repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$  tel que le vecteur normal  $v_i$  coïncide avec le troisième vecteur de base  $e_3 = (0, 0, 1)$ . On note toujours  $Y_0 = (G, H)$  les données de Weierstrass correspondant à cette position, et  $X$  l'immersion associée. La matrice de monodromie  $M_i$  du système  $Y_0(x)$  est alors un relevé de la rotation d'axe  $(O, e_3)$  et d'angle  $2\pi\theta_i$  et elle s'écrit donc

$$(32) \quad M_i = \delta_i \begin{pmatrix} e^{i\theta_i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_i\pi} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \delta_i = +1 \text{ ou } -1.$$

Les fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  sont donc de la forme

$$G(x) = (x - t_i)^{\frac{1}{4}(1-\delta_i)+\frac{1}{2}\theta_i} \varphi(x), \quad H(x) = (x - t_i)^{-\frac{1}{4}(1-\delta_i)-\frac{1}{2}\theta_i} \psi(x)$$

où les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  sont uniformes au voisinage de  $x = t_i$ . Comme les primitives

$$\int_{x_0}^x G(\xi)^2 d\xi, \quad \int_{x_0}^x H(\xi)^2 d\xi, \quad \int_{x_0}^x G(\xi)H(\xi) d\xi$$

qui interviennent dans l'expression de l'immersion  $X$  prennent des valeurs finies en  $x = t_i$ , les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  n'ont pas de singularité essentielle en  $x = t_i$ , et sont donc méromorphes en ce point. On en conclut donc que la singularité  $x = t_i$  est fuchsienne. Comme la matrice  $M_i$  est diagonalisable, cette singularité n'est pas logarithmique. Chacun des deux exposants est déterminé à un entier près, et leur somme est un entier relatif.

Pour être plus précis sur la valeur des exposants, il faut étudier le comportement du système fondamental  $Y_0(x)$  en utilisant l'expression de l'immersion  $X$  aux sommets du polygone. Soient  $s_1^i$  et  $s_2^i$  les exposants en  $x = t_i$ ,  $s_1^i < s_2^i$ . Leur somme  $r_i := s_1^i + s_2^i$  est un entier relatif. Supposons tout d'abord  $i \neq n + 3$ . On a vu que le fait de supposer  $v_i = e_3$  implique que le système fondamental  $Y_0(x)$  est canonique en  $x = t_i$ . Comme la projection stéréographique nord de  $N(x)$  est  $-G(x)/H(x)$ , on voit que si le vecteur de Gauss  $N(t_i)$  est égal à  $e_3$ , alors la fonction  $H(x)$  est canonique pour l'exposant le plus grand  $s_2^i$ , et si  $N(t_i)$  est égal à  $-e_3$ , alors  $G(x)$  est canonique pour  $s_2^i$ . Supposons par exemple que  $N(t_i) = e_3$ . On a alors en  $x = t_i$  les équivalents

$$G(x) \sim a(x - t_i)^{s_1^i}, \quad H(x) \sim b(x - t_i)^{r_i - s_1^i},$$

où les constantes  $a$  et  $b$  sont non nulles. À une rotation d'axe  $(O, e_3)$  près, on peut supposer ces constantes réelles. On en déduit, si  $r_i \neq -1$ ,

$$(33) \quad X(x) - X(t_i) \sim \Re \left( \begin{array}{c} \frac{ia^2}{2s_1^i + 1} (x - t_i)^{2s_1^i + 1} \\ \frac{a^2}{2s_1^i + 1} (x - t_i)^{2s_1^i + 1} \\ \frac{2iab}{r_i + 1} (x - t_i)^{r_i + 1} \end{array} \right).$$

Mais on ne peut pas avoir  $r_i = -1$ , car alors l'immersion  $X$  serait asymptote à une hélicoïde en  $x = t_i$ ; on ne peut pas non plus avoir  $r_i < -1$ , vu que l'immersion  $X$  est à valeurs finies en  $x = t_i$ . Lorsque, dans l'équivalent précédent, la quantité  $x - t_i$  prend des valeurs réelles infiniment petites, positives puis négatives, on voit que la quantité  $(2s_1^i + 1)\pi$  est l'angle que fait la surface minimale au sommet  $a_i$ , c'est-à-dire  $2s_1^i + 1 = 1 - \varepsilon_i \theta_i$ . On obtient donc

$$s_1^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_i \theta_i, \quad s_2^i = r_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i \theta_i,$$

et lorsque  $\varepsilon_i = -1$ , l'inégalité  $s_1^i < s_2^i$  donne la minoration  $r_i \geq 1$ .

Pour déterminer les exposants au point  $x = \infty$ , on fait le changement de variables  $w = 1/x$  dans l'immersion  $X$

$$X\left(\frac{1}{w}\right) = -\Re \int \left( \begin{array}{c} i(G^2(\frac{1}{w}) - H^2(\frac{1}{w})) \\ G^2(\frac{1}{w}) + H^2(\frac{1}{w}) \\ 2iG(\frac{1}{w})H(\frac{1}{w}) \end{array} \right) \frac{dw}{w^2}.$$

On procède comme précédemment en supposant qu'en  $w = 0$  on a les équivalents

$$G\left(\frac{1}{w}\right) \sim aw^{s_1^{n+3}}, \quad H\left(\frac{1}{w}\right) \sim bw^{r_{n+3} - s_1^{n+3}},$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}^*$ . Si l'entier  $r_{n+3}$  est négatif ou nul, alors la surface n'est pas bornée au voisinage de  $w = 0$ , et elle n'a pas de bout hélicoïdal : ce cas est exclu. Si  $r_{n+3} = 1$ , les deux exposants  $2s_1^{n+3} - 1$  et  $2s_2^{n+3} - 1$ , intervenant dans l'expression de  $X$  au voisinage de  $w = 0$ , sont opposés, et donc  $2s_1^{n+3} - 1 < 0 < 2s_2^{n+3} - 1$ . On a alors

$$X\left(\frac{1}{w}\right) \sim \Re \begin{pmatrix} ia'\left(\frac{1}{w}\right)^{1-2s_1^{n+3}} \\ a'\left(\frac{1}{w}\right)^{1-2s_1^{n+3}} \\ ib' \log w \end{pmatrix},$$

la surface a un bout hélicoïdal et  $1 - 2s_1^{n+3} = 1 - \theta_{n+3}$ . Les exposants sont alors

$$s_1^{n+3} = \frac{1}{2}\theta_{n+3}, \quad s_2^{n+3} = 1 - \frac{1}{2}\theta_{n+3}.$$

Si  $r_{n+3} \geq 2$ , la situation est la même qu'en les autres sommets, on obtient  $2s_1^{n+3} - 1 = 1 - \theta_{n+3}$  et donc

$$s_1^{n+3} = 1 - \frac{1}{2}\theta_{n+3}, \quad s_2^{n+3} = r_{n+3} - 1 + \frac{1}{2}\theta_{n+3}.$$

□

On représente figure 2 les différentes configurations locales possibles pour une surface minimale en un sommet d'un polygone. On a choisi un angle intérieur de  $\frac{1}{3}\pi$  au sommet considéré, *i.e.*  $\theta = \frac{2}{3}$ . La surface fait donc un angle saillant de  $\frac{1}{3}\pi$  ( $\varepsilon = 1$ ) ou un angle rentrant de  $\frac{5}{3}\pi$  ( $\varepsilon = -1$ ).

- ▷ Lorsque  $\varepsilon = 1$ , les exposants de l'équation sont  $-\frac{1}{3}$ ,  $r + \frac{1}{3}$  ( $r \geq 0$ ).
- ▷ Lorsque  $\varepsilon = -1$ , les exposants sont  $\frac{1}{3}$ ,  $r - \frac{1}{3}$  ( $r \geq 1$ ).

Les figures 2 (a) et 2 (b) correspondent aux valeurs « minimales » de l'entier  $r$  ( $r = 0$  lorsque  $\varepsilon = 1$ , et  $r = 1$  lorsque  $\varepsilon = -1$ ). Comme on le voit sur les figures 2 (c), 2 (d), lorsque l'entier  $r$  est supérieur à ces valeurs, on peut considérer que le sommet est, en un sens, également un ombilic.

On dira que la situation en un sommet  $a_i \in \mathbb{R}^3$  est *générique* lorsque  $\varepsilon_i = 1$  et  $r_i = 0$ , c'est-à-dire lorsque les exposants sont opposés :  $-\frac{1}{2}\theta_i$  et  $\frac{1}{2}\theta_i$  (figure 2). On peut alors en déduire les autres configurations possibles en ajoutant un entier naturel à l'un des exposants : c'est effectivement ce qui se produira au cours de la déformation isomonodromique. Au sommet  $a_{n+3}$ , on dira que la situation est générique lorsque  $r_{n+3} = 1$ . En particulier, ceci signifie que génériquement, on a un bout hélicoïdal en  $a_{n+3}$ .

REMARQUE 3.2.5. — Un *point de branchement au bord* de l'immersion  $X$  est un point  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que la norme de  $\partial X / \partial x$  tende vers 0 lorsque  $x \in \mathbb{C}_+$  tend vers  $x_0$ . Par définition de l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ , les seuls points de branchement au bord possibles sont les sommets de  $P$ . D'après (33), comme le plus petit des exposants en  $x = t_i$  est  $s_1^i = \frac{1}{2}\varepsilon_i\theta_i$ , on a en  $x = t_i$

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \sim a|x - t_i|^{\varepsilon_i\theta_i} \quad (a > 0).$$

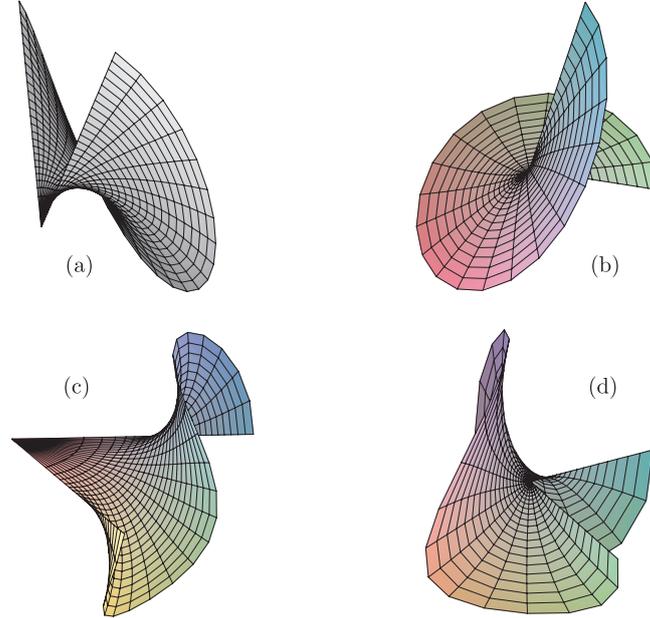


FIGURE 2. (a) Situation générique : angle saillant sans ombilic ( $\theta = \frac{2}{3}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $r = 0$ ). (b) Angle rentrant sans ombilic ( $\theta = \frac{2}{3}$ ,  $\varepsilon = -1$ ,  $r = 1$ ). (c) Angle saillant avec un ombilic ( $\theta = \frac{2}{3}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $r = 1$ ). (d) Angle rentrant avec un ombilic ( $\theta = \frac{2}{3}$ ,  $\varepsilon = -1$ ,  $r = 2$ ).

Le point  $x = t_i$  est donc un point de branchement si et seulement si  $\varepsilon_i = -1$ . Les uniques points de branchement de l'immersion  $X$  sont donc les sommets en lesquels elle a un angle rentrant, et l'ordre de ces points de branchement est 1 (car  $\theta_i < 1$ ).

REMARQUE 3.2.6. — La valeur des exposants donnée à la proposition 3.2.4 implique que les valeurs propres de la matrice  $M_i$  sont  $\exp(\pm i\pi\theta_i)$ , c'est-à-dire que le signe  $\delta_i$  intervenant dans sa diagonalisée (32) est  $+1$  (sauf lorsque  $\theta_i = \frac{1}{2}$ , les cas  $\delta_i = +1$  et  $-1$  étant alors équivalents). On détermine ainsi entièrement la matrice  $M_i$  à partir du polygone  $P$ , puisqu'on a levé la dernière indétermination, à savoir le choix du relevé de la rotation d'axe  $v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)$  et d'angle  $2\theta_i\pi$  : par (5), les matrices  $M_i$  valent donc

$$M_i = \cos(\theta_i\pi) I_2 - i \sin(\theta_i\pi) \begin{pmatrix} -v_i^3 & v_i^1 - iv_i^2 \\ v_i^1 + iv_i^2 & v_i^3 \end{pmatrix}.$$

Cette information supplémentaire provient du fait qu'on a exprimé quelles sont les orientations des côtés du polygone, et non pas seulement leurs directions. En effet, en étudiant le comportement de l'immersion  $X$  au voisinage du point  $x = t_i$ , on a distingué le cas où les côtés adjacents au sommet  $a_i$  sont dirigés par les vecteurs  $u_{i-1}$  et  $u_i$ , du cas où ils sont dirigés par les vecteurs  $-u_{i-1}$  et  $u_i$ . Dans le second cas,

la normale au sommet  $a_i$  est  $-v_i$  et l'angle extérieur est  $(1 - \theta_i)\pi$ . Ces deux cas définissent au sommet  $a_i$  la même rotation, mais le choix du relevé permet de les distinguer. On en déduit donc également que les choix des relevés  $D_i$  des demi-tours sont déterminés par les orientations des côtés du polygone (à une indétermination globale près, puisque si on remplace toutes les matrices  $D_i$  par leurs opposées, on ne change pas les matrices de monodromie  $M_i$ ). À un jeu de directions orientées  $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$  correspond donc un  $(n+3)$ -uplet de relevés de demi-tours autour de ces directions, que l'on note également  $D$ .

Les singularités  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) sont fuchsiennes. Les autres singularités de l'équation  $(E)$  sont les ombilics de l'immersion  $X$  et leurs conjugués, c'est-à-dire des points où le système fondamental de solutions  $Y_0(x)$  est holomorphe. Ces autres singularités sont donc aussi fuchsiennes. On en déduit donc la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.2.7.** — *L'équation  $(E)$  est une équation fuchsienne réelle sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ .*

On dit que l'équation  $(E)$  est réelle pour signifier que ses coefficients  $p(x)$  and  $q(x)$  sont réels sur l'axe réel (proposition 3.2.1).

### 3.3. Singularités apparentes

Les singularités qui nous reste à étudier sont les points où les fonctions  $G$  et  $H$  sont holomorphes, mais où leur wronskien  $GH' - HG'$  s'annule : ce sont les ombilics de l'immersion  $X$ , et leurs conjugués dans le demi-plan inférieur  $\mathbb{C}_-$  (on peut remarquer que, pour une surface minimale, les courbures principales sont nulles en un ombilic). Ces singularités sont fuchsiennes et apparentes (définition 2.1.8) et leurs exposants sont des entiers naturels. Les deux lemmes suivants précisent la valeur de leurs exposants, et le nombre des singularités apparentes.

**LEMME 3.3.1.** — *Les singularités apparentes de l'équation  $(E)$  sont réelles ou conjuguées deux à deux. Deux singularités apparentes qui sont conjuguées ont les mêmes exposants. Les singularités apparentes de l'équation  $(E)$  qui sont réelles ou dans  $\mathbb{C}_+$  sont les ombilics de l'immersion conforme minimale  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Les exposants en une de ces singularités  $x = \lambda$  sont 0 et un entier naturel  $m \geq 2$ , tel que  $m - 1$  soit l'ordre du zéro de la différentielle de Hopf  $Q$  en  $x = \lambda$ .*

*Démonstration.* — Considérons tout d'abord un point régulier quelconque  $x = \lambda$  de l'immersion  $X$ ,  $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus S(t)$ . Comme précédemment, on choisit une position du repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$  tel que le vecteur de Gauss  $N(\lambda)$  de l'immersion  $X$  en  $x = \lambda$

coïncide avec le troisième vecteur de base  $e_3$ . Dans cette position, on a

$$X(x) - X(\lambda) = \Re \begin{pmatrix} (x - \lambda) \varphi_1(x) \\ (x - \lambda) \varphi_2(x) \\ (x - \lambda)^{m+1} \varphi_3(x) \end{pmatrix},$$

où l'entier  $m$  est supérieur ou égal à 1, et où les fonctions  $\varphi_i(x)$  sont holomorphes au voisinage du point  $x = \lambda$ . La fonction  $\varphi_3(x)$  ne s'annule pas en  $x = \lambda$ , ni l'une ou l'autre des fonctions  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$ . Par définition de la différentielle de Hopf, l'entier  $m - 1$  est l'ordre du zéro de  $Q(x)$  en  $x = \lambda$ . Si  $m = 1$ , le point  $x = \lambda$  est un point ordinaire de l'immersion  $X$ , et si  $m \geq 2$ , c'est un ombilic.

Supposons  $m \geq 2$ . De l'expression de l'immersion  $X$  au voisinage de  $x = \lambda$ , on déduit que les fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  satisfont

▷ l'une des primitives  $\int_{\lambda}^x G(\xi)^2 d\xi$  ou  $\int_{\lambda}^x H(\xi)^2 d\xi$  est de la forme  $(x - \lambda)\varphi(x)$ ,

▷ la primitive  $\int_{\lambda}^x G(\xi)H(\xi) d\xi$  est de la forme  $(x - \lambda)^{m+1}\varphi(x)$ ,

où  $\varphi(x)$  désigne toute fonction holomorphe et non nulle au point  $x = \lambda$ . Si on a par exemple

$$\int_{\lambda}^x G(\xi)^2 d\xi = (x - \lambda)\varphi(x),$$

alors  $G(\lambda) \neq 0$  et  $G$  est donc d'exposant 0. De la deuxième assertion on déduit alors

$$H(x) = (x - \lambda)^m \varphi(x).$$

Dans le demi-plan inférieur  $\mathbb{C}_-$ , les singularités sont les conjugués des singularités contenues dans  $\mathbb{C}_+$  (elles correspondent à des points symétriques sur la surface minimale). Comme les exposants en une singularité apparente sont réels, les exposants en deux singularités conjuguées sont les mêmes.  $\square$

L'équation (E) a un nombre fini de singularités. Le lemme suivant donne une majoration du nombre  $N \in \mathbb{N}$  de singularités apparentes.

LEMME 3.3.2. — *L'équation (E) a au plus  $n$  singularités apparentes.*

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer la relation de Fuchs (9) à l'équation (E). On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  les singularités apparentes, et  $m_1, \dots, m_N$  leurs exposants non nuls respectifs. Par la proposition 3.2.4 et le lemme 3.3.1, et comme l'équation (E) possède  $n + 3 + N$  singularités, la relation de Fuchs s'écrit

$$(34) \quad \sum_{i=1}^{n+3} r_i + \sum_{k=1}^N m_k = n + 1 + N.$$

Vu les minoration sur les entiers  $r_i$  et  $m_k$ , on obtient  $N \leq n$ .  $\square$

Si le nombre de singularités apparentes est maximal :  $N = n$ , la valeur des entiers  $r_i$  et  $m_k$  est déterminée par la relation de Fuchs (34), et ils valent alors

$$r_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n + 2), \quad r_{n+3} = 1, \quad m_k = 2 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Toutes les singularités de l'équation  $(E)$  sont donc génériques, et on dit alors que l'immersion  $X$  et l'équation  $(E)$  qui lui est associée sont elles-mêmes génériques. En particulier, la surface minimale fait alors en chaque sommet  $a_i$  un angle saillant, et elle n'a pas de point de branchement au bord. On peut voir le cas  $N < n$  comme provenant de cette situation générique par la fusion de certaines singularités apparentes avec d'autres singularités apparentes ou avec des sommets  $t_i$  : c'est effectivement ce qui se produira au cours de la déformation isomonodromique. La fusion d'une singularité apparente d'exposants 0 et 2 avec une autre singularité augmente l'un des exposants de cette autre singularité d'une unité. En fait, le sens de ce processus de fusion n'est pas évident du point de vue de l'équation  $(E)$  ; l'utilisation des systèmes fuchsien au chapitre suivant rendra ce processus plus clair et plus simple.

REMARQUE 3.3.3. — Comme on l'a vu à la section précédente, la configuration générique en le sommet  $a_{n+3}$  est d'avoir un bout hélicoïdal. Si le bord polygonal de l'immersion  $X$  est une courbe fermée, cela signifie donc qu'une singularité apparente coïncide avec la singularité  $x = \infty$  : ceci transforme les exposants en l'infini de  $(1 - \frac{1}{2}\theta_i, \frac{1}{2}\theta_i)$  à  $(1 - \frac{1}{2}\theta_i, 1 + \frac{1}{2}\theta_i)$ . Le nombre maximal de singularités apparentes est alors  $n - 1$ . Ceci explique pourquoi on considère des disques minimaux ayant pour bord une ligne brisée *pouvant être infinie*. En effet, au chapitre suivant, on sera en particulier amené à résoudre le problème de Riemann-Hilbert pour la monodromie donnée à la proposition 3.2.3. D'après le théorème 2.1.9, on obtiendra alors des équations fuchsien ayant au plus  $n$  singularités apparantes, et non pas  $n - 1$ . Pour construire des déformations isomonodromiques, que ce soit par le système de Garnier ou le système de Schlesinger, on a également besoin génériquement de  $n$  singularités apparentes.

### 3.4. Équations fuchsien associées à un jeu de directions orientées

Pour tout jeu de directions orientées  $D = (D_1, \dots, D_{n+3}) \in \mathcal{D}^n$ , on a montré que pour toute immersion  $X \in \mathcal{X}_D^n$ , l'unique équation différentielle linéaire du second ordre  $(E)$  dont ses données de Weierstrass  $G$  et  $H$  soient solutions satisfait les trois conditions suivantes — où on note toujours  $\theta_i\pi$  l'angle extérieur entre les directions  $D_{i-1}$  et  $D_i$ , et où on identifie directions orientées et relevés de demi-tours (remarque 3.2.6).

- (i) L'équation  $(E)$  est fuchsien sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ . Elle a  $n + 3$  singularités non apparentes distinctes  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$ , et au plus  $n$  singularités apparentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  ( $N \leq n$ ). Son schéma de Riemann est donné par

$$(35) \quad \begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_i\theta_i & 1 - \frac{1}{2}\theta_\infty & 0 \\ r_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i\theta_i & r_\infty - 1 + \frac{1}{2}\theta_\infty & m_k \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n + 2, \\ k = 1, \dots, N, \end{matrix}$$

où  $\varepsilon_i = \pm 1$ , les constantes  $r_i$  et  $m_k$  sont des entiers naturels, qui vérifient de plus :  $r_\infty \geq 1$ ,  $m_k \geq 2$  et la relation (34).

- (ii) Un système  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n + 3$ ) de générateurs de la monodromie de l'équation (E) le long des lacets  $\gamma_i$  définis à la figure 1 s'écrit

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \quad \text{où } D_i \in \text{SU}(2), \quad D_i^2 = -I_2.$$

- (iii) L'équation (E) est réelle, et le  $n$ -uplet de singularités  $t = (t_1, \dots, t_n)$  appartient au simplexe

$$(36) \quad \pi^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \dots < t_n < 0\}.$$

Remarquons que la condition (iii), que l'on appellera *condition de réalité*, assure que les singularités apparentes sont réelles ou conjuguées deux à deux. Le fait que les directions  $D_i$  ne soient pas toutes coplanaires assure que la monodromie de l'équation (E) est irréductible.

DÉFINITION 3.4.1. — Pour tout jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  des équations fuchsiennes satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus.

D'après la proposition 2.1.4, et la valeur des exposants, les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  d'une équation (E) satisfaisant la condition (i) sont de la forme

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1 - r_i}{x - t_i} + \sum_{k=1}^N \frac{1 - m_k}{x - \lambda_k},$$

$$q(x) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\theta_i(2\varepsilon_i r_i + \theta_i)}{(x - t_i)^2} + \frac{\kappa}{x(x - 1)}$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{t_i(t_i - 1)K_i}{x(x - 1)(x - t_i)} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)\mu_k}{x(x - 1)(x - \lambda_k)},$$

où  $\kappa = (r_\infty - 1 + \frac{1}{2}\theta_\infty)(1 - \frac{1}{2}\theta_\infty) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i(2\varepsilon_i r_i + \theta_i)$ . Si l'on impose que les  $\lambda_k$  soient des singularités apparentes, alors on obtient que les  $K_i$  s'expriment rationnellement en fonction des autres paramètres  $t$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  (voir la proposition A.0.1). La stratégie que suit Garnier consiste à montrer que l'on peut choisir les paramètres  $t$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  de telle sorte que l'équation ainsi obtenue satisfasse également la conditions (ii) et (iii). On ne détaille pas plus ce point de vue, puisque contrairement à Garnier, on va dès le chapitre suivant utiliser exclusivement des systèmes fuchsiens.

On peut déduire de l'expression de  $p(x)$  que, lorsque  $N = n$ , c'est-à-dire lorsque la surface et l'équation sont génériques, la différentielle de Hopf d'une immersion  $X \in \mathcal{X}_D^n$  s'écrit

$$Q = i \frac{\Lambda(x)}{T(x)} dx^2,$$

où les polynômes  $\Lambda(x)$  et  $T(x)$  sont donnés par (23). L'expression générale de la différentielle de Hopf, lorsque  $N < n$ , est obtenue en autorisant les  $\lambda_k$  à être égaux entre eux, et à des  $t_i$ .

D'après la condition (ii), les ensembles  $\mathcal{E}_D^n$  sont des ensembles isomonodromiques d'équations fuchsienues. La représentation de monodromie engendrée par les matrices  $M_i = D_i D_{i-1}^{-1}$  est notée

$$(37) \quad \rho_D : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

La proposition suivante nous dit que les trois conditions ci-dessus caractérisent les équations différentielles linéaires du second ordre qui proviennent d'une surface minimale à bord polygonal, et donc qu'il est pertinent d'utiliser l'espace  $\mathcal{E}_D^n$  pour décrire les immersions de  $\mathcal{X}_D^n$ .

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit  $D \in \mathcal{D}^n$  un jeu de directions orientées. La correspondance établie par la représentation de Weierstrass entre les espaces  $\mathcal{X}_D^n$  et  $\mathcal{E}_D^n$  est bijective. En particulier, toute équation de  $\mathcal{E}_D^n$  admet un système fondamental de solutions  $(G, H)$  qui constitue les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale  $X \in \mathcal{X}_D^n$ .*

Il n'y a aucune traduction naturelle de la longueur des côtés du polygone  $P$  en terme de propriétés de l'équation fuchsienne  $(E)$ . Étant donné un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , on va donc procéder ainsi pour résoudre le problème de Plateau : à chaque équation  $(E)$  de l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  est associé par la proposition précédente un polygone  $P_E \in \mathcal{P}_D^n$  pour lequel on sait que le problème de Plateau admet au moins une solution dans  $\mathcal{X}_D^n$ . Il s'agit donc de montrer que la famille de polygones  $(P_E, (E) \in \mathcal{E}_D^n)$  ainsi obtenue décrit entièrement l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$ . On procède en deux étapes : on commence au chapitre 4 par décrire explicitement, en utilisant des déformations isomonodromiques, cette famille de polygones. Puis, on utilise au chapitre 5 la description obtenue pour étudier leurs rapports de longueur.

Énonçons d'abord un lemme utile à la démonstration de la proposition 3.4.2 et qui est une conséquence immédiate de la méthode de Fröbenius en une singularité fuchsienne.

LEMME 3.4.3. — *Soient une équation fuchsienne réelle, et  $x = x_0$  une singularité réelle et non logarithmique de cette équation, d'exposants  $\theta^-$  et  $\theta^+$  (qui sont donc réels ou conjugués). Alors, l'équation admet en  $x = x_0$  un système canonique de solutions :*

$$g(x) = (x - x_0)^{\theta^-} \varphi(x), \quad h(x) = (x - x_0)^{\theta^+} \psi(x)$$

tel que les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  sont analytiques réelles au voisinage de  $x = x_0$ .

Démonstration de la proposition 3.4.2. — Montrons tout d'abord la surjectivité de la correspondance. Soit  $(E)$  une équation de l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$ . Remarquons tout d'abord

que tout système fondamental de solutions  $Y_0 = (G, H)$  de  $(E)$ , restreint au demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$ , constitue les données de Weierstrass d'une immersion conforme minimale  $X : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , définie à translation près. En effet, les fonctions  $G$  et  $H$  sont alors holomorphes dans  $\mathbb{C}_+$ , puisqu'il n'y a pas de singularités non apparentes dans  $\mathbb{C}_+$ , et elles n'ont pas de zéro commun — sinon, un tel zéro serait une singularité apparente de l'équation  $(E)$  ayant pour exposants deux entiers naturels non nuls, ce qui est exclu par la condition (i). De plus, cette immersion s'étend continûment à  $\overline{\mathbb{R}} \setminus S(t)$ .

On choisit le système fondamental  $Y_0(x)$  tel que ses matrices de monodromie le long des lacets  $\gamma_i$  sont les matrices  $M_i$  de la condition (ii). Un tel système n'est pas unique, l'ensemble des systèmes fondamentaux ayant les mêmes matrices de monodromie sont les systèmes  $\lambda \cdot Y_0(x)$  ( $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ). Ceci est une conséquence directe de la relation (11) et du fait que les matrices  $M_i$  ne sont pas simultanément diagonalisables (car alors les directions  $D_i$  seraient toutes coplanaires). Les systèmes  $\lambda \cdot Y_0(x)$  définissent la famille d'immersions  $X_\lambda$ . On va montrer que pour un choix convenable  $\lambda_0$  du scalaire  $\lambda$ , l'immersion  $X_{\lambda_0}$  est limitée par des segments de droite, de directions orientées  $D = (D_1, \dots, D_{n+3})$ . On voit qu'un tel scalaire  $\lambda_0$  n'est pas unique, on peut considérer que  $\lambda \in \mathbb{S}^2$ , et que les immersions  $X_\lambda$  sont définies à homothéties de rapport positif près, *i.e.* sont des éléments de  $\mathcal{X}_D^n$ .

Par le lemme 1.4.2, l'immersion  $X_\lambda$  est limitée par des segments de droite si et seulement si, pour tout  $i = 1, \dots, n+3$ , il existe une matrice  $S_i \in \text{SU}(2)$  telle que le système fondamental  $\lambda \cdot Y_0(x) \cdot S_i$  soit réel ou purement imaginaire sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ . On commence par montrer l'existence d'un scalaire  $\lambda$  tel que la condition précédente soit vérifiée pour  $i = n + 3$ . Soit une matrice  $S'_\infty \in \text{SU}(2)$  telle que

$$M_\infty = S'_\infty \begin{pmatrix} e^{i\theta_\infty \pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\infty \pi} \end{pmatrix} \overline{S'_\infty}^t.$$

La matrice  $S'_\infty$  est un relevé d'une rotation envoyant le vecteur normal  $v_{n+3}$  sur le vecteur de base  $e_3$ . Alors le système  $Y_0(x) \cdot S'_\infty$  est canonique en  $x = \infty$ , et il s'écrit donc

$$Y_0(x) \cdot S'_\infty = (a g_\infty(x), b h_\infty(x))$$

où  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , et où le système canonique  $(g_\infty(x), h_\infty(x))$  est donné par le lemme 3.4.3. On écrit  $a = r e^{i(\varphi+\psi)}$  et  $b = \rho e^{i(\varphi-\psi)}$ , et on choisit

$$\lambda_0 := e^{-i\varphi} \quad \text{et} \quad S_\infty := S'_\infty \begin{pmatrix} e^{-i\psi} & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice  $S_\infty$  est dans  $\text{SU}(2)$  et on obtient

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot S_\infty = (r g_\infty(x), \rho h_\infty(x)).$$

Le système  $\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot S_\infty$  est donc réel sur l'intervalle  $] - \infty, t_1[$ .

Montrons à présent qu'il existe une matrice  $S_1 \in \text{SU}(2)$  telle que le système  $\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot S_1$  soit réel ou purement imaginaire sur  $]t_1, t_2[$ . Par itération, on en déduira le

résultat voulu sur chaque intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ . Le processus d'itération repose sur le fait que d'après le lemme 3.4.3, il existe pour tout  $i = 1, \dots, n+3$  un système fondamental canonique au point  $x = t_i$

$$\mathcal{G}_i(x) = (g_i(x), h_i(x))$$

défini et holomorphe dans  $\mathbb{C}_+$ , qui soit réel sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$  et tel que le système  $(e^{-\frac{1}{2}i\theta_i\pi}g_i(x), e^{\frac{1}{2}i\theta_i\pi}h_i(x))$  soit réel sur l'intervalle  $]t_{i-1}, t_i[$ . On en déduit donc que pour tout  $i$ , il existe une matrice  $A_i \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  telle que

$$\mathcal{G}_{i-1}(x) = \mathcal{G}_i(x) \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\theta_i\pi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\theta_i\pi} \end{pmatrix} A_i.$$

Comparons le système  $\lambda_0 \cdot Y_0(x)$  au système  $\mathcal{G}_1(x)$  qui est réel sur  $]t_1, t_2[$ . Par construction, on a

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) = \mathcal{G}_\infty(x) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \bar{S}_\infty^t,$$

et donc

$$\lambda_0 \cdot Y_0(x) = \mathcal{G}_1(x) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_1}{2}\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta_1}{2}\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \bar{S}_\infty^t.$$

Il s'agit de montrer l'existence d'une matrice  $B_1 \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  et d'une matrice  $S_1$  appartenant à  $\text{SU}(2)$  telles que

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\theta_1\pi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\theta_1\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \bar{S}_\infty^t = B_1 \bar{S}_1^t.$$

On obtient ceci en introduisant une matrice  $S'_1 \in \text{SU}(2)$  vérifiant

$$M_1 = S'_1 \begin{pmatrix} e^{i\theta_1\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1\pi} \end{pmatrix} \bar{S}_1^t,$$

en comparant, comme à l'étape précédente, les systèmes  $\lambda_0 \cdot Y_0(x) \cdot S'_1$  et  $\mathcal{G}_1(x)$ , et enfin en exprimant que le déterminant du produit suivant est réel :

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\theta_1\pi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\theta_1\pi} \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \bar{S}_\infty^t S'_1.$$

On a donc montré que l'immersion  $X_{\lambda_0} : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de données de Weierstrass  $\lambda_0 \cdot Y_0(x)$ , représente un disque minimal dont le bord est constitué de segments de droite, de longueur éventuellement infinie. Vu l'expression des matrices  $M_i$  donnée par la condition (ii), ces segments de droites sont nécessairement dirigés et orientés par les  $D_i$ . Le schéma de Riemann (35) donne le comportement local de  $X_{\lambda_0}$  au voisinage des points  $x = t_i$  : l'immersion  $X_{\lambda_0}$  est bornée en les  $t_i$  ( $i \neq n+3$ ), et le bord du disque minimal est donc bien un élément de  $\mathcal{P}_D^n$ .

Discutons à présent le comportement de  $X_{\lambda_0}$  au voisinage de  $x = \infty$ . Si  $r_{n+3} \geq 2$ , alors l'immersion  $X_{\lambda_0}$  se comporte comme en les autres sommets, et le bord du disque minimal représenté par  $X_{\lambda_0}$  est un polygone de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $r_{n+3} = 1$ , l'immersion n'est pas bornée au voisinage de  $x = \infty$ , elle est asymptote à une hélicoïde d'axe  $v_{n+3}$  contenant

les droites passant par les sommets  $a_1$  et  $a_{n+2}$  et dirigées respectivement par  $D_{n+3}$  et  $D_{n+2}$ . Vu l'étude locale réalisée à la démonstration de la proposition 3.2.4, cette hélicoïde ne peut pas être « dégénérée », *i.e.* elle ne peut pas être plane, et les demi-droites  $(a_1, -D_{n+3})$  et  $(a_{n+2}, D_{n+2})$  ne peuvent pas se couper : le sommet  $a_{n+3}$  est en l'infini. Il n'y a pas d'autres comportements possibles en  $x = \infty$ . L'immersion  $X_{\lambda_0}$  vérifie donc bien les conditions de la définition 3.1.4 et appartient à l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ .

Enfin, le caractère injectif de la correspondance entre  $\mathcal{E}_D^n$  et  $\mathcal{X}_D^n$  provient du fait que d'une part, les immersions de  $\mathcal{X}_D^n$  sont définies à translations et homothéties de rapport positif près, et d'autre part, que dans une famille associée d'immersions conformes minimales, au plus une immersion représente une surface minimale à bord polygonal.  $\square$

REMARQUE 3.4.4. — On observe que dans la démonstration de la proposition 3.4.2, pour montrer qu'une équation satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) définit une surface minimale limitée par des segments de droite, on a utilisé le fait qu'un système de générateurs de la monodromie soit dans  $SU(2)$ , mais nulle part l'écriture en produit de demi-tours successifs de la condition (ii). Cette écriture est donc une conséquence de la condition de réalité (iii) et de l'existence d'une représentation unitaire de la monodromie (la condition (i) n'intervient pas dans cette implication). La réciproque de cette assertion nous sera utile dans la résolution du problème de Plateau et sera discutée au chapitre suivant (proposition 4.2.2). En fait, on a vu que la condition (iii) provient du fait que la surface est bordée par un polygone, et que la condition (ii) est l'expression du principe de réflexion de Schwarz : ces deux conditions ne sont donc pas indépendantes.



## CHAPITRE 4

### DÉFORMATIONS ISOMONODROMIQUES

Le but de ce chapitre est d'obtenir, au moyen de déformations isomonodromiques, une description explicite de l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$  des immersions conformes minimales à bord polygonal de directions fixées (définition 3.1.4). On va montrer que l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$  est paramétré par le  $n$ -uplet  $t = (t_1, \dots, t_n)$  des antécédents des sommets, et que la dépendance en  $t$  des immersions est donnée par le système de Schlesinger. Cette description nous sera ensuite utile au chapitre suivant pour résoudre le problème de Plateau.

La démarche suivie par Garnier consiste à décrire directement l'ensemble d'équations  $\mathcal{E}_D^n$  introduit au chapitre précédent (définition 3.4.1). Les déformations isomonodromiques des équations satisfaisant la condition (i) de la section 3.4 sont en effet données par le système de Garnier (70). Ce point de vue est très technique et complexe, principalement parce que le système de Garnier n'a pas la propriété de Painlevé (définition 2.2.9). On choisit donc plutôt de travailler à présent exclusivement avec des systèmes fuchsien, au lieu d'équations fuchsien.

On va, en se basant sur les résultats de la section 2.3, définir à la section 4.1 l'ensemble analogue  $\mathcal{A}_D^n$  des systèmes fuchsien associés à un jeu de directions orientées  $D$ . La proposition 2.3.3 nous permet de caractériser les systèmes qui appartiennent à cet ensemble, en traduisant les conditions (i), (ii) et (iii), en des conditions correspondantes (a), (b) et (c) portant sur les systèmes. La condition (a) concerne les singularités et les exposants, la condition (b) concerne la monodromie et elle est donc identique à la condition (ii). La condition (c) est toujours une condition de réalité. L'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  n'est pas en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ , puisque des systèmes fuchsien différents peuvent définir la même équation.

Pour décrire l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$ , on commence, à la section 4.2, par lever une difficulté ignorée par Garnier, qu'est la condition de réalité (c). On montre que la « réalité » d'un système fuchsien (ou d'une équation fuchsienne) peut être caractérisée par sa

monodromie : on établit une condition nécessaire et suffisante, qu'on appelle *condition* C1, portant sur la monodromie d'un système fuchsien pour qu'il vérifie la condition (c). En particulier, on montre que la monodromie  $\rho_D$  définie par un jeu  $D$  vérifie la condition C1 : les systèmes satisfaisant les conditions (a) et (b) vérifient donc automatiquement la condition (c).

Enfin, à la section 4.3, on peut utiliser des déformations isomonodromiques pour décrire les systèmes satisfaisant les conditions (a) et (b). On obtient que l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  contient une famille isomonodromique de systèmes fuchsien  $(A_D(t), t \in \pi^n)$  paramétrée par les singularités  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , décrite par le système de Schlesinger (17) et qui est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ . On obtient de plus que la solution  $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$  du système de Schlesinger correspondant à cette famille est holomorphe en tout point du simplexe  $\pi^n$  (proposition 4.3.3) : ce résultat, qui simplifiera l'étude de la fonction « rapports des longueurs » au chapitre suivant, est à la fois plus fort et plus simple à établir que celui obtenu par Garnier pour les équations.

Le contenu de ce chapitre est totalement nouveau par rapport à l'article de Garnier, et également beaucoup plus simple que son étude des équations fuchsien de  $\mathcal{E}_D^n$ .

#### 4.1. Les systèmes fuchsien associés à un jeu de directions orientées

On souhaite « transformer » les équations de l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$  en systèmes fuchsien. On a vu à la section 2.3 qu'étant donné un système fuchsien, l'équation dont sont solutions les premières composantes  $y_1$  de toute solution  $Y = (y_1, y_2)^t$  de ce système est fuchsien (lemme 2.3.1). À l'inverse, on a décrit l'ensemble des systèmes fuchsien normalisés en l'infini définissant, en ce sens, une équation fuchsien donnée (proposition 2.3.3). On a donc une correspondance explicite entre équations fuchsien et systèmes fuchsien normalisés en l'infini — du moins dans le cas *générique*, c'est-à-dire lorsque l'équation a un nombre maximal  $N = n$  de singularités apparentes. Ceci va nous permettre à la fois de définir l'espace analogue  $\mathcal{A}_D^n$  des systèmes fuchsien associés à un disque minimal à bord polygonal, et également de caractériser les éléments de cet ensemble par des conditions analogues aux conditions (i), (ii) et (iii).

La proposition 2.3.3 nous dit en particulier qu'un système fuchsien non résonnant et normalisé en l'infini est déterminé par l'équation qu'il définit, par un paramètre complexe supplémentaire  $\xi$ , et par le choix d'une normalisation en l'infini parmi deux possibles. Dans la définition de  $\mathcal{A}_D^n$ , on impose la normalisation suivante, on verra ensuite pourquoi elle est plus appropriée (remarque 4.1.4). Par contre, on a besoin que le paramètre  $\xi$  ne soit pas fixé pour pouvoir construire des déformations isomonodromiques.

DÉFINITION 4.1.1. — Pour tout jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  des systèmes fuchsien qui définissent, au sens du lemme 2.3.1, une équation qui appartienne à l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$ , et qui soient normalisés en l'infini par

$$(38) \quad A_\infty = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_\infty\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par construction, on obtient donc le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1.2. — *Tout système fuchsien appartenant à  $\mathcal{A}_D^n$  admet une matrice fondamentale de solutions*

$$Y_0 = \begin{pmatrix} G & H \\ \tilde{G} & \tilde{H} \end{pmatrix}$$

dont la première ligne  $(G, H)$  constitue les données de Weierstrass d'une immersion appartenant à  $\mathcal{X}_D^n$ . Réciproquement, toute immersion de  $\mathcal{X}_D^n$  provient en ce sens d'un système de  $\mathcal{A}_D^n$ .

Remarquons cependant que l'application  $\mathcal{A}_D^n \rightarrow \mathcal{X}_D^n$  de la proposition précédente, si elle est toujours bien définie et surjective, n'est plus injective comme c'était le cas pour l'application analogue  $\mathcal{E}_D^n \rightarrow \mathcal{X}_D^n$  : comme on n'a pas imposé de valeur au paramètre  $\xi \in \mathbb{C}^*$ , on a beaucoup plus de systèmes que d'équations. Pour décrire l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ , il ne sera donc pas nécessaire de décrire tout l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$ , mais seulement une partie qui soit en bijection avec  $\mathcal{X}_D^n$ . En fait, la correspondance entre systèmes fuchsien et disques minimaux est moins naturelle et immédiate que celle entre équations fuchsien et disques minimaux, puisque il y a beaucoup plus de liberté dans le choix d'un système associé à une immersion. Par exemple, des systèmes différentiels qui ne sont pas fuchsien définissent des équations qui, elles, sont fuchsien, comme le système

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} Y,$$

où  $p(x)$  et  $q(x)$  sont les coefficients d'une équation fuchsien.

La proposition 2.3.3 nous permet d'établir la caractérisation suivante.

THÉORÈME 4.1.3. — *Pour tout jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  est l'ensemble des systèmes  $(A)$  qui vérifient les trois conditions suivantes.*

- (a) *Le système  $(A)$  est fuchsien, il a  $n+3$  singularités distinctes  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$ , et s'écrit donc :*

$$(A) \quad DY = A(x)Y, \quad A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}.$$

*Pour tout  $i = 1, \dots, n+2$ , les valeurs propres de la matrice  $A_i$  sont  $-\frac{1}{2}\theta_i$  et  $\frac{1}{2}\theta_i$ , et  $(A)$  est normalisé en l'infini par (38).*

- (b) Un système  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) de générateurs de la monodromie du système (A) le long des lacets  $\gamma_i$  définis à la figure 1 s'écrit

$$M_i = D_i D_{i-1}^{-1}, \quad \text{où } D_i \in \text{SU}(2), \quad D_i^2 = -I_2.$$

- (c) Les singularités sont réelles,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \pi^n$ , et il existe un nombre réel  $\eta$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, n+2$  la matrice  $A_i$  s'écrit

$$(39) \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i e^{i\eta} \\ c_i e^{-i\eta} & d_i \end{pmatrix} \quad \text{où } a_i, d_i \in \mathbb{R} \text{ et } b_i, c_i \in [0, +\infty[.$$

Remarquons que la condition (a) est plus simple que la condition analogue (i). Les systèmes vérifiant cette condition sont non résonnants car  $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* — On établit séparément chacune des conditions (a), (b) et (c) en traduisant les conditions (i), (ii) et (iii).

*La condition (a).* — Montrons que si un système fuchsien (A) normalisé en l'infini par (38) satisfait la condition (a), alors il définit une équation (E) satisfaisant la condition (i). L'étude de la section 2.3 concerne les équations *génériques*, c'est-à-dire ayant un nombre maximal  $N = n$  de singularités apparentes, et il faut donc la généraliser. Rappelons que le coefficient (1, 2) du système fuchsien (A) s'écrit

$$A_{12}(x) = \xi \frac{\Lambda(x)}{T(x)}, \quad (\xi \in \mathbb{C}^*), \quad \Lambda(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k), \quad T(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i).$$

En toute généralité, les zéros  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , qui sont les singularités apparentes de (E), peuvent non seulement être égaux entre eux, mais également être confondus avec des pôles  $x = t_i$ . Tout d'abord, il est clair que si certains  $\lambda_k$  coïncident en restant différents des  $t_i$ , alors l'équation (E) vérifie toujours (i). Simplement, ses singularités apparentes ne sont plus génériques (lemme 2.3.2).

Considérons à présent que l'un des zéros de  $A_{12}(x)$  coïncide avec un pôle  $x = t_i$ , c'est-à-dire que  $A_{12}(x)$  soit régulier en  $x = t_i$  ( $i \neq n+3$ ). Vérifions que l'un des exposants en  $t_i$  de l'équation (E) est augmenté de 1, *i.e.* que ses exposants sont de la forme  $-\varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$  et  $1 + \varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$ , où  $\varepsilon_i = \pm 1$ . En effet, on a alors  $A_{12}^i = 0$  et on choisit  $\varepsilon_i$  tel que la matrice  $A_i$  s'écrit

$$A_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i & 0 \\ A_{21}^i & \frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i \end{pmatrix}.$$

On voit facilement grâce à la proposition 2.2.1 qu'il existe donc une matrice fondamentale de solutions du système (A) canonique en  $x = t_i$

$$\mathbf{Y}_i(x) = R_i(x)(x - t_i)^{L_i}, \quad \text{où } L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

telle que la matrice holomorphe  $R_i(x)$  soit également triangulaire inférieure au point  $x = t_i$ . Ainsi, la première ligne de la solution  $\mathbf{Y}_i(x)$  a pour exposants  $-\varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$

et  $1 + \varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$ , bien que  $Y_i(x)$  ait toujours pour exposants les valeurs propres de la matrice  $A_i$  :  $-\varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$  et  $\varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$ . On peut généraliser cette situation au cas où un nombre arbitraire  $r_i \in \mathbb{N}^*$  de singularités apparentes coïncident avec  $t_i$ . Alors, la fonction  $A_{12}(x)$  a un zéro d'ordre  $r_i - 1$  en  $x = t_i$ , et il en est de même pour le coefficient (1, 2) de la fonction  $R_i(x)$  : l'équation (E) a alors pour exposants  $-\varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$  et  $r_i + \varepsilon_i \frac{1}{2} \theta_i$  au point  $x = t_i$ . Le nombre de ses singularités apparentes a été diminué de  $r_i$ , et son schéma de Riemann est donné par (35) : l'équation (E) satisfait la condition (i).

Dans le calcul précédent, on a vu que seul un des exposants génériques  $-\frac{1}{2} \theta_i$  et  $\frac{1}{2} \theta_i$  de l'équation (E) en  $x = t_i$  peut être augmenté, et non pas les deux simultanément, et que de plus, le choix de l'exposant augmenté correspond aux deux choix possibles pour la diagonale de la trigonalisée de la matrice  $A_i$ . En l'infini, la situation est un peu différente, puisque le résidu  $A_\infty$  est toujours diagonal, et *a fortiori* triangulaire inférieur, et que sa diagonale est connue par (38). Donc, d'une part, les exposants de l'équation ne sont jamais exactement les valeurs propres de  $A_\infty$ , et d'autre part, on sait que seule la valeur propre  $-1 + \frac{1}{2} \theta_\infty$  est augmentée dans le passage du système à l'équation. Elle est augmentée de 1 si aucun  $\lambda_k$  ne coïncide avec le point  $x = \infty$ , et de  $r_\infty + 1$  si le nombre de  $\lambda_k$  en l'infini est  $r_\infty \in \mathbb{N}^*$ . Ceci nous donne bien l'expression des exposants en l'infini des équations de l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$ .

On remarque que l'on a en fait établi une équivalence : pour que l'équation (E) satisfasse la condition (i), il faut que les valeurs propres des matrices  $A_i$  soient  $-\frac{1}{2} \theta_i$  et  $\frac{1}{2} \theta_i$ .

*La condition (b).* — Il est immédiat que les conditions (ii) et (b) soient identiques, puisque un système et une équation qui sont associés ont la même monodromie (vu la dernière partie du lemme 2.3.1).

*La condition (c).* — Traduisons à présent la condition de réalité (iii) pour les systèmes. Considérons un système fuchsien (A) normalisé en l'infini dont les singularités  $t_i$  sont réelles. Il définit une équation fuchsienne réelle si et seulement s'il définit la même équation que son système conjugué :

$$(\tau A) \quad DY = \tau(A)(x)Y, \quad \tau(A)(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\bar{A}_i}{x - t_i},$$

où l'application  $\tau$  est définie par (28). Le système conjugué est également fuchsien et normalisé en l'infini. Son résidu en l'infini est  $\bar{A}_\infty$ . S'il définit la même équation que le système (A), alors les matrices  $A_i$  et  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ , ont les mêmes valeurs propres (puisque elles sont les exposants de l'équation), qui sont donc réelles ou conjuguées entre elles. Par contre, les systèmes (A) et  $(\tau A)$  n'ont pas nécessairement la même normalisation en l'infini, si on suppose seulement que les valeurs propres du résidu  $A_\infty$  sont réelles ou conjuguées entre elles. Si on suppose que les valeurs propres de  $A_\infty$  sont réelles (et c'est bien le cas ici), alors les systèmes (A) et  $(\tau A)$  ont la même normalisation en l'infini. Alors, par la proposition 2.3.3, pour qu'ils définissent la

même équation, il faut et il suffit qu'il existe un nombre complexe non nul  $\xi$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, n + 2$ , on ait

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & \xi A_{12}^i \\ \xi^{-1} A_{21}^i & A_{22}^i \end{pmatrix}.$$

Alors  $|\xi| = 1$ , et la condition précédente est équivalente à (39).  $\square$

REMARQUE 4.1.4. — La démonstration de la condition (a) nous permet de justifier le choix de la normalisation en l'infini (38) : les exposants en l'infini des équations de  $\mathcal{E}_D^n$  sont de la forme

$$1 - \frac{1}{2}\theta_\infty, \quad r_\infty - 1 + \frac{1}{2}\theta_\infty \quad (r_\infty \geq 1),$$

pour pouvoir en particulier « refermer » le bord polygonal ( $r_\infty \geq 2$ ), et ils sont donc obtenus à partir des exposants génériques  $(1 - \frac{1}{2}\theta_\infty, \frac{1}{2}\theta_\infty)$  en augmentant le deuxième exposant. Or on vient de voir que le choix de l'exposant qui est augmenté dans le passage d'un système à une équation dépend du choix de la diagonale de  $A_\infty$ , parmi les deux choix possibles. Une fois que cette diagonale est fixée, seule une valeur propre de  $A_\infty$  (celle qui se trouve en bas à droite) peut être augmentée, et elle l'est de 1 au moins. Ceci permet de prescrire, au cours de la déformation isomonodromique, le comportement au point  $x = \infty$  des disques minimaux que l'on construit : soit ils ont un bout hélicoïdal, soit leur bord est une courbe polygonale fermée.

L'introduction de l'ensemble des systèmes fuchsien associés à un jeu de directions orientées apporte un point de vue nouveau à la méthode de Garnier. L'approche suivie par Garnier est la suivante : il décrit l'ensemble des équations satisfaisant les conditions (i) et (ii) au moyen du système de Garnier (en oubliant la condition de réalité (iii)), et il obtient ainsi une famille d'équations  $(E_D(t), t \in \pi^n)$  paramétrée par  $t$ . Cependant, le système de Garnier n'ayant pas la propriété de Painlevé, il est obligé à plusieurs reprises d'utiliser le système de Schlesinger pour étudier cette famille d'équations : Garnier ne voit les systèmes fuchsien que comme un outil ponctuel permettant de lever certaines difficultés rencontrées avec les équations fuchsien, principalement pour étudier la régularité de la fonction « rapports des longueurs ». À chaque fois, Garnier fait une sorte d'aller-retour entre équations et systèmes. Ce travail est long et complexe, il repose sur l'étude de la transformation du système de Garnier en le système de Schlesinger, qui a depuis été exposé en détail dans [23] (chapitre 3, section 6).

On a choisi au contraire d'adapter les résultats du chapitre 3 de manière à obtenir directement une correspondance entre les disques minimaux à bord polygonal et les systèmes fuchsien, puis de travailler exclusivement avec ces derniers. Cette utilisation systématique des systèmes fuchsien présente de nombreux avantages : d'une part, comme on l'a dit, elle permet d'éviter d'étudier la transformation du système de Garnier en le système de Schlesinger. D'autre part, comme les systèmes ont une

structure plus canonique que les équations, cette approche permet de multiples simplifications : notamment grâce à la propriété de Painlevé, mais pas uniquement, comme la proposition 4.3.3.

Un autre point que l'on va développer dans ce chapitre et qui est complètement absent de l'article de Garnier est l'étude de la condition de réalité (c). Il semble que Garnier considère que la famille isomonodromique  $(E_D(t), t \in \pi^n)$  qu'il a construite vérifie automatiquement la condition (iii), et il lui donne un sens géométrique en terme de surfaces minimales — bien qu'il n'ait pas non plus établi de résultat analogue à la proposition 2.1.4. Cette interprétation est malgré tout exacte, puisqu'on va montrer à la section suivante que la condition de réalité (c) est une conséquence des conditions (a) et (b).

## 4.2. La condition de réalité

Cette section ne concerne pas uniquement l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$ , on va établir des résultats généraux sur les systèmes fuchsien non résonnants et normalisés en l'infini. On a vu à la remarque 3.4.4 que la condition (ii) et la condition réalité (iii) ne sont pas indépendantes. On va montrer que pour les systèmes fuchsien, la condition de réalité (c) est équivalente à une condition, que l'on appellera *condition C1*, portant uniquement sur la monodromie, et que cette condition est vérifiée en particulier par une monodromie satisfaisant la condition (b). Pour cela, on établit d'abord un résultat d'unicité classique pour les systèmes fuchsien non résonnants.

### 4.2.1. Un résultat d'unicité

LEMME 4.2.1. — *Soient deux systèmes fuchsien non résonnants*

$$(A) \quad DY = A(x)Y,$$

$$(B) \quad DZ = B(x)Z.$$

*Les systèmes (A) et (B) ont les mêmes singularités, les mêmes exposants et la même monodromie si et seulement s'il existe une matrice inversible C telle que*

$$B(x) = CA(x)C^{-1}.$$

*Si, de plus, les systèmes (A) et (B) sont normalisés en l'infini, alors il existe un nombre complexe non nul  $\xi$  tel que la matrice C soit égale à*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — La condition suffisante est évidente. Supposons que les systèmes (A) et (B) ont les mêmes singularités  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$ ,

les mêmes exposants et la même monodromie. Alors ils s'écrivent

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i}, \quad B(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i}{x - t_i},$$

et les matrices  $A_i$  et  $B_i$  ont les mêmes valeurs propres. On note

$$L_i = \begin{pmatrix} \theta_i^+ & 0 \\ 0 & \theta_i^- \end{pmatrix}$$

la diagonalisée des matrices  $A_i$  et  $B_i$ . Il existe deux matrices fondamentales  $\mathbf{Y}(x)$  et  $\mathbf{Z}(x)$  de solutions, respectivement, du système (A) et du système (B), qui ont les mêmes matrices de monodromie. On pose alors pour tout  $x$  dans le revêtement universel de l'ensemble  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$

$$C(x) := \mathbf{Z}(x) \cdot \mathbf{Y}(x)^{-1}.$$

La matrice  $C(x)$  est donc méromorphe dans le revêtement universel de  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ ; on va montrer qu'elle est holomorphe dans  $\mathbb{P}^1$ , c'est-à-dire constante. Remarquons tout d'abord que  $C(x)$  est uniforme dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ : en effet, pour tout  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0)$ , vu que  $M_\gamma(\mathbf{Y}) = M_\gamma(\mathbf{Z})$ , on a

$$\gamma * C(x) = (\mathbf{Z}(x) \cdot M_\gamma(\mathbf{Z})) \cdot (\mathbf{Y}(x) \cdot M_\gamma(\mathbf{Y}))^{-1} = C(x).$$

De plus, la matrice  $C(x)$  n'est singulière qu'aux points où  $\det \mathbf{Y}(x)$  s'annule. Ceci est impossible, car la fonction  $\det \mathbf{Y}(x)$  vérifie

$$\begin{aligned} D(\det \mathbf{Y}(x)) &= \det \mathbf{Y}(x) \operatorname{Tr}(D\mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{Y}(x)^{-1}) = \det \mathbf{Y}(x) \operatorname{Tr} A(x) \\ &= \det \mathbf{Y}(x) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\operatorname{Tr} L_i}{x - t_i}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\det \mathbf{Y}(x) = K \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i)^{\operatorname{Tr} L_i} \quad (K \in \mathbb{C}^*).$$

La matrice  $C(x)$  est donc holomorphe dans  $\mathbb{P}^1 \setminus S(t)$ .

Étudions à présent le comportement de  $C(x)$  au voisinage d'une singularité  $x = t_i$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ). Soit  $M_i$  la matrice de monodromie des matrices fondamentales  $\mathbf{Y}(x)$  et  $\mathbf{Z}(x)$  autour de la singularité  $x = t_i$ :

$$M_i = C_i \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_i^+} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta_i^-} \end{pmatrix} C_i^{-1}$$

où  $C_i \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$ . Alors les matrices fondamentales de solutions  $\mathbf{Y}(x) \cdot C_i$  et  $\mathbf{Z}(x) \cdot C_i$  sont canoniques au point  $x = t_i$ :

$$\mathbf{Y}(x) \cdot C_i = R_i(x)(x - t_i)^{L_i}, \quad \mathbf{Z}(x) \cdot C_i = S_i(x)(x - t_i)^{L_i}$$

où les matrices  $R_i(x)$  et  $S_i(x)$  sont holomorphes et inversibles au point  $x = t_i$ . On en déduit  $C(x) = S_i(x)R_i(x)^{-1}$ , et  $C(x)$  est holomorphe en  $x = t_i$ . On montrerait de

même que la matrice  $C(x)$  est holomorphe en  $x = \infty$ . Elle est donc holomorphe sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  : elle est indépendante de  $x$ .

Si on suppose de plus que les matrices  $A_\infty$  et  $B_\infty$  sont diagonales, alors on note

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \theta_\infty^+ & 0 \\ 0 & \theta_\infty^- \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad B_\infty = A_\infty \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \theta_\infty^- & 0 \\ 0 & \theta_\infty^+ \end{pmatrix},$$

i.e.  $B_\infty = A_\infty$  ou  $B_\infty = JA_\infty J^{-1}$  avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme par ailleurs  $B_\infty = CA_\infty C^{-1}$  et comme  $\theta_\infty^+ \neq \theta_\infty^-$ , on en déduit dans le premier cas que la matrice  $C$  est diagonale, et dans le second, qu'elle est anti-diagonale.  $\square$

**4.2.2. Systèmes fuchsien « réels ».** — On vient de voir qu'un système fuchsien non résonnant et normalisé en l'infini est entièrement déterminé par ses singularités  $t_1, \dots, t_n$ , par les valeurs propres des matrices  $A_i$ , par sa monodromie et par un paramètre supplémentaire  $\xi \in \mathbb{C}^*$ . On va déterminer à présent à quelle condition sur ces données le système  $(A_0)$  vérifie la condition de réalité (c). Pour les singularités et les valeurs propres, la réponse est immédiate : les singularités doivent être réelles ou conjuguées deux à deux ; les valeurs propres en une singularité réelle doivent être réelles ou conjuguées entre elles, et les valeurs propres en deux singularités conjuguées doivent être conjuguées. On ne s'intéresse ici qu'au cas où les singularités  $t_1, \dots, t_n$  sont réelles (on obtiendrait le même résultat dans le cas où elles sont seulement réelles ou conjuguées deux à deux, mais la démonstration est un peu plus technique). Par souci de simplicité, on suppose que  $t = (t_1, \dots, t_n)$  est dans le simplexe  $\pi^n$  défini par (36).

On reprend les notations de la section 2.2. On considère un système fuchsien non résonnant et normalisé en l'infini

$$(A_0) \quad DY = A(x)Y, \quad A(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i}{x - t_i},$$

et on note  $\theta_i^+$  et  $\theta_i^-$  les valeurs propres des matrices de résidu  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ).

PROPOSITION 4.2.2. — *On suppose que le  $n$ -uplet de singularités  $(t_1, \dots, t_n)$  du système fuchsien  $(A_0)$  est dans le simplexe  $\pi^n$ , que les valeurs propres  $\theta_i^+$  et  $\theta_i^-$  (avec  $i = 1, \dots, n+2$ ) sont réelles ou conjuguées entre elles, et que les valeurs propres  $\theta_\infty^+$  et  $\theta_\infty^-$  sont réelles. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- ▷ l'équation fuchsienne associée au sens du lemme 2.3.1 au système  $(A_0)$  est réelle ;
- ▷ les matrices  $A_i$  sont de la forme (39) ;

▷ pour tout système de générateurs  $(M_1, \dots, M_{n+3})$  de la monodromie le long des lacets  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+3}$ , il existe une matrice  $C$  appartenant à  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, n+3$  on ait

$$(40) \quad C^{-1} \bar{M}_j C = (M_j \dots M_1)^{-1} M_j^{-1} (M_j \dots M_1).$$

On appelle la dernière de ces assertions la condition C1.

On remarque qu'il existe un système de générateurs  $(M_1, \dots, M_{n+3})$  pour lequel la matrice  $C$  est la matrice identité  $I_2$ .

*Démonstration.* — On a déjà vu que les deux premières assertions sont équivalentes. On considère le système conjugué  $(\tau A_0)$  au système  $(A_0)$  :

$$(\tau A_0) \quad DY = \tau(A)(x)Y, \quad \tau(A)(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\bar{A}_i}{x - t_i}.$$

Le système  $(A_0)$  définit une équation fuchsienne réelle s'il définit la même équation que le système conjugué  $(\tau A_0)$ . On a vu également que ceci équivaut à l'existence d'un nombre  $\xi \in \mathbb{C}^*$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, n+2$ , on ait

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} A_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}^{-1}.$$

Par hypothèse, les systèmes  $(A_0)$  et  $(\tau A_0)$  ont les mêmes singularités, les mêmes exposants et la même normalisation en l'infini. D'après le lemme 4.2.1, ils définissent donc la même équation si et seulement s'ils ont la même monodromie.

Soit  $\mathbf{Y}(x)$  une matrice fondamentale de solutions du système  $(A_0)$  définie et holomorphe dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}_+$ . On note ses matrices de monodromie  $M_i$  :

$$M_{\gamma_i}(\mathbf{Y}) = M_i.$$

On note  $\mathbf{Y}_i(x)$  le prolongement à  $\mathbb{C}_-$  de la matrice fondamentale  $\mathbf{Y}(x)$  à travers l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$  (c'est-à-dire le long de tout chemin joignant un point de  $\mathbb{C}_+$  à un point de  $\mathbb{C}_-$  et croisant l'axe réel une seule fois entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ); la matrice fondamentale  $\mathbf{Y}_i(x)$  est définie et holomorphe sur l'ouvert simplement connexe

$$U_i := \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup ]t_i, t_{i+1}[.$$

La matrice  $\tau(\mathbf{Y}_i)(x)$ , elle aussi holomorphe et inversible sur  $U_i$ , est une matrice fondamentale de solutions du système  $(\tau A_0)$ . Pour que les systèmes  $(A_0)$  et  $(\tau A_0)$  aient la même monodromie, il faut et il suffit que pour une valeur de  $i$ , les matrices de monodromie des solutions fondamentales  $\mathbf{Y}_i(x)$  et  $\tau(\mathbf{Y}_i)(x)$  soient conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible  $C$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, n+3$  on ait

$$M_{\gamma_j}(\tau(\mathbf{Y}_i)) = C M_j C^{-1}.$$

On choisit le prolongement  $\mathbf{Y}_{n+3}(x)$  (i.e.  $i = n+3$ ).

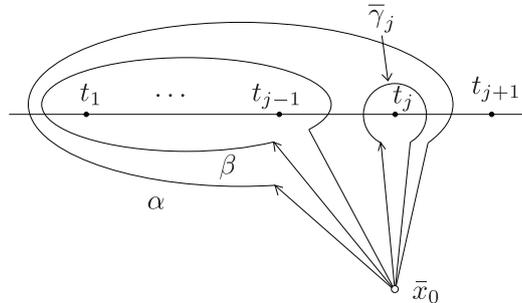


FIGURE 1. Les lacets  $\bar{\gamma}_j$ ,  $\alpha$  et  $\beta$

Il faut exprimer en fonction des matrices  $M_j$  les matrices :

$$M_{\bar{\gamma}_j}(\tau(\mathbf{Y}_{n+3})) = \overline{M_{\bar{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3})}.$$

Le lacet  $\bar{\gamma}_j$  a pour point de base  $\bar{x}_0$  et tourne en sens inverse du sens trigonométrique autour de  $t_j$ . Pour calculer  $M_{\bar{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3})$ , la difficulté vient de ce qu'on sait comment est transformée, en général, la matrice fondamentale  $\mathbf{Y}_i(x)$  le long des lacets  $\bar{\gamma}_i$  et  $\bar{\gamma}_{i+1}$  (comme on le voit sur la figure 2), mais pas le long d'un lacet  $\bar{\gamma}_j$  quelconque. On va donc procéder par itération. On décompose  $\bar{\gamma}_j$  en le produit de deux lacets. Soient  $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), \bar{x}_0)$  les deux classes de lacets orientés négativement et qui encerclent respectivement les singularités  $t_1, \dots, t_j$  et  $t_1, \dots, t_{j-1}$  (là encore, les indices s'entendent modulo  $n+3$  : si  $j=1$ , le lacet  $\beta$  est homotope à un point). Les lacets  $\alpha$  et  $\beta$  sont représentés à la figure 1. Alors

$$\bar{\gamma}_j = \alpha\beta^{-1} \quad \text{et} \quad M_{\bar{\gamma}_j}(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3})M_\beta(\mathbf{Y}_{n+3})^{-1}.$$

Montrons que

$$M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_1^{-1} \cdots M_j^{-1}.$$

On remarque que, vu la définition des matrices fondamentales  $\mathbf{Y}_i(x)$ , on a pour tout  $i = 1, \dots, n+3$

$$\bar{\gamma}_i * \mathbf{Y}_{i-1}(x) = \mathbf{Y}_i(x).$$

Donc, comme  $\alpha = \bar{\gamma}_j \cdots \bar{\gamma}_1$ , on obtient par itération

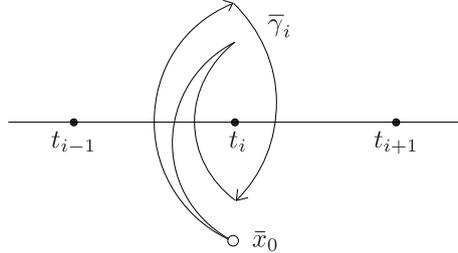
$$\alpha * \mathbf{Y}_{n+3}(x) = \mathbf{Y}_j(x).$$

Par ailleurs, comme on a aussi  $\bar{\gamma}_i * \mathbf{Y}_{i-1}(x) = \mathbf{Y}_{i-1}(x)M_i^{-1}$  (voir la décomposition du lacet  $\bar{\gamma}_j$  à figure 2), alors pour tout  $i = 1, \dots, n+3$

$$\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{Y}_{i-1}(x)M_i^{-1},$$

donc  $\mathbf{Y}_j(x) = \mathbf{Y}_{j-1}(x)M_j^{-1} = \cdots = \mathbf{Y}_{n+3}(x)(M_1^{-1} \cdots M_j^{-1})$ , ce qui donne la formule annoncée pour  $M_\alpha(\mathbf{Y}_{n+3})$ . De même, on a

$$M_\beta(\mathbf{Y}_{n+3}) = M_1^{-1} \cdots M_{j-1}^{-1}.$$

FIGURE 2. On décompose le lacet  $\bar{\gamma}_j$ 

Finalement, on obtient

$$M_{\gamma_j}(\tau(\mathbf{Y}_{n+3})) = \overline{(M_j \cdots M_1)^{-1} M_j^{-1} (M_j \cdots M_1)},$$

ce qui donne bien l'équivalence annoncée.  $\square$

REMARQUE 4.2.3. — On a un résultat analogue à la proposition 4.2.2 pour les équations fuchsienues : *une équation fuchsienne sans singularité logarithmique, dont les singularités et les exposants sont réels, est réelle si et seulement si sa monodromie vérifie la condition C1*. Dans [10], on en a déduit que la condition C1 est également une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution  $(\lambda(t), \mu(t)) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), \mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$  du système de Garnier (70) (voir l'appendice A) soit réelle ou conjuguée deux à deux, c'est-à-dire que  $\bar{\lambda}(\bar{t})$  et  $\bar{\mu}(\bar{t})$  soient obtenus à partir respectivement de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  par une même permutation de leurs indices (corollaire 3.17. de [10]).

**4.2.3. Cas où la monodromie est unitarisable.** — Dans le cas où il existe un système de générateurs  $(M_1, \dots, M_{n+3})$  de la monodromie du système  $(A_0)$  qui soit contenu dans le groupe des matrices unitaires  $U(2)$ , ou dans le groupe  $U(1, 1)$ , on peut simplifier l'écriture de la condition C1.

PROPOSITION 4.2.4. — *Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 4.2.2, si un système de générateurs  $(M_1, \dots, M_{n+3})$  de la monodromie du système  $(A_0)$  est contenu dans  $U(2)$  ou dans  $U(1, 1)$ , alors le système  $(A_0)$  vérifie l'une des trois assertions équivalentes de la proposition 4.2.2 si et seulement s'il existe  $n + 3$  matrices inversibles  $D_1, \dots, D_{n+3}$  telles que*

$$M_j = D_j D_{j-1}^{-1} \quad (j = 1, \dots, n + 3), \quad \frac{1}{\delta_1} D_1^2 = \dots = \frac{1}{\delta_{n+3}} D_{n+3}^2$$

où on a noté  $\delta_j = \det D_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n + 3$ . On appelle cette condition la condition C2.

Rappelons que le groupe  $U(1, 1)$  est le groupe des matrices  $M \in M(2, \mathbb{C})$  telles que

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{M}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — Pour toute matrice  $M \in U(2)$ , on a

$$J^{-1}MJ = \det(M)\bar{M}$$

(ce qui redonne la relation (6) lorsque  $M \in SU(2)$ ). Si les matrices  $M_1, \dots, M_{n+3}$  sont dans le groupe unitaire  $U(2)$ , alors la condition C1 est équivalente à l'existence d'une matrice inversible  $C$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, n+3$ , on ait

$$(41) \quad (JC)^{-1}M_j(JC) = \det(M_j)(M_j \cdots M_1)^{-1}M_j^{-1}(M_j \cdots M_1).$$

(condition C1'). On a la même expression lorsque les matrices  $M_1, \dots, M_{n+3}$  sont dans le groupe  $U(1, 1)$ , en remplaçant la matrice  $J$  par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la démonstration, on se limitera donc au cas où le système de générateurs est dans le groupe  $U(2)$ .

Montrons que les deux conditions C1' et C2 sont équivalentes. Pour tout choix de la matrice inversible  $D_{n+3}$ , par la relation  $M_{n+3} \cdots M_1 = I_2$ , il existe des matrices inversibles  $D_1, \dots, D_{n+2}$ , déterminées de manière unique, telles que pour tout  $j = 1, \dots, n+3$ , on ait

$$M_j = D_j D_{j-1}^{-1}$$

(où les indices sont considérés modulo  $n+3$ ). Alors on a

$$\det(M_j) = \frac{\delta_j}{\delta_{j-1}}$$

où  $\delta_j = \det D_j$ . La relation  $(41)_j$  se réécrit alors de la façon suivante

$$(JC)^{-1}D_j D_{j-1}^{-1}(JC) = \frac{\delta_j}{\delta_{j-1}} D_{n+3} D_j^{-1} D_{j-1} D_{n+3}^{-1}.$$

Si les matrices  $D_{n+3}$  et  $C$  vérifient

$$D_{n+3}^{-1} = JC,$$

alors la relation  $(41)_j$  est équivalente à

$$\frac{1}{\delta_{j-1}} D_{j-1}^{-2} = \frac{1}{\delta_j} D_j^2,$$

et on obtient ainsi l'équivalence annoncée.  $\square$

On en déduit donc que pour tout jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , les systèmes fuchsien dont la monodromie soit la classe de la représentation

$$\rho_D : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus S(t), x_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

définie par  $D$ , et dont les singularités et les exposants sont réels vérifient automatiquement la condition de réalité (c). L'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  est ainsi simplement l'ensemble des systèmes vérifiant les conditions (a) et (b) et dont les singularités sont réelles et ordonnées.

### 4.3. Description par le système de Schlesinger

On va maintenant utiliser des déformations isomonodromiques par le système de Schlesinger (17) pour décrire une partie de l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$ . On vérifiera ensuite que cette partie convient, *i.e.* qu'elle est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$  des disques minimaux à bord polygonal. Enfin, on montrera un résultat de régularité pour cette description.

**4.3.1. Le choix d'une famille isomonodromique.** — Soit un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ . On fixe arbitrairement un point  $t^0 \in \pi^n$ , et on considère un système fuchsien  $(A_0)$  dont la monodromie est la classe de  $\rho_D$  et dont la position des singularités est donnée par  $t^0$ . Un tel système existe toujours, puisque pour les systèmes de taille  $2 \times 2$ , le problème de Riemann-Hilbert admet toujours une solution (on peut se reporter au livre d'Anosov et Bolibruch [1], ou à l'article de Beauville [2] pour une présentation synthétique des résultats connus sur le problème de Riemann-Hilbert). On peut toujours supposer que le système est normalisé en l'infini, et qu'il vérifie la condition (a). Soit  $U \subset \mathcal{B}^n$  un voisinage simplement connexe du simplexe  $\pi^n$ , où l'ensemble  $\mathcal{B}^n$  est défini par (16). Les résidus  $(A_1^0, \dots, A_{n+2}^0)$  du système  $(A_0)$  sont une condition initiale du système de Schlesinger (17), qui est complètement intégrable (théorème 2.2.7). On obtient donc ainsi une famille isomonodromique de systèmes fuchsien  $(A_D(t), t \in U)$  décrite par le système de Schlesinger, telle que  $(A_D(t^0)) = (A_0)$ . Les conditions (a) et (b) sont satisfaites par le système  $(A_0)$ , et sont conservées au cours de la déformation. D'après la proposition 4.2.4, on en déduit

$$(42) \quad (A_D(t), t \in \pi^n) \subset \mathcal{A}_D^n.$$

Tous les choix possibles pour la solution  $(A_0)$  du problème de Riemann-Hilbert induit de cette manière une famille isomonodromique de systèmes fuchsien contenue dans l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  (lorsque  $t \in \pi^n$ ), et bien sûr tous les éléments de  $\mathcal{A}_D^n$  appartiennent à une telle famille.

Considérons à présent deux de ces familles  $(A_D^1(t), t \in U)$  et  $(A_D^2(t), t \in U)$ . Pour chaque valeur  $t \in U$ , les systèmes fuchsien  $(A_D^1(t))$  et  $(A_D^2(t))$  ont les mêmes singularités, les mêmes exposants et la même monodromie, et leurs normalisations en l'infini sont identiques (données par (38)). D'après le lemme 4.2.1 et la proposition 2.3.3, ces deux systèmes définissent la même équation, que l'on note  $(E_D(t))$  : ils correspondent à des valeurs différentes du paramètre  $\xi$ . Étant donné que toute équation

de  $\mathcal{E}_D^n$  provient d'un système de  $\mathcal{A}_D^n$ , qui appartient lui-même à une famille isomonodromique (42), la famille isomonodromique d'équations fuchsienues  $(E_D(t), t \in \pi^n)$  décrit ainsi entièrement l'ensemble  $\mathcal{E}_D^n$ , qui est donc paramétré par  $t$  :

$$\mathcal{E}_D^n = (E_D(t), t \in \pi^n).$$

En fait, cette dépendance en  $t$  est également donnée par le système de Garnier (70), mais on n'utilisera pas ce point de vue.

Finalement, on choisit arbitrairement une famille isomonodromique  $(A_D(t), t \in \pi^n)$ , donnée par une sous-variété d'une variété intégrale du système de Schlesinger, et on note

$$(A_D(t)) \quad DY = A_D(x, t)Y, \quad A_D(x, t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{D,i}(t)}{x - t_i}.$$

Cette famille est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$ , et permet de le décrire ainsi : d'après la proposition 4.1.2, pour tout  $t \in \pi^n$ , il existe une solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  du système  $(A_D(t))$  dont la première ligne  $(G(x, t), H(x, t))$  constitue les données de Weierstrass d'une immersion de  $\mathcal{X}_D^n$ , que l'on note  $X_D(t)$ , et on a

$$\mathcal{X}_D^n = (X_D(t), t \in \pi^n).$$

On note également  $P_D(t) \in \mathcal{P}_D^n$  le bord polygonal du disque représenté par  $X_D(t)$ . La famille  $(P_D(t), t \in \pi^n)$  est exactement la famille des polygones de direction  $D$  qui sont le bord d'au moins un disque minimal. L'objet du chapitre suivant est d'utiliser cette description par le système de Schlesinger pour montrer qu'elle décrit entièrement l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$ . Remarquons que la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  est  $M$ -invariante, *i.e.* que sa représentation de monodromie est indépendante de  $t$ , puisqu'il s'agit de la représentation  $\rho_D$ .

REMARQUE 4.3.1. — On a vu que deux solutions différentes du problème de Riemann-Hilbert appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  se distinguent par leur valeur du paramètre

$$\xi = \sum_{i=1}^{n+2} t_i A_{12}^i.$$

On peut montrer que si les matrices  $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$  sont solutions du système de Schlesinger, alors le paramètre  $\xi(t)$  satisfait le système de Pfaff

$$\frac{\partial \xi}{\partial t_i} = (\theta_\infty - 1) A_{12}^i(t), \quad (i = 1, \dots, n)$$

qui permet de décrire les relations entre le système de Schlesinger et le système de Garnier (voir [23]).

REMARQUE 4.3.2. — La preuve au chapitre suivant que la famille de polygones  $(P_D(t), t \in \pi^n)$  décrit l'ensemble  $\mathcal{P}_D^n$  tout entier re-montrera *a posteriori* que l'on a bien choisi la famille  $(A_D(t), t \in \pi^n)$ , ainsi que les ensembles  $\mathcal{E}_D^n$  et  $\mathcal{A}_D^n$ . On peut

remarquer que pour résoudre le problème de Plateau, on aurait pû ne pas utiliser d'équations fuchsienues, et introduire directement l'ensemble  $\mathcal{A}_D^n$  comme l'ensemble des systèmes fuchsienus satisfaisant les conditions (a), (b) et (c). On aurait pû alors seulement montrer qu'un tel système définit bien une immersion  $X$  qui appartient à  $\mathcal{X}_D^n$  (*i.e.* un résultat analogue à la proposition 3.4.2), sans vérifier qu'on les obtient toutes ainsi, puisque c'est une conséquence du théorème 5.0.4. Il y a plusieurs raisons pour lesquelles on n'a pas procédé ainsi. Tout d'abord, il n'est pas clair comment on peut définir directement un système différentiel à partir seulement des données de Weierstrass  $(G, H)$  : il y a beaucoup trop de choix possibles. On a choisi d'utiliser des systèmes fuchsienus, ce qui réduit considérablement le nombre de systèmes différentiels concernés, uniquement parce qu'on a démontré que l'unique équation de solution fondamentale  $(G, H)$  est fuchsienne. Par ailleurs, comment obtenir les conditions (a) et (c) sans utiliser d'équations? En particulier, le comportement local d'une immersion  $X \in \mathcal{X}_D^n$  est donnée par les exposants de l'équation associée, et non pas par les valeurs propres des matrices  $A_i$  (ceci est l'objet de la première partie de la démonstration du théorème 4.1.3). L'utilisation d'équations fuchsienues semble être un détour nécessaire.

#### 4.3.2. Singularités mobiles des solutions réelles du système de Schlesinger.

— Par le théorème 2.2.10, toute solution du système de Schlesinger est méromorphe dans le revêtement universel de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$ . On établit à présent un résultat plus fort de régularité pour les solutions du système de Schlesinger provenant d'une monodromie satisfaisant la condition C1, ou de manière équivalente, définissant une famille isomonodromique de systèmes fuchsienus vérifiant la condition de réalité (c). Ce résultat s'appliquera donc à la famille  $(A_D(t), t \in \pi^n)$ . En se restreignant aux systèmes vérifiant (c), on obtient un résultat plus fort que celui de Garnier (puisqu'il ne parvient pas à exclure l'existence de pôles doubles en  $t \in \pi^n$ ), et beaucoup plus simple à établir.

PROPOSITION 4.3.3. — *Soit une solution  $(A_1(t), \dots, A_{n+2}(t))$  du système de Schlesinger (17) définie dans un ouvert simplement connexe  $U \subset \mathcal{B}^n$  contenant le simplexe  $\pi^n$ , et soit  $(A_t)$  le système fuchsien associé. On suppose que les valeurs propres  $\theta_i^\pm$  ( $i = 1, \dots, n+3$ ) sont réelles. S'il existe une valeur  $t^0 \in \pi^n$  telle que la monodromie du système fuchsien  $(A_{t^0})$  vérifie la condition C1, alors pour tout  $t \in \pi^n$  les matrices  $A_1(t), \dots, A_{n+2}(t)$  s'écrivent sous la forme (39), et elles sont holomorphes en tout point de  $\pi^n$ .*

*Démonstration.* — La première partie de la proposition est évidente. On peut supposer que les matrices  $A_i(t)$  sont à trace nulle. En effet, pour toutes constantes  $k_1, \dots, k_{n+2} \in \mathbb{R}$  les matrices

$$B_i(t) := A_i(t) + k_i I_2 \quad (i = 1, \dots, n+2)$$

constituent également une solution du système de Schlesinger, et sont encore sous la forme (39). Quitte à transformer ainsi les matrices  $A_i(t)$ , on peut donc supposer que pour les valeurs réelles de  $t$ , elles s'écrivent

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} a_i(t) & b_i(t)e^{i\eta(t)} \\ c_i(t)e^{-i\eta(t)} & -a_i(t) \end{pmatrix},$$

où la fonction  $a_i(t)$  est à valeurs réelles et où les fonctions  $b_i(t)$  et  $c_i(t)$  sont à valeurs positives dans  $\pi^n$ . La matrice  $A_i(t)$  est méromorphe dans le revêtement universel de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$ . On note  $\frac{1}{2}\theta_i$  et  $-\frac{1}{2}\theta_i$  ses valeurs propres; elles sont indépendantes de  $t$  et pour tout  $t$  réel, on a

$$\frac{1}{4}\theta_i^2 = a_i(t)^2 + b_i(t)c_i(t).$$

On en déduit que  $a_i(t)$  et le produit  $b_i(t)c_i(t)$  sont bornés dans  $\pi^n$ . Les fonctions  $A_{11}^i(t) = a_i(t)$  et  $A_{12}^i(t)A_{21}^i(t) = b_i(t)c_i(t)$  sont donc holomorphes en tout point de  $\pi^n$ .

Montrons que les fonctions  $A_{12}^i(t)$  sont holomorphes dans  $\pi^n$ . Soit un point  $t^0 \in \pi^n$ . On étudie le comportement en la variable  $t_j$  au point  $t_j^0$ , les autres  $t_k$ ,  $k \neq j$ , étant fixés en  $t_k^0$ . On raisonne par l'absurde, et on choisit  $i \neq j$  tel que  $A_{12}^i(t)$  ait un pôle d'ordre  $p_i \geq 1$  maximal en  $t_j = t_j^0$  (par rapport aux autres  $A_{12}^l(t)$ ,  $l \neq j$ ). D'après le système de Schlesinger, on a

$$\frac{\partial A_{12}^i}{\partial t_j} = \frac{2A_{11}^j}{t_j - t_i} A_{12}^i - \frac{2A_{11}^i}{t_j - t_i} A_{12}^j.$$

Comme les fonctions  $A_{11}^j(t)/(t_j - t_i)$  et  $A_{11}^i(t)/(t_j - t_i)$  sont holomorphes en tout point de  $\pi^n$ , on voit que  $A_{12}^i(t)$  a en  $t_j = t_j^0$  un pôle d'ordre au minimum  $p_i + 1$ . Or ceci contredit l'équation

$$\frac{\partial A_{12}^j}{\partial t_j} = - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n+2} \frac{\partial A_{12}^\ell}{\partial t_j}.$$

Les fonctions  $A_{12}^\ell(t)$ ,  $\ell \neq j$ , sont donc holomorphes en  $t_j = t_j^0$ , et vu l'équation précédente,  $A_{12}^j(t)$  l'est alors également. On procéderait de même, et on aboutirait au même résultat pour les fonctions  $A_{21}^i(t)$ .  $\square$

On peut donc déduire de cette proposition que la solution  $(A_{D,1}(t), \dots, A_{D,n+2}(t))$  du système de Schlesinger associée à un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$  est holomorphe dans un voisinage simplement connexe  $U \subset \mathcal{B}^n$  du simplexe  $\pi^n$ . Ceci va simplifier l'étude de la régularité à l'intérieur de  $\pi^n$  de la fonction « rapports des longueurs »  $F_D(t)$ , comme on le verra au chapitre 5.



## CHAPITRE 5

### RAPPORTS DE LONGUEURS DES CÔTÉS

On suppose toujours fixé un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ . On a obtenu au chapitre précédent que l'ensemble  $\mathcal{X}_D^n$  des immersions conformes représentant des disques minimaux à bord polygonal de direction  $D$  est une famille  $(X_D(t), t \in \pi^n)$ , paramétrée par le  $n$ -uplet de singularités  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , qui sont également les antécédents par l'immersion  $X_D(t) : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  des sommets de leur bord polygonal. La dépendance en  $t$  des immersions  $X_D(t)$  est donnée par le système de Schlesinger (17). Pour chaque valeur de  $t \in \pi^n$ , les données de Weierstrass  $(G(x, t), H(x, t))$  de l'immersion  $X_D(t)$  constituent la première ligne d'une matrice fondamentale de solutions  $\mathbf{Y}_0(x, t)$ , qui est  $M$ -invariante, du système fuchsien  $(A_D(t))$ . Comme cette solution fondamentale est définie à multiplication scalaire réelle près, les immersions de  $\mathcal{X}_D^n$  sont définies non seulement à translation près, mais également à homothéties de rapport positif près. On a noté  $P_D(t) \in \mathcal{P}_D^n$  le bord polygonal du disque représenté par  $X_D(t)$ , et le but de ce chapitre est de montrer l'égalité

$$\mathcal{P}_D^n = (P_D(t), t \in \pi^n).$$

Un système de coordonnées sur  $\mathcal{P}_D^n$  est donné par  $n$  rapports de longueurs de côtés. Vu l'expression (3) de la métrique induite des immersions  $X_D(t)$ , les rapports de longueurs des côtés de tout représentant du polygone  $P_D(t)$  s'écrivent

$$r_i(t) = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (|G(x, t)|^2 + |H(x, t)|^2) dx}{\int_0^1 (|G(x, t)|^2 + |H(x, t)|^2) dx} \quad (i = 1, \dots, n).$$

On définit la fonction « rapports des longueurs »  $F_D(t)$  associée au jeu de directions orientées  $D$  ainsi

$$F_D : \pi^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n, \quad F_D(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)).$$

Le but de ce chapitre est donc d'établir le théorème suivant, qui conclut la démonstration du théorème 0.0.1, et qui en est la partie la plus difficile.

THÉORÈME 5.0.4. — *Étant donné un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , la fonction « rapports des longueurs »  $F_D : \pi^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$  est surjective.*

En quelque sorte, on veut montrer que les directions orientées des côtés sont paramétrées par la monodromie des systèmes fuchsien, tandis que la position  $t$  de leurs singularités code les longueurs des côtés. Mais la détermination des longueurs par  $t$  est moins explicite.

À la section 5.1, on commence par préciser le choix de la solution fondamentale  $M$ -invariante  $Y_0(x, t)$  de manière à pouvoir étudier sa dépendance en  $t$  — de nouveau, l'utilisation de systèmes au lieu d'équations simplifiera cette détermination. On en déduit ensuite, grâce à la proposition 4.3.3, que la fonction  $F_D(t)$  est analytique réelle dans le simplexe  $\pi^n$  (proposition 5.1.3).

On expose à la section 5.2 la méthode que l'on va suivre pour démontrer le théorème 5.0.4. Elle repose sur l'étude de la fonction  $F_D(t)$  au bord du simplexe  $\pi^n$  et sur une récurrence portant sur le nombre  $n + 3$  de côtés des polygones. En identifiant les simplexes  $\pi^n$  et  $]0, +\infty[^n$ , on définit une fonction

$$\tilde{F}_D : ]0, +\infty[^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n.$$

Pour montrer que la fonction  $F_D$  est surjective, on va montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  est de degré 1, c'est-à-dire homotope à l'identité. On établit un résultat de topologie (proposition 5.2.1) qui nous permet de nous ramener à montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  est continue et de degré 1 au bord de  $]0, +\infty[^n$ . Pour obtenir cela, il faut interpréter la fonction  $F_D|_{\partial\pi^n}$  en terme de nouvelles fonctions « rapports des longueurs » de dimension inférieure. Le bord du simplexe  $\pi^n$  est constitué de simplexes de dimension inférieure. Regardons par exemple ce qui se passe lorsque la singularité  $t_n$  tend vers 0, *i.e.* en un point de la face  $\mathcal{F}$  du bord de  $\pi^n$

$$\mathcal{F} = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 0\} \simeq \pi^{n-1}.$$

Il paraît naturel de s'attendre à ce que le  $n$ -ième côté  $a_n(t)a_{n+1}(t)$  du polygone  $P_D(t)$  « disparaisse », c'est-à-dire que le rapport de longueur  $r_n(t)$  tende vers 0. On montre de plus que lorsque  $t_n = 0$  et que  $t' = (t_1, \dots, t_{n-1})$  décrit le simplexe  $\pi^{n-1}$ , on obtient la famille de polygones  $P_{D'}(t')$  définie par les directions orientées

$$D' = (D_1, \dots, D_{n-1}, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}) \in \mathcal{D}^{n-1}.$$

Ceci signifie que la fonction  $F_D(t)$  s'étend continûment à la face  $\mathcal{F}$  du bord de  $\pi^n$  et que pour tout  $t' \in \pi^{n-1}$ , on a

$$F_D(t', 0) = (F_{D'}(t'), 0).$$

On généralise cette assertion à toutes les faces du simplexe  $\pi^n$  : c'est la proposition 5.2.2, dont la démonstration constitue la majeure partie de ce chapitre. On procède ensuite par récurrence, en faisant l'hypothèse qu'au rang  $n - 1$ , pour tout entier  $k \leq n - 1$  et tout jeu de directions orientées  $D' \in \mathcal{D}^k$ , la fonction

$$\tilde{F}_{D'} : ]0, +\infty[^k \longrightarrow ]0, +\infty[^k$$

est de degré 1. Les propositions 5.2.1 et 5.2.2 assurent l'hérédité de l'hypothèse de récurrence. L'initialisation au rang  $n = 1$  (cas d'un bord quadrilatéral) est immédiate une fois que l'on a obtenu la proposition 5.2.2.

Les sections 5.3 et 5.4 sont consacrées à la démonstration de la proposition 5.2.2. La partie la plus difficile est d'obtenir la continuité de la fonction  $F_D(t)$  au bord, et non pas son interprétation géométrique. À la section 5.3, on reprend des résultats généraux sur les singularités fixes du système de Schlesinger, que Garnier appelle les pseudo-chocs, c'est-à-dire en les points tels que  $t_i = t_j$ ,  $i \neq j$ . Ces résultats sont une partie plus connue du travail de Garnier [15], et ont été développés et généralisés par Sato, Miwa et Jimbo [37]. On reprend ces résultats en approfondissant des aspects qui nous seront utiles pour étudier l'holomorphie de la fonction  $F_D(t)$  en les pseudo-chocs. À la section 5.4, on applique cette étude générale aux solutions particulières du système de Schlesinger qui nous intéresse, c'est-à-dire au cas réel. En rassemblant et en adaptant les résultats de la section précédente, on établit la proposition 5.2.2.

La démonstration proposée dans ce chapitre est très différente de celle de Garnier, même s'il utilise aussi le comportement de la famille de systèmes  $(A_D(t), t \in \pi^n)$  au bord du simplexe  $\pi^n$  et une récurrence sur le nombre de côtés des polygones. Mais son hypothèse de récurrence n'est pas la même, car il ne s'appuie pas sur un résultat de topologie global tel que la proposition 5.2.1. C'est pourquoi son étude est plus complexe. De plus, Garnier n'introduit pas la fonction « rapports des longueurs », il cherche d'abord à refermer les polygones  $P_D(t)$  en faisant disparaître une singularité apparente « de trop » (remarque 3.3.3), puis à ajuster  $n - 1$  rapports de longueurs. Il écrit ces conditions sous la forme d'un système  $\mathcal{S}^n$  à  $n$  équations. Il montre que le système  $\mathcal{S}^n$  tend vers un système analogue de dimension inférieure  $\mathcal{S}^{n-1}$  lorsque  $t_n \rightarrow 0$ , et ceci passe en particulier par l'étude compliquée du système de Garnier (70) lorsque  $t_n \rightarrow 0$ . Il procède ensuite par récurrence : il prolonge une solution du système  $\mathcal{S}^{n-1}$  en une solution du système  $\mathcal{S}^n$ . Il utilise pour cela le théorème d'inversion locale, et doit montrer que le jacobien d'une fonction (qui est quasiment  $F_D(t)$ ) n'est pas nul au bord et à l'intérieur du simplexe  $\pi^n$ . La démonstration de ce dernier point est obscure, voire peu convaincante. De plus, l'initialisation de la récurrence pour le cas du quadrilatère est très elliptique, comme l'attestent les propres travaux ultérieurs de Garnier : il étudie dans les années 1950 et 1960 le cas du quadrilatère dans les articles [17], [18] et [19], et y soulève plusieurs difficultés qu'il ne mentionne pas dans [16].

### 5.1. La fonction « rapports des longueurs » $F_D(t)$

**5.1.1. Définition.** — Considérons la famille isomonodromique de systèmes fuchsien  $(A_D(t), t \in \pi^n)$  associée à un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ , que l'on a introduite au chapitre précédent (section 4.3.1). Pour étudier la dépendance en  $t$  de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$ , on va la comparer à une solution que l'on connaît mieux, la solution fondamentale canonique en l'infini  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$ .

Pour tout  $t \in \pi^n$ , comme le système  $(A_D(t))$  est normalisé en l'infini, il admet une unique matrice fondamentale de solutions canonique en l'infini de la forme

$$\mathbf{Y}_\infty(x, t) = R_\infty\left(\frac{1}{x}, t\right)x^{-L_\infty}, \quad \text{avec } L_\infty = A_\infty = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_\infty\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où la matrice  $R_\infty(w, t)$  est holomorphe en  $w = 0$  et vérifie  $R_\infty(0, t) = \mathbf{I}_2$ . D'après le théorème 2.2.7, cette solution est  $M$ -invariante. De plus, comme la partie principale en  $x = \infty$  est indépendante de  $t$  :

$$\mathbf{Y}_\infty(x, t) \sim x^{-L_\infty},$$

la dépendance en  $t$  de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est entièrement déterminée par la dépendance en  $t$  de la matrice

$$A_D(x, t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{D,i}(t)}{x - t_i}.$$

On a vu au chapitre précédent que les matrices  $A_{D,i}(t)$  sont holomorphes en tout point  $t \in \pi^n$  (proposition 4.3.3). Il existe donc un ouvert simplement connexe  $U$  de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$  qui contient le simplexe  $\pi^n$  tel que les matrices  $A_{D,i}(t)$  sont holomorphes dans  $U$ . On obtient donc le lemme suivant.

**LEMME 5.1.1.** — *La solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est holomorphe dans tout ouvert simplement connexe de l'ensemble  $(\mathbb{P}^1 \times U) \setminus S$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n+2$ , il existe une matrice  $C_i \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  indépendante de  $t$  telle que*

$$\mathbf{Y}_\infty(x, t) = R_i(x, t)(x - t_i)^{L_i} \cdot C_i,$$

où la matrice  $R_i(x, t)$  est holomorphe et inversible dans un voisinage de l'hypersurface  $x = t_i$  de  $\mathbb{P}^1 \times U$ . La matrice  $R_i(x, t)$  se prolonge analytiquement le long de toute courbe de  $\mathbb{P}^1 \times U$  ne coupant aucune des hypersurfaces  $x = t_j$  ( $j \neq i$ ).

On rappelle que l'ensemble  $S \subset \mathbb{P}^1 \times U$  est l'ensemble des singularités de la famille de systèmes  $(A_D(t), t \in U)$

$$S = \bigcup_{t \in U} S(t) \times \{t\} \quad \text{avec} \quad S(t) = \{t_1, \dots, t_{n+3}\}.$$

*Démonstration.* — La première partie du lemme est évidente. Pour  $i = 1, \dots, n + 2$ , au voisinage de la singularité  $x = t_i$ , il existe par la proposition 2.2.1 des matrices fondamentales de solutions de la forme

$$R_i(x, t)(x - t_i)^{L_i},$$

où la matrice  $R_i(x, t)$  est holomorphe en  $x$  au point  $x = t_i$  et  $R_i^0(t) := R_i(x, t)|_{x=t_i}$  est inversible et vérifie

$$A_{D,i}(t) = R_i^0(t)L_iR_i^0(t)^{-1}.$$

Comme la matrice  $A_{D,i}(t)$  est holomorphe dans  $U$ , il existe des matrices  $R_i^0(t)$  appartenant à  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  qui diagonalisent  $A_{D,i}(t)$  et qui soient holomorphes dans  $U$ . On en déduit que la matrice  $R_i(x, t)$ , définie par une condition initiale  $R_i^0(t)$  holomorphe, est holomorphe au voisinage de l'hypersurface  $x = t_i$  de  $\mathbb{P}^1 \times U$ .

A priori, la matrice de connexion entre les matrices fondamentales  $R_i(x, t)(x - t_i)^{L_i}$  et  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  dépend de  $t$ . Comme la matrice de monodromie  $M_i(\mathbf{Y}_\infty)$  de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est indépendante de  $t$ , il existe une matrice  $C_i \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  telle que

$$M_i(\mathbf{Y}_\infty) = C_i^{-1}e^{2i\pi L_i}C_i.$$

Alors, les solutions fondamentales  $R_i(x, t)(x - t_i)^{L_i}$  et  $\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_i^{-1}$  ont la même matrice de monodromie  $e^{2i\pi L_i}$  au point  $x = t_i$ , qui est diagonale et non scalaire. On montre facilement que ceci implique qu'il existe une matrice diagonale  $\Delta_i(t)$  inversible et holomorphe dans  $U$  telle que

$$\mathbf{Y}_\infty(x, t) = R_i(x, t)(x - t_i)^{L_i} \cdot \Delta_i(t) \cdot C_i = R_i(x, t)\Delta_i(t)(x - t_i)^{L_i} \cdot C_i,$$

et la matrice  $R_i(x, t)\Delta_i(t)$  convient.  $\square$

La solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  dont la première ligne constitue les données de Weierstrass d'un disque minimal à bord polygonal est  $M$ -invariante, puisque sa représentation de monodromie est engendrée par les matrices  $M_i$  de la condition (b). La proposition 2.2.6 permet de caractériser l'ensemble des matrices fondamentales de solutions qui sont  $M$ -invariantes, sous réserve que la monodromie des systèmes  $(A_D(t))$  soit irréductible — et c'est bien le cas, car les directions  $D_i$  ne sont pas toutes coplanaires. On a donc

$$(43) \quad \mathbf{Y}_0(x, t) = \mu(t)\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C,$$

où la matrice inversible  $C$ , qui est indépendante de  $t$ , est une matrice de conjugaison entre les matrices de monodromie de la solution  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  et les matrices  $M_i$ , et où la fonction  $\mu : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  est holomorphe. Comme la solution  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  est définie à multiplication près par une fonction réelle de  $t$  jamais nulle, on peut la choisir comme suit.

LEMME 5.1.2. — *Il existe une matrice  $C_0 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$  indépendante de  $t$  telle que la première ligne de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t) = \mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0$  constitue les données de Weierstrass d'une immersion appartenant à  $\mathcal{X}_D^n$ .*

*Démonstration.* — Par les propriétés de réalité du système  $(A_D(t))$ , pour tout  $t \in \pi^n$ , la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$  est à valeurs réelles dès que  $x \in ]-\infty, t_1[$ . Si, par souci de simplicité, on choisit définitivement une position du repère de  $\mathbb{R}^3$  telle que la direction  $D_{n+3}$  est dirigée par le second vecteur de base  $e_2$ , alors on a vu au chapitre 3 que la première ligne de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  est réelle ou purement imaginaire dès que  $x \in ]-\infty, t_1[$ . Quitte à inverser l'orientation de  $D_{n+3}$ , on peut supposer qu'elle est réelle, et on en conclut donc que

$$\forall t \in \pi^n, \quad \mu(t)C \in \text{GL}(2, \mathbb{R}).$$

En particulier, les éléments de la matrice  $C$  ont tous le même argument ; il existe donc un nombre réel  $\varphi$  tel que la matrice  $C_0 := e^{i\varphi}C$  soit dans  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ . Alors  $\mu_0(t) := e^{-i\varphi}\mu(t)$  est à valeurs réelles dans  $\pi^n$ , et les solutions fondamentales  $\mathbf{Y}_0(x, t) = \mu_0(t)\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0$  et  $\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0$  définissent des surfaces minimales homothétiques. On peut donc supposer que  $\mathbf{Y}_0(x, t) = \mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0$ .  $\square$

Remarquons que l'expression obtenue dans le lemme précédent pour les données de Weierstrass est beaucoup plus simple que celle obtenue par Garnier à partir de solutions d'équations fuchsienes.

Notons, pour une matrice  $\mathbf{Y} \in M(2, \mathbb{C})$ ,

$$L_1(\mathbf{Y}) := \sqrt{|y_1|^2 + |z_1|^2} \quad \text{où } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

(bien que ce ne soit pas une norme). Alors les longueurs des côtés du disque minimal défini par la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  sont données, pour tout  $t \in \pi^n$ , par

$$\ell_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1(\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0)^2 dx \in ]0, +\infty[ \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Elles sont bien définies de par leur interprétation géométrique, mais aussi parce que les exposants en  $x = t_i$  du système fuchsien  $(A_D(t))$  sont strictement supérieurs à  $-\frac{1}{2}$ . De plus, les fonctions  $\ell_i(t)$  ne peuvent s'annuler dans  $\pi^n$ , car alors la première ligne de la solution  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  serait nulle pour tout  $x$  dans l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ , ce qui est impossible. Les rapports de longueurs s'écrivent donc, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$(44) \quad r_i(t) = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1(\mathbf{Y}_0(x, t))^2 dx}{\int_0^1 L_1(\mathbf{Y}_0(x, t))^2 dx} = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} L_1(\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0)^2 dx}{\int_0^1 L_1(\mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0)^2 dx}.$$

**5.1.2. Holomorphie.** — On veut étendre la fonction  $F_D(t)$  en une fonction holomorphe dans un voisinage du simplexe  $\pi^n$ . Pour cela, il faut obtenir les rapports  $r_i(t)$  par l'intégration de fonctions holomorphes en  $t$ , c'est-à-dire, en particulier, ne comportant pas de module. La solution fondamentale  $\mathbf{Y}_0(x, t)$  a des propriétés de réalité qui permettent de se débarrasser des modules dans l'expression (44). Grâce au lemme 5.1.2, on a choisi des données de Weierstrass qui héritent à la fois des propriétés de réalité de la solution  $\mathbf{Y}_0(x, t)$ , et de la régularité de la solution  $\mathbf{Y}_\infty(x, t)$ , puisqu'on a

pu éliminer la dépendance en  $t$  due à la fonction  $\mu(t)$  dans l'expression (43) de  $\mathbf{Y}_0(x, t)$ . On obtient ainsi une expression de la fonction  $F_D(t)$  qui sera aussi utile pour l'étude en les pseudo-chocs.

PROPOSITION 5.1.3. — *Soit un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$ . Il existe un ouvert simplement connexe de l'ensemble  $\mathcal{B}^n$  contenant  $\pi^n$  et contenu dans  $U$ , que l'on note encore  $U$ , et une fonction  $\underline{F}_D : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorphe dans  $U$  qui prolonge la fonction « rapports des longueurs »  $F_D : \pi^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$  :*

$$\underline{F}_D|_{\pi^n} = F_D.$$

*Démonstration.* — On fixe  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Considérons une matrice  $S_i \in \text{SU}(2)$  qui soit un relevé d'une rotation envoyant la direction  $D_i$  sur le second axe de coordonnées. Alors la première ligne  $(g_i(x, t), h_i(x, t))$  de la solution fondamentale

$$(45) \quad \mathbf{Y}_i(x, t) := \mathbf{Y}_0(x, t) \cdot S_i = \mathbf{Y}_\infty(x, t) \cdot C_0 \cdot S_i$$

constitue les données de Weierstrass d'une surface minimale bordée par un polygone dont le  $i$ -ème côté est parallèle au second axe de coordonnées. On a vu qu'alors cette première ligne est réelle ou purement imaginaire lorsque  $x \in ]t_i, t_{i+1}[$ . On peut choisir  $S_i$  telle qu'elle soit réelle. Comme  $S_i \in \text{SU}(2)$ , on a pour tout  $t \in \pi^n$  et tout  $x \in ]t_i, t_{i+1}[$

$$L_1(\mathbf{Y}_0(x, t))^2 = L_1(\mathbf{Y}_0(x, t) \cdot S_i)^2 = g_i(x, t)^2 + h_i(x, t)^2.$$

On a donc

$$(46) \quad \ell_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (g_i(x, t)^2 + h_i(x, t)^2) dx,$$

et  $r_i(t) = \ell_i(t)/\ell_{n+1}(t)$ .

On peut donc étendre la fonction  $F_D(t)$  à l'ouvert  $U$ . En effet, quitte à diminuer l'ouvert  $U$ , on suppose que pour tout  $t$  dans  $U$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ , les points  $t_j$  ( $j \neq i, i+1$ ) n'appartiennent pas au segment de droite limité par  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . On peut donc toujours calculer les intégrales précédentes le long des segments joignant  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Alors pour tout  $t \in U$  on a

$$\ell_i(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_0^1 (g_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2 + h_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2) d\xi.$$

Pour tout  $t \in U$ , la fonction  $\ell_{n+1}(t)$  n'est jamais nulle, vu que ceci forcerait les fonctions  $g_{n+1}(\cdot, t)$  et  $h_{n+1}(\cdot, t)$  à être identiquement nulles sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

Montrons que les fonctions  $\ell_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) sont holomorphes en un point  $t^0 \in \pi^n$ . D'après le lemme 5.1.1, comme la matrice  $C_i C_0 S_i$  est indépendante de  $t$ , la fonction

$$\mathcal{G}_i(\xi, t) := g_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2 + h_i(t_i + \xi(t_{i+1} - t_i), t)^2$$

est holomorphe en  $t$  au point  $t = t^0$  pour tout  $\xi$  fixé,  $0 < \xi < 1$ , et donc il suffit de la dominer par une fonction intégrable indépendante de  $t$ , pour tout  $t$  dans un voisinage de  $t^0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que la boule

$$B_\varepsilon(t^0) = \{t \in \mathbb{C}^n \mid \forall i = 1, \dots, n, |t_i - t_i^0| < \varepsilon\}$$

soit contenue dans l'ouvert  $U$ . On scinde l'intervalle d'intégration

$$\ell_i(t) = \ell_i^-(t) + \ell_i^+(t),$$

avec

$$\ell_i^-(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}_i(\xi, t) d\xi \quad \text{et} \quad \ell_i^+(t) = (t_{i+1} - t_i) \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathcal{G}_i(\xi, t) d\xi.$$

Considérons la fonction  $\ell_i^-(t)$ . Il faut choisir  $\varepsilon$  tel que pour tout  $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$  et pour tout  $t \in B_\varepsilon(t^0)$ , la quantité  $\xi(t_{i+1} - t_i)$  soit contenue dans un disque centré en 0 de rayon  $\eta_i$  indépendant de  $\xi$  et de  $t$  et qui ne contienne aucune des valeurs singulières  $t_j - t_i$ ,  $j \neq i$ . On n'entre pas dans les détails de calculs ; si on suppose que  $\varepsilon < \frac{1}{6}(t_{i+1}^0 - t_i^0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), alors

$$\eta_i = \frac{2}{3}|t_{i+1}^0 - t_i^0|$$

convient. Toujours par le lemme 5.1.1 et parce que la matrice  $C_i C_0 S_i$  est indépendante de  $t$ , les fonctions  $g_i(x, t)$  et  $h_i(x, t)$  sont au voisinage de  $x = t_i$  des combinaisons linéaires à coefficients indépendants de  $t$  de fonctions de la forme

$$(x - t_i)^{-\frac{1}{2}\theta_i} \varphi_i(x - t_i, t) \quad \text{et} \quad (x - t_i)^{\frac{1}{2}\theta_i} \psi_i(x - t_i, t)$$

où les fonctions  $\varphi_i(y, t)$  et  $\psi_i(y, t)$  sont holomorphes en  $t \in U$  et en  $y$  tant que  $y \neq t_j - t_i$  ( $j \neq i$ ). Ces fonctions  $\varphi_i(y, t)$  et  $\psi_i(y, t)$  sont donc bornées pour tout  $y$  tel que  $|y| < \eta_i$  et pour tout  $t \in B_\varepsilon(t^0)$ . Il existe donc des constantes  $K_0, K_1, K_{-1} > 0$  telles que pour tout  $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$  et tout  $t \in B_\varepsilon(t^0)$ , comme  $y_i < |t_{i+1} - t_i| < 2\eta_i$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_i(\xi, t)| &\leq K_0 + K_{-1}|t_{i+1} - t_i|^{-\theta_i} \xi^{-\theta_i} + K_1|t_{i+1} - t_i|^{\theta_i} \xi^{\theta_i} \\ &\leq K_0 + K_{-1}(\eta_i)^{-\theta_i} \xi^{-\theta_i} + K_1(2\eta_i)^{\theta_i} \xi^{\theta_i}. \end{aligned}$$

On obtient donc que la fonction  $\ell_i^-(t)$  est holomorphe au point  $t^0$ . On procéderait de même pour  $\ell_i^+(t)$ . La fonction  $F_D(t)$  est donc holomorphe en tout point du simplexe  $\pi^n$ . Elle est donc holomorphe dans un ouvert simplement connexe  $\underline{U}$  de  $\mathcal{B}^n$  contenant  $\pi^n$ , et on appelle toujours  $U$  l'intersection  $U \cap \underline{U}$ .  $\square$

## 5.2. La démonstration par récurrence

**5.2.1. La proposition fondamentale.** — La fonction  $F_D : \pi^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$  est continue dans  $\pi^n$  d'après la proposition 5.1.3. Par identification naturelle des simplexes  $\pi^n$  et  $]0, +\infty[^n$  (identification que l'on précisera dans la suite), on obtient une fonction continue

$$\tilde{F}_D : ]0, +\infty[^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n.$$

Pour montrer que la fonction  $F_D$  est surjective, on va montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  est homotope à l'identité, c'est-à-dire de degré 1. Le point essentiel pour établir ce résultat est l'étude du comportement de  $F_D$  au bord du simplexe  $\pi^n$ . On commence par établir la proposition suivante, qui, une fois obtenu ce comportement au bord, nous permettra de conclure grâce à un raisonnement par récurrence.

PROPOSITION 5.2.1. — *Soient un ensemble convexe et compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , et une fonction continue  $f : K \rightarrow K$  telle que  $f(\partial K) \subset \partial K$ . Si la fonction  $f|_{\partial K} : \partial K \rightarrow \partial K$  est de degré 1, alors la fonction  $f : K \rightarrow K$  est de degré 1 dans  $K$ .*

La notion standard de degré concerne les applications différentiables (ou seulement continues) entre variétés sans bord. On peut néanmoins l'étendre aux variétés ayant un bord, à la condition que les applications préservent le bord. Cependant, la notion importante ici est le fait que pour une application continue, être de degré 1 est équivalent à être homotope à l'identité : on veut montrer que la fonction  $F_D$  préserve la structure simpliciale du bord des domaines  $\pi^n$  et  $]0, +\infty[^n$  (après identification naturelle).

*Démonstration.* — On commence par montrer cette proposition lorsque le convexe compact  $K$  coïncide avec la boule unité fermée  $\bar{B} := \bar{B}_1(0)$  de  $\mathbb{R}^n$  pour la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ . On procède par déformations homotopiques. Par hypothèse, il existe une fonction continue  $h : [0, 1] \times \partial B \rightarrow \partial B$  telle que

$$h(0, \cdot) = f|_{\partial B}, \quad h(1, \cdot) = \text{id}_{\partial B}.$$

On va construire une fonction continue  $H : [0, 1] \times \bar{B} \rightarrow \bar{B}$  telle que

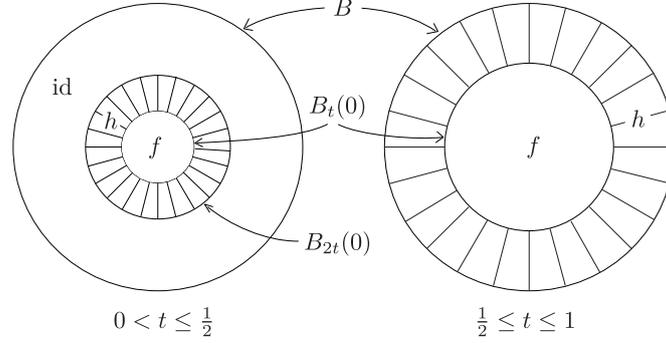
$$(47) \quad H(0, \cdot) = \text{id}_{\bar{B}}, \quad H(1, \cdot) = f.$$

On procède en deux étapes, suivant la valeur de  $t$  (voir figure 1). On définit tout d'abord la fonction  $H(t, \cdot) : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$  pour  $t$  fixé,  $0 < t \leq \frac{1}{2}$ , en faisant une rétraction de  $f$  de  $\bar{B}_t(0)$  dans  $\bar{B}_t(0)$ , puis en la transformant au bord par la fonction  $h$  pour obtenir l'identité. Plus précisément, on pose

$$H(t, x) = \begin{cases} tf\left(\frac{x}{t}\right) & \forall x \in B_t(0), \\ \|x\| h\left(\frac{\|x\|}{t} - 1, \frac{x}{\|x\|}\right) & \forall x \in B_{2t}(0) \setminus B_t(0), \\ x & \forall x \in \bar{B} \setminus B_{2t}(0). \end{cases}$$

De même, pour  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ , on se contente de grossir et de tronquer le cas précédent :

$$H(t, x) = \begin{cases} tf\left(\frac{x}{t}\right) & \forall x \in B_t(0), \\ \|x\| h\left(\frac{\|x\|}{t} - 1, \frac{x}{\|x\|}\right) & \forall x \in \bar{B} \setminus B_t(0). \end{cases}$$

FIGURE 1. La fonction  $H(t, \cdot)$  suivant la valeur de  $t$ .

La fonction  $H$  vérifie la condition (47) et est continue en tout point de l'ensemble  $[0, 1] \times \bar{B} \setminus \{(0, 0)\}$ . Pour vérifier qu'elle est continue au point  $(0, 0)$  et que  $H(0, 0) = 0$ , il suffit de remarquer que pour tout  $0 < t \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\forall x \in B_t(0), \|H(t, x)\| \leq t \quad \text{et} \quad \forall x \in B_{2t}(0) \setminus B_t(0), \|H(t, x)\| \leq \|x\|.$$

Dans le cas général, lorsque le convexe compact  $K$  est quelconque, il existe un homéomorphisme  $\varphi : K \rightarrow \bar{B}$  qui envoie le bord de  $K$  sur la sphère  $\partial B$ . Alors en appliquant le résultat qu'on vient d'établir à la fonction

$$g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \bar{B} \rightarrow \bar{B},$$

on obtient que la fonction  $f$  est de degré 1.  $\square$

On va montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  s'étend continûment au bord de  $]0, +\infty[^n$  et que  $\tilde{F}_D(\partial(]0, +\infty[^n)) \subset \partial(]0, +\infty[^n)$ . On procèdera par récurrence pour obtenir que la fonction

$$\tilde{F}_D|_{\partial(]0, +\infty[^n)} : \partial(]0, +\infty[^n) \rightarrow \partial(]0, +\infty[^n)$$

est de degré 1. Commençons par compactifier les simplexes  $\pi^n$  et  $]0, +\infty[^n$  dans  $\bar{\mathbb{R}}^n = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^n$  et par expliciter leur bord et la manière de les identifier. On écrit

$$\begin{aligned} ]0, +\infty[^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_n < x_{n-1} + x_n < \dots < x_1 + \dots + x_n < +\infty\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < s_n(x) < \dots < s_1(x) < +\infty\} \end{aligned}$$

où on a posé  $s_i(x) = x_i + \dots + x_n$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $s_0(x) = +\infty$ ,  $s_{n+1}(x) = 0$ . Les adhérences sont données par

$$\begin{aligned} \overline{\pi^n} &= \{t \in \bar{\mathbb{R}}^n \mid -\infty \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 0\}, \\ \overline{]0, +\infty[^n} &= [0, +\infty[^n = \{x \in \bar{\mathbb{R}}^n \mid 0 \leq s_n(x) \leq \dots \leq s_1(x) \leq +\infty\}. \end{aligned}$$

Les bords  $\partial\pi^n$  et  $\partial(]0, +\infty[^n)$  sont constitués de simplexes de dimensions 0 à  $n - 1$ . On paramètre ces simplexes de la façon suivante. Soit

$$\Delta := \{0, 1\}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}.$$

On note  $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_n)$  les éléments de  $\Delta$ . On a la réunion disjointe de simplexes

$$\partial\pi^n = \bigsqcup_{\delta \in \Delta} P^\delta,$$

avec

$$P^\delta = \{(t_1, \dots, t_n) \in \overline{\pi^n} \mid \forall i = 0, \dots, n, t_i = t_{i+1} \Leftrightarrow \delta_i = 0\}$$

où on note  $t_{n+1} = 0$  et  $t_0 = t_{n+3} = -\infty$ . Pour tout  $\delta \in \Delta$ , on a un isomorphisme naturel

$$\varphi_\delta : P^\delta \longrightarrow \pi^{|\delta|}$$

où la dimension du simplexe est donnée par  $|\delta| = \sum_{i=0}^n \delta_i - 1$ . Cet isomorphisme est obtenu en « enlevant » les composantes  $t_i$  telles que  $\delta_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et celles qui valent  $-\infty$ . De même

$$\partial(]0, +\infty[^n) = \bigsqcup_{\delta \in \Delta} R^\delta,$$

avec

$$R^\delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n \mid \forall i = 0, \dots, n, s_{i+1}(x) = s_i(x) \Leftrightarrow \delta_i = 0\}.$$

On a également les isomorphismes

$$\psi_\delta : R^\delta \longrightarrow ]0, +\infty[^{|\delta|}.$$

De même, on note  $D^\delta \in D^{|\delta|}$  le jeu de directions orientées obtenu à partir de  $D \in \mathcal{D}^n$  en « enlevant » les directions orientées  $D_i$  telles que  $\delta_i = 0$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Les deux directions orientées  $D_{n+1}$  et  $D_{n+2}$  ne peuvent donc jamais disparaître. Grâce à la définition 3.1.2 de l'ensemble  $\mathcal{D}^n$ , on voit que le jeu de directions orientées  $D^\delta$  appartient bien à  $\mathcal{D}^{|\delta|}$ . Alors

$$F_{D^\delta} : \pi^{|\delta|} \longrightarrow ]0, +\infty[^{|\delta|}.$$

Le but des sections suivantes va être d'établir la proposition fondamentale :

PROPOSITION 5.2.2. — *Pour tout  $\delta \in \Delta$ , la fonction « rapports des longueurs »  $F_D(t)$  associée à un jeu de direction  $D \in \mathcal{D}^n$  s'étend continûment à la face  $P^\delta$  de  $\pi^n$  et l'on a*

$$(48) \quad F_D|_{P^\delta} = \psi_\delta^{-1} \circ F_{D^\delta} \circ \varphi_\delta.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère un homéomorphisme

$$\Phi_n : ]0, +\infty[^n \longrightarrow \pi^n$$

tel que pour tout  $\delta \in \Delta$  on ait

$$\Phi_n(R^\delta) = P^\delta.$$

On pose alors

$$\tilde{F}_D := F_D \circ \Phi_n \quad \text{et} \quad \tilde{F}_D : ]0, +\infty[^n \longrightarrow ]0, +\infty[^n.$$

Étant donné les propositions 5.2.1 et 5.2.2, pour montrer que la fonction  $\tilde{F}_D$  est de degré 1, on va faire une récurrence forte, et la bonne hypothèse est :

*Hypothèse de récurrence au rang  $n$*  : pour tout  $k = 1, \dots, n$ , pour tout jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^k$  la fonction suivante est de degré 1 :

$$\tilde{F}_D = F_D \circ \Phi_k, \quad \tilde{F}_D : ]0, +\infty[^k \longrightarrow ]0, +\infty[^k.$$

Pour tout  $\delta \in \Delta$ , comme  $|\delta| < n$ , on obtient ainsi, grâce à l'hypothèse de récurrence au rang  $n - 1$ , que  $\tilde{F}_D|_{R^\delta} : R^\delta \rightarrow R^\delta$  est de degré 1, et on a donc

$$\tilde{F}_D|_{\partial(]0, +\infty[^n)} : \partial(]0, +\infty[^n) \longrightarrow \partial(]0, +\infty[^n)$$

est de degré 1. Par la proposition 5.2.1, on peut alors en conclure que la fonction  $\tilde{F}_D : ]0, +\infty[^n \rightarrow ]0, +\infty[^n$  est de degré 1, et l'hérédité de la récurrence est établie.

**5.2.2. Le cas du quadrilatère ( $n = 1$ ).** — L'initialisation de la récurrence au rang  $n = 1$  est immédiate à partir de la proposition 5.2.2. Dans ce cas, pour tout  $D = (D_t, D_0, D_1, D_\infty) \in \mathcal{D}^1$ , la fonction « rapports des longueurs »

$$F_D : ]-\infty, 0[ \longrightarrow ]0, +\infty[$$

est le rapport de la longueur du premier côté (de direction  $D_t$ ) sur la longueur du deuxième (de direction  $D_0$ ). Ici,  $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$  avec  $\delta_1 = \{0, 1\}$  et  $\delta_2 = \{1, 0\}$ , et  $P^{\delta_1} = \{-\infty\}$ ,  $R^{\delta_1} = \{+\infty\}$ ,  $P^{\delta_2} = \{0\}$  et  $R^{\delta_2} = \{0\}$ . La proposition 5.2.2 nous donne donc ce à quoi on pouvait raisonnablement s'attendre :

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_D(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F_D(t) = +\infty.$$

On peut choisir

$$\Phi_1 : ]0, +\infty[ \longrightarrow ]-\infty, 0[, \quad \Phi_1(t) = -t$$

c'est-à-dire

$$\tilde{F}_D : ]0, +\infty[ \longrightarrow ]0, +\infty[, \quad \tilde{F}_D(t) = F_D(-t).$$

On en déduit donc que la fonction  $\tilde{F}_D$  est de degré 1 (cas particulier évident de la dimension 1 de la proposition 5.2.1).

On représente à la figure 2 les variations lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow 0$  du quadrilatère  $P_D(t)$  défini par le jeu de directions orientées  $D$ , et pour lequel le problème de Plateau admet une solution. On note  $a_t = X(t)$ ,  $a_0 = X(0)$ ,  $a_1 = X(1)$  et  $a_\infty = X(\infty)$  les sommets de ce quadrilatère. Les sommets  $a_0$  et  $a_1$  ne peuvent pas disparaître au cours de la déformation. Comme les quadrilatères  $(P_D(t), t \in ]-\infty, 0[)$  sont définis à translation et homothétie de rapport positif près, et comme la direction  $D_0$  est fixée, on peut supposer que la position des sommets  $a_0$  et  $a_1$  est fixe.

Aux cas limites, lorsque  $t = -\infty$  ou  $t = 0$ , les données de Weierstrass d'une surface minimale limitée par un triangle ayant un sommet en l'infini sont des solutions d'une équation hypergéométrique.

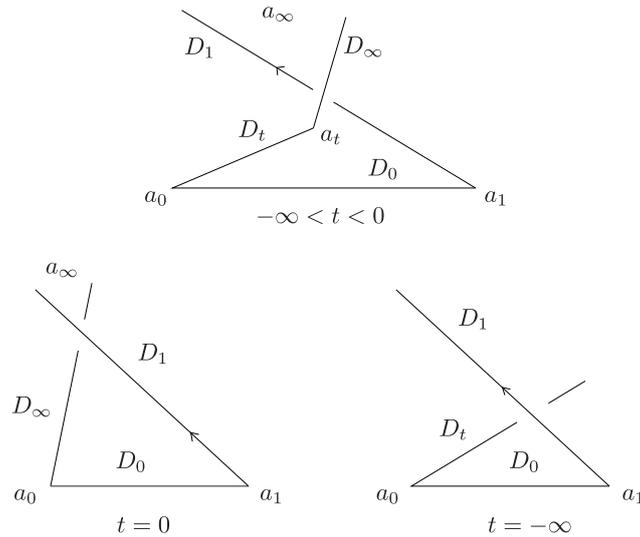


FIGURE 2. Déformation du quadrilatère défini par un jeu de directions orientées

REMARQUE 5.2.3. — Si les directions orientées  $D_\infty$ ,  $D_t$  et  $D_0$  sont dans un même plan, et si la direction  $D_1$  n'appartient pas à ce plan, alors ces directions ne sont pas les directions d'un quadrilatère de  $\mathbb{R}^3$ , et il n'existe aucune valeur de  $t$  pour laquelle le quadrilatère  $P_D(t)$  « se referme ». Par contre, suivant l'orientation des directions  $D_\infty$ ,  $D_t$  et  $D_0$ , il peut exister une valeur de  $t$  telle que la demi-droite  $(a_t(t), -D_\infty)$  passe par le sommet  $a_1(t)$  (qui devient donc aussi le sommet  $a_\infty(t)$ ) : on obtient un triangle de  $\mathbb{R}^3$ .

**5.2.3. Le changement de variables.** — On va détailler uniquement le cas des faces  $P^\delta$  où  $\delta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  : on fixe un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , et on étudie la fonction  $F_D(t)$  lorsque  $t_p, t_{p+1}, \dots, t_n$  tendent vers  $t_{n+1} = 0$ , les autres variables  $t_1, \dots, t_{p-1}$  demeurant à distance mutuelle supérieure à un réel strictement positif. De manière générale, on va noter par  $\alpha$  les indices prenant les valeurs  $1, \dots, p-1, n+2$ , et par  $\beta$  ceux variant entre  $p$  et  $n+1$ . Pour tout  $t \in \mathcal{B}^n$ , on fait le changement de variables suivant

$$(49) \quad \tau := t_p, \quad \nu_\beta := \frac{t_\beta}{\tau} \quad (p \leq \beta \leq n+1),$$

et on note

$$t' = (t_1, \dots, t_{p-1}) \quad \text{et} \quad \nu = (1, \nu_{p+1}, \dots, \nu_n).$$

Par abus de notation, on identifiera  $\nu$  et  $(\nu_{p+1}, \dots, \nu_n)$ . En particulier, on écrira  $\nu \in \mathcal{B}^{n-p}$  pour signifier que  $(\nu_{p+1}, \dots, \nu_n) \in \mathcal{B}^{n-p}$ . Alors

$$t = (t', \tau \cdot \nu).$$

À  $t' \in \mathcal{B}^{p-1}$  et  $\nu \in \mathcal{B}^{n-p}$  fixés, le  $n$ -uplet  $(t', \tau \cdot \nu)$  est dans  $\mathcal{B}^n$  dès que  $|\tau|$  est suffisamment petit. On définit l'image  $V$  de l'ouvert  $U$  par le changement de variables

$$(50) \quad V := \{(t', \nu, \tau) \in \mathbb{C}^n \mid (t', \tau \cdot \nu) \in U\}.$$

Dans le cas réel, c'est-à-dire lorsque la variable  $t$  est dans le simplexe  $\pi^n$ , la variable  $t'$  est dans  $\pi^{p-1}$  et la variable  $\nu$  est dans le simplexe  $\tilde{\pi}^{n-p}$  défini par

$$\tilde{\pi}^k := \{(\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 < \nu_k < \dots < \nu_1 < 1\}.$$

On considère un voisinage simplement connexe  $U'$  du simplexe  $\pi^{p-1}$  contenu dans  $\mathcal{B}^{p-1}$  et un voisinage simplement connexe  $\tilde{U}$  du simplexe  $\tilde{\pi}^{n-p}$  contenu dans  $\mathcal{B}^{n-p}$  tels que pour tout  $(t', \nu) \in U' \times \tilde{U}$ , il existe  $\tau \in \mathbb{C}^*$  tel que le  $n$ -uplet  $(t', \nu, \tau)$  soit dans l'ensemble  $V$ . On suppose de plus que l'ouvert  $\tilde{U}$  est borné : ceci est possible puisque le simplexe  $\tilde{\pi}^{n-p}$  l'est.

La proposition suivante rassemble les résultats que l'on va établir dans les deux sections suivantes. Elle donne le comportement de la fonction  $F_D$  en les variables  $(t', \nu, \tau)$  aux points  $(t^0, \nu^0, 0)$ , avec  $(t^0, \nu^0) \in U' \times \tilde{U}$ . Comme on va étudier le comportement de la fonction  $F_D$  en chacune des variables  $t'$ ,  $\nu$  et  $\tau$  séparément, on utilisera pour conclure le théorème de l'analyticité séparée d'Hartogs. C'est pourquoi on a eu besoin d'étendre la fonction  $F_D(t)$  à l'ouvert  $U$ . On verra ensuite que cette proposition nous permet de déduire la continuité de  $F_D$  en la variable  $t$  en les points du bord du simplexe  $\pi^n$ .

PROPOSITION 5.2.4. — *Soient un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$  et un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ . On définit le jeu de directions orientées  $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$  par*

$$D' = (D_1, \dots, D_{p-1}, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}),$$

*et on note  $\sigma\pi$  la mesure de l'angle extérieur entre les directions orientées  $D_{p-1}$  et  $D_{n+1}$  telle que  $0 < \sigma < 1$ . Soit un ouvert  $\Omega'$  de  $U'$  tel que pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-1$ , sa projection  $\Omega'_\alpha$  sur la  $\alpha$ -ième coordonnée vérifie  $\text{dist}(\Omega'_\alpha, 0) > 0$ . Alors il existe un réel strictement positif  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout secteur*

$$S_{\varepsilon, \varphi} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon, \quad |\arg \tau| < \varphi\},$$

*le produit cartésien  $\Omega' \times \tilde{U} \times S_{\varepsilon, \varphi}$  soit contenu dans  $V$  et que dans ce produit la fonction  $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$  vérifie*

$$\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu) = \mathcal{H}(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

*où  $\mathcal{H}(t', \nu, u, v)$  est une fonction holomorphe en  $(t', \nu, u, v)$  au voisinage de chacun des points  $(t^0, \nu^0, 0, 0)$ , avec  $t^0 \in \Omega'$  et  $\nu^0 \in \tilde{U}$ . De plus, pour tout  $(t', \nu) \in U' \times \tilde{U}$ , on a*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu) = (\underline{F}_{D'}(t'), 0 \dots, 0).$$

REMARQUE 5.2.5. — On procéderait de même pour les autres faces du simplexe  $\pi^n$ , et on obtiendrait des résultats analogues, en faisant des changements de variables adaptés, par exemple :

$$\begin{aligned} t &= (t_1, \dots, t_{p-1}, \tau + t_q, \dots, \tau\nu_{q-1} + t_q, t_q, \dots, t_n), & (\tau \rightarrow 0), \\ t &= (t_1, \dots, t_{p-1}, \tau + t_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_{q-1}, \tau\nu + t_{q+1}, t_{q+1}, \dots, t_n), & (\tau \rightarrow 0), \\ t &= \left(\frac{\nu_1}{\tau}, \dots, \frac{1}{\tau}, t_p, \dots, t_n\right), & (\tau \rightarrow 0). \end{aligned}$$

La proposition 5.2.4 permet d'établir la proposition fondamentale 5.2.2.

*Démonstration de la proposition 5.2.2.* — Pour étendre de manière continue la fonction  $F_D(t)$  en chacune des faces  $P^\delta$  du bord de  $\pi^n$ , on va procéder par récurrence sur la codimension  $n - |\delta|$  de  $P^\delta$ .

Soit une « face »  $P^\delta$  de  $\pi^n$  de codimension 1, c'est-à-dire telle qu'il existe  $p$  dans l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  vérifiant  $\delta_p = 0$  et  $\delta_i = 1$  pour tout  $i \neq p$ . Soit  $t^0$  un point de  $P^\delta$ . Alors  $t_p^0 = t_{p+1}^0$ . Dans ce cas, le changement de variables adapté est

$$\tau := t_p - t_{p+1}^0, \quad t' := (t_i)_{1 \leq i \leq n, i \neq p}.$$

Alors une variante adaptée au point  $t^0$  de la proposition 5.2.4 nous assure que la fonction  $F_D(t', \tau + t_{p+1}^0)$  est holomorphe en  $(t', \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma})$  au point  $t' = t'^0, \tau = 0$ , et on obtient donc que la fonction  $F_D(t)$  est continue en  $t^0$ .

Supposons que la fonction  $F_D(t)$  se prolonge continûment à toutes les faces de codimension inférieure ou égale à  $q - 1$ . Soit  $t^0$  un point d'une face  $P^\delta$  de codimension  $n - |\delta| = q$ . Pour simplifier l'écriture, on va supposer encore  $\delta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire  $t^0 = (t'^0, 0, \dots, 0)$ , avec  $t'^0 \in \pi^{p-1}$  et  $p = |\delta| + 1 = n - q + 1$ . Soit  $K'$  un compact de  $\pi^{p-1}$  tel que  $t'^0$  soit à l'intérieur de  $K'$ . Alors, par la proposition 5.2.4, on sait qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tous  $t' \in K', \nu \in \tilde{\pi}^{n-p}, -\varepsilon < \tau < 0$ , on ait

$$\begin{aligned} F_D(t', \tau \cdot \nu) &= \mathcal{H}(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \\ &= (F_{D'}(t'), 0, \dots, 0) + \tau^\sigma \mathcal{H}_1(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) + \tau^{1-\sigma} \mathcal{H}_2(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}) \end{aligned}$$

où les fonctions  $\mathcal{H}_i(t', \nu, u, v)$  ont les mêmes propriétés que la fonction  $\mathcal{H}$ . Par l'hypothèse de récurrence, étant donné que la codimension des faces de  $\tilde{\pi}^{n-p}$  est inférieure ou égale à  $n - p = q - 1$ , la fonction  $F_D(t', \tau \cdot \nu)$  se prolonge continûment en tous les points  $t = (t', \tau \cdot \nu)$  tels que

$$t' \in K', \quad \nu \in \partial \tilde{\pi}^{n-p}, \quad -\varepsilon < \tau < 0.$$

La fonction  $\mathcal{H}(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma})$  est donc continue dans le compact

$$K' \times \overline{\tilde{\pi}^{n-p}} \times [-\varepsilon, 0].$$

On en conclut donc qu'il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $(t', \nu, \tau)$  dans ce compact, on ait

$$\|\mathcal{H}_i(t', \nu, \tau^\sigma, \tau^{1-\sigma})\| \leq C_i \quad (i = 1, 2).$$

Et donc

$$\|F_D(t', \tau \cdot \nu) - (F_{D'}(t'), 0 \dots, 0)\| \leq C_1 |\tau|^\sigma + C_2 |\tau|^{1-\sigma}.$$

L'ensemble  $\{t = (t', t_p, \dots, t_n) \in \pi^n \mid t' \in K', -\varepsilon < t_p < 0\}$  est bien un voisinage de  $t^0$  dans  $\pi^n$ , et pour tout  $t$  dans cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} \|F_D(t) - (F_{D'}(t^0), 0 \dots, 0)\| &\leq \|F_D(t) - (F_{D'}(t'), 0 \dots, 0)\| \\ &\quad + \|(F_{D'}(t'), 0 \dots, 0) - (F_{D'}(t^0), 0 \dots, 0)\| \\ &\leq C_1 |t_p|^\sigma + C_2 |t_p|^{1-\sigma} + C_0 \|t' - t'^0\|, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que la fonction  $F_{D'}(t')$  est lipschitzienne dans le compact  $K'$ . La fonction  $F_D(t)$  est donc bien continue au point  $t^0$ .  $\square$

### 5.3. Les pseudo-chocs

Dans cette section, on rappelle des résultats connus sur le comportement du système de Schlesinger au voisinage des singularités que Garnier appelle « pseudo-chocs », c'est-à-dire lorsque plusieurs  $t_i$  viennent se confondre. On ne se limite pas ici au cas réel, ni aux systèmes fuchsien dont la monodromie vérifie une condition du type (b). Ces résultats sont une partie connue du travail de Garnier. Ils ont été modernisés et approfondis par M. Sato, T. Miwa et M. Jimbo dans [37]. On les adapte à la situation qui nous intéresse : le but de cette section est d'obtenir la dépendance en  $\tau$  de la fonction  $F_D(t', \tau \cdot \nu)$  au point  $\tau = 0$ . On donne à l'appendice B les démonstrations des principaux résultats de [37] et [24] que l'on va utiliser, et on établit dans ce chapitre uniquement les propriétés nouvelles dont on a besoin.

On considère une famille isomonodromique de systèmes fuchsien non résonnants et normalisés en l'infini

$$\frac{dY}{dx} = A(x, t)Y, \quad \text{où} \quad A(x, t) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_i(t)}{x - t_i}$$

où les matrices  $A_1(t), \dots, A_{n+2}(t)$  sont solutions du système de Schlesinger (17). On suppose que pour  $i = 1, \dots, n+2$ , les matrices  $A_i(t)$  sont à trace nulle. On note

$$-\frac{1}{2}\theta_i, \quad \frac{1}{2}\theta_i$$

les valeurs propres de la matrice  $A_i(t)$ , qui sont constantes, ainsi que

$$A_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} A_i(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_\infty\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , et on étudie le comportement des matrices  $A_i(t)$  lorsque  $t_p, \dots, t_n$  tendent vers 0, les autres variables  $t_1, \dots, t_{p-1}$  demeurant à distance mutuelle supérieure à un nombre strictement positif. On fait le changement de variables (49). Le système précédent s'écrit alors

$$(51) \quad \frac{dY}{dx} = \left( \sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha}(t', \tau \cdot \nu)}{x - t_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{A_{\beta}(t', \tau \cdot \nu)}{x - \tau \nu_{\beta}} \right) Y.$$

Dans cette section (à l'exception de la proposition 5.3.4), on va supposer les variables  $(t', \nu) \in \mathcal{B}^{p-1} \times \mathcal{B}^{n-p}$  fixées. On pose

$$(52) \quad \begin{cases} r = \min \{ |t_{\alpha}|, \alpha = 1, \dots, p-1, n+2 \} > 0, \\ R = \max \{ |\nu_{\beta}|, \beta = p, \dots, n \} \geq 1. \end{cases}$$

Dès que  $|\tau| < r/R$ , le  $n$ -uplet  $(t', \tau \cdot \nu)$  est dans  $\mathcal{B}^n$ . En fixant  $(t', \nu)$ , on va donc pour chaque valeur  $t'^0$  de  $t'$ , limiter l'étude le long de toute droite passant par le point  $(t'^0, 0, \dots, 0)$  et contenue dans le sous-espace  $t' = t'^0$ . Ces droites sont paramétrées par la variable  $\nu$ . Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on ne note plus la dépendance en  $t'$  et en  $\nu$ . Les transformations isomonodromiques de paramètre  $\tau$  du système (51) sont données par le système de Schlesinger restreint :

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{dA_{\alpha}}{d\tau} = \sum_{\beta} \frac{\nu_{\beta}}{\tau \nu_{\beta} - t_{\alpha}} [A_{\beta}(\tau), A_{\alpha}(\tau)], \\ \frac{dA_{\beta}}{d\tau} = \sum_{\alpha} \frac{\nu_{\beta}}{\tau \nu_{\beta} - t_{\alpha}} [A_{\alpha}(\tau), A_{\beta}(\tau)] + \frac{1}{\tau} \sum_{\beta' (\neq \beta)} [A_{\beta'}(\tau), A_{\beta}(\tau)]. \end{cases}$$

**5.3.1. Les solutions du système de Schlesinger.** — On étudie le comportement des solutions du système de Schlesinger restreint (53) lorsque  $\tau$  tend vers 0. Ceci nous permettra ensuite d'en déduire celui des solutions du système fuchsien (51). Le théorème suivant est établi par Garnier dans [15] quand  $p = n$ , et dans [16] dans le cas réel pour  $p$  quelconque. Il est repris et généralisé dans [37], en particulier aux autres changements de variables de la remarque 5.2.5 et aux systèmes de dimension quelconque.

**THÉORÈME 5.3.1** (cf. [37]). — Soient  $A_{\alpha}^0$  (avec  $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ),  $A_{\beta}^0$  (avec  $\beta = p, \dots, n+1$ ) des matrices constantes dont les valeurs propres sont  $(-\frac{1}{2}\theta_{\alpha}, \frac{1}{2}\theta_{\alpha})$  et  $(-\frac{1}{2}\theta_{\beta}, \frac{1}{2}\theta_{\beta})$ . On suppose de plus que  $\sum_{\alpha} A_{\alpha}^0 + \sum_{\beta} A_{\beta}^0 = -A_{\infty}$  et que les valeurs propres  $\mu$  et  $-\mu$  de la matrice  $\Lambda := \sum_{\beta} A_{\beta}^0$  vérifient  $0 < 2\Re(\mu) < 1$ . On note  $\sigma = 2\Re(\mu)$  et  $\sigma_1, K$  deux constantes telles que  $\sigma < \sigma_1 < 1$  et  $|A_{\alpha}^0| < K, |A_{\beta}^0| < K$ . Alors il existe un réel strictement positif  $\varepsilon > 0$  tel que dans tout secteur

$$S_{\varepsilon, \varphi} = \{ \tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon, \mid \arg \tau \mid < \varphi \},$$

il existe une unique solution  $A_{\alpha}(\tau)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ),  $A_{\beta}(\tau)$  ( $\beta = p, \dots, n+1$ ) du système (53) vérifiant :

$$(54) \quad |A_{\alpha}(\tau) - A_{\alpha}^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1} \quad \text{et} \quad |\tau^{-\Lambda} A_{\beta}(\tau) \tau^{\Lambda} - A_{\beta}^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1}.$$

On donne la démonstration du théorème (5.3.1) à l'appendice B. La proposition suivante, qui n'est pas dans [37], se déduit aisément de cette démonstration. On pose

$$\tilde{A}_\alpha(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau) \tau^\Lambda, \quad \tilde{A}_\beta(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau) \tau^\Lambda.$$

PROPOSITION 5.3.2. — *Les matrices  $A_\alpha(\tau)$  et  $A_\beta(\tau)$  du théorème 5.3.1, ainsi que les matrices  $\tilde{A}_\alpha(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta(\tau)$  vérifient dans tout secteur  $S_{\varepsilon, \varphi}$ , où  $\varepsilon > 0$  est donné au théorème 5.3.1, les propriétés suivantes*

$$(55) \quad A_\alpha(\tau) - A_\alpha^0 = \tau^{1-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

$$(56) \quad \tau^{-\Lambda} (A_\alpha(\tau) - A_\alpha^0) \tau^\Lambda = \tau^{1-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

$$(57) \quad \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau) \tau^\Lambda - A_\beta^0 = \tau^{1-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

$$(58) \quad A_\beta(\tau) = \tau^{-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

où  $\mathcal{H}(u, v)$  désigne toute fonction holomorphe en  $(u, v)$  dans un voisinage du point  $(0, 0)$  contenu dans  $\mathbb{C}^2$ .

*Démonstration.* — Remarquons tout d'abord que la propriété (58) est une conséquence immédiate de (57), puisque si une matrice  $A(\tau)$  est holomorphe en  $\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}$ , alors on a

$$\tau^{-\Lambda} A(\tau) \tau^\Lambda = \tau^{-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}).$$

À la démonstration du théorème 5.3.1, qui se trouve à l'appendice B, on construit la solution  $A_\alpha(\tau)$  et  $A_\beta(\tau)$  du système (53) par intégrations successives. On rappelle cette construction. Il faut récrire le système de Schlesinger restreint (53) avec les matrices  $A_\alpha(\tau)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ),  $\tilde{A}_\beta(\tau)$  ( $\beta = p, \dots, n+1$ ) comme inconnues :

$$\begin{aligned} \frac{dA_\alpha}{d\tau} &= \sum_\beta \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha} [\tau^\Lambda \tilde{A}_\beta(\tau) \tau^{-\Lambda}, A_\alpha(\tau)], \\ \frac{d\tilde{A}_\beta}{d\tau} &= \sum_\alpha \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha} [\tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau) \tau^\Lambda, \tilde{A}_\beta(\tau)] + \frac{1}{\tau} \sum_{\beta'} [(\tilde{A}_{\beta'}(\tau) - A_{\beta'}^0), \tilde{A}_\beta(\tau)]. \end{aligned}$$

On construit la solution recherchée en procédant par itération. On pose

$$A_\alpha^{(0)}(\tau) = A_\alpha^0, \quad \tilde{A}_\beta^{(0)}(\tau) = A_\beta^0,$$

et pour tout entier  $k$ , on définit  $A_\alpha^{(k)}(\tau), \tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  à partir de  $A_\alpha^{(k-1)}(\tau), \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(\tau)$  par

$$A_\alpha^{(k)}(\tau) = A_\alpha^0 + \sum_\beta \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha} [s^\Lambda \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s) s^{-\Lambda}, A_\alpha^{(k-1)}(s)] ds,$$

$$\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau) = A_\beta^0 + \sum_\alpha \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha} [s^{-\Lambda} A_\alpha^{(k-1)}(s) s^\Lambda, \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)] ds$$

$$+ \sum_{\beta'} \int_0^\tau \frac{1}{s} [(\tilde{A}_{\beta'}^{(k-1)}(s) - A_{\beta'}^0), \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)] ds.$$

Les intégrales sont calculées le long du segment joignant 0 et  $\tau$  :

$$\{s = r e^{i\psi} \mid 0 < r < |\tau|, \psi = \arg \tau\}.$$

On a montré ensuite par récurrence que les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  sont bien définies et qu'elles convergent uniformément dans tout secteur  $S_{\varepsilon, \varphi}$ , où  $\varepsilon$  est bien choisi. Leurs limites constituent la solution recherchée. Pour montrer la proposition 5.3.2, il suffit donc de montrer que les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $A_\beta^{(k)}(\tau)$  vérifient pour tout  $k$  les propriétés (55), (56) et (57).

On procède également par récurrence. L'initialisation est immédiate. Si les matrices  $A_\alpha^{(k-1)}(\tau)$  et  $A_\beta^{(k-1)}(\tau)$  vérifient les propriétés (55) et (57), alors on voit que les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  sont obtenues par l'intégration de fonctions de la forme  $\tau^{-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma})$ . Elles sont donc elles-mêmes de la forme

$$\tau^{1-\sigma} \mathcal{H}(\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}),$$

*i.e.* les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $A_\beta^{(k)}(\tau)$  vérifient les propriétés (55) et (57). Elles vérifient également la propriété (56), étant donné qu'on a

$$\tau^{-\Lambda} (A_\alpha(\tau) - A_\alpha^0) \tau^\Lambda$$

$$= \sum_\beta \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha} \left[ \left(\frac{s}{\tau}\right)^\Lambda \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s) \left(\frac{s}{\tau}\right)^{-\Lambda}, \tau^{-\Lambda} A_\alpha^{(k-1)}(s) \tau^\Lambda \right] ds.$$

La propriété (56) est donc une conséquence de (55) et (57). □

Garnier [15] établit le résultat suivant, qui ne figure pas sous une forme aussi générale dans [37].

PROPOSITION 5.3.3. — *Toute solution du système de Schlesinger restreint (53)*

$$A_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, \dots, p-1, n+2), \quad A_\beta(\tau) \quad (\beta = p, \dots, n, n+1)$$

*admet une limite quand  $\tau \rightarrow 0$  au sens de (54).*

Je ne donne pas la démonstration (compliquée) de Garnier. Comme on se limite au cas des systèmes de taille  $2 \times 2$ , cas où le problème de Riemann-Hilbert admet toujours une solution, on déduira aisément cette proposition de la proposition 5.3.6, c'est-à-dire de la monodromie des systèmes fuchsien associés à chaque solution du

système de Schlesinger restreint (53). On n'utilisera la proposition 5.3.3 qu'à la section suivante.

On donne à présent la dépendance en  $t'$  et en  $\nu$  au voisinage de  $\tau = 0$  des matrices  $A_\alpha(t', \tau \cdot \nu)$  et  $A_\beta(t', \tau \cdot \nu)$ . On sait déjà que lorsque  $\tau \neq 0$ , ces matrices sont méromorphes en  $t'$  et en  $\nu$  tant que la variable  $t = (t', \tau \cdot \nu)$  reste dans  $\mathcal{B}^n$  (par la propriété de Painlevé). La proposition suivante permet d'étendre ce résultat aux matrices

$$A_\alpha^0 = A_\alpha^0(t', \nu), \quad A_\beta^0 = A_\beta^0(t', \nu), \quad \Lambda = \Lambda(t', \nu).$$

Sa démonstration est donnée à l'appendice B.

PROPOSITION 5.3.4. — *Les matrices  $A_\alpha^0(t', \nu)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ) et  $\Lambda(t', \nu)$  sont solutions du système de Schlesinger*

$$d' A'_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha} [A'_{\alpha'}, A'_\alpha] d' \log(t_\alpha - t_{\alpha'}), \quad d_\nu A'_\alpha = 0,$$

où on a posé  $A_{n+1}^0(t', \nu) := \Lambda(t', \nu)$ , où  $d'$  désigne la différentiation par rapport à  $t' = (t_1, \dots, t_{p-1})$  et  $d_\nu$  la différentiation par rapport à  $\nu = (\nu_{p+1}, \dots, \nu_n)$ . Les matrices  $A_\alpha^0(t', \nu)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ) et  $A_\beta^0(t', \nu)$  ( $\beta = p, \dots, n+1$ ) sont solutions du système

$$d' A_\beta^0 = - \sum_{\alpha=1}^{p-1} [A_\beta^0, A_\alpha^0] d' \log(t_\alpha), \quad d_\nu A_\beta^0 = \sum_{\beta' \neq \beta} [A_{\beta'}^0, A_\beta^0] d_\nu \log(\nu_\beta - \nu_{\beta'}).$$

En particulier, les matrices  $A_\alpha^0(t', \nu)$  et  $\Lambda(t', \nu)$  sont indépendantes de  $\nu$  et sont solutions du système de Schlesinger (17) de dimension  $p-1$ .

**5.3.2. Les solutions du système fuchsien.** — Pour toute matrice fondamentale de solutions  $\mathbf{Y}(x, \tau)$  du système (51), la matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) = \tau^{-\Lambda} \mathbf{Y}(\tau y, \tau)$  est une matrice fondamentale de solutions du système fuchsien non résonnant

$$(59) \quad \frac{dY}{dy} = \tilde{A}(y, \tau) Y,$$

où la matrice  $\tilde{A}(y, \tau)$  est définie par

$$\tilde{A}(y, \tau) = \sum_{\alpha} \frac{\tilde{A}_\alpha(\tau)}{y - t_\alpha/\tau} + \sum_{\beta} \frac{\tilde{A}_\beta(\tau)}{y - \nu_\beta} = \tau(\tau^{-\Lambda} A(\tau y, \tau) \tau^\Lambda).$$

Le système (59) n'est pas normalisé en l'infini.

PROPOSITION 5.3.5. — 1) *La solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  normalisée en l'infini du système (51) est holomorphe en  $\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}$  au point  $\tau = 0$  pour tout  $x \neq 0$  fixé. Sa limite  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  est solution du système fuchsien*

$$(60) \quad \frac{dY}{dx} = \left( \sum_{\alpha} \frac{A_\alpha^0}{x - t_\alpha} + \frac{\Lambda}{x} \right) Y.$$

2) La solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) := \tau^{-\Lambda} \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau)$  du système (59) est holomorphe en  $\tau^\sigma$ ,  $\tau^{1-\sigma}$  au point  $\tau = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{C}$  fixé. Sa limite  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau)$  est solution du système fuchsien

$$(61) \quad \frac{dY}{dy} = \sum_{\beta} \frac{A_{\beta}^0}{y - \nu_{\beta}} Y.$$

*Démonstration.* — On ne montre que l'assertion 2), l'assertion 1) se montrant de la même manière. On calcule la dérivée de la matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau)$  par rapport à  $\tau$ , pour  $y$  fixé. On suppose que  $|\tau| < r/|y|$ . Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \mathbf{Y}_\infty(x, t) = -\frac{A_i(t)}{x - t_i} \mathbf{Y}_\infty(x, t),$$

(lemme 2.2.8), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau) &= \left( y A(\tau y, \tau) - \sum_{\beta} \frac{\nu_{\beta} A_{\beta}(\tau)}{\tau y - \tau \nu_{\beta}} \right) \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau) \\ &= \left( y \sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha}(\tau)}{\tau y - t_{\alpha}} + \frac{1}{\tau} \sum_{\beta} A_{\beta}(\tau) \right) \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau). \end{aligned}$$

Et comme  $A_\infty = -\sum_{\alpha} A_{\alpha}(\tau) - \sum_{\beta} A_{\beta}(\tau) = -\sum_{\alpha} A_{\alpha}^0 - \Lambda$ , on obtient

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) = \left( -\frac{1}{\tau} \sum_{\alpha} \tau^{-\Lambda} (A_{\alpha}(\tau) - A_{\alpha}^0) \tau^{\Lambda} + y \sum_{\alpha} \frac{\tau^{-\Lambda} A_{\alpha}(\tau) \tau^{\Lambda}}{\tau y - t_{\alpha}} \right) \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau),$$

c'est-à-dire, vu (56)

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) = \tau^{-\sigma} \mathcal{H}(y, \tau^{\sigma}, \tau^{1-\sigma}) \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau),$$

où  $\mathcal{H}(y, u, v)$  désigne une fonction holomorphe au voisinage de  $(y_0, 0, 0)$  pour tout  $y_0 \in \mathbb{C}$ . On en conclut donc qu'il existe une matrice

$$Q(y, \tau) = I_2 + \tau^{1-\sigma} \mathcal{H}_1(y, \tau^{\sigma}, \tau^{1-\sigma}),$$

où la fonction  $\mathcal{H}_1$  a les mêmes propriétés que  $\mathcal{H}$ , et une matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}^0(y)$  indépendante de  $\tau$  telles que

$$\tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) = Q(y, \tau) \tilde{\mathbf{Y}}^0(y).$$

Il ne reste donc qu'à prouver que la matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}^0(y)$  est solution du système fuchsien (61). Pour cela, il suffit de vérifier que la matrice

$$\tilde{A}(y, \tau) = \sum_{\alpha} \frac{\tilde{A}_{\alpha}(\tau)}{y - t_{\alpha}/\tau} + \sum_{\beta} \frac{\tilde{A}_{\beta}(\tau)}{y - \nu_{\beta}}$$

tend en  $\tau = 0$  vers la matrice

$$\sum_{\beta} \frac{A_{\beta}^0}{y - \nu_{\beta}}.$$

Ceci est évident, étant donné que la matrice

$$\sum_{\alpha} \frac{\tilde{A}_{\alpha}(\tau)}{y - t_{\alpha}/\tau} = \tau^{1-\sigma} \sum_{\alpha} \frac{\tau^{\sigma} \tilde{A}_{\alpha}(\tau)}{\tau y - t_{\alpha}}$$

tend vers la matrice nulle par l'assertion (56) de la proposition 5.3.2. Pour la deuxième partie de l'assertion 1), on aurait montré de même que la matrice

$$A(x, \tau) = \sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha}(\tau)}{x - t_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{A_{\beta}(\tau)}{x - \tau\nu_{\beta}}$$

tend en  $\tau = 0$  vers la matrice

$$\sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha}^0}{x - t_{\alpha}} + \frac{\Lambda}{x}$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \frac{A_{\beta}(\tau)}{x - \tau\nu_{\beta}} &= \frac{1}{x} \sum_{\beta} A_{\beta}(\tau) + \tau \sum_{\beta} \frac{\nu_{\beta} A_{\beta}(\tau)}{x(x - \tau\nu_{\beta})} \\ &= -\frac{1}{x} \left( A_{\infty} + \sum_{\alpha} A_{\alpha}(\tau) \right) + \tau^{1-\sigma} \sum_{\beta} \frac{\nu_{\beta} \tau^{\sigma} A_{\beta}(\tau)}{x(x - \tau\nu_{\beta})}. \quad \square \end{aligned}$$

Le système fuchsien (60) est non résonnant et normalisé en l'infini, étant donné que

$$-\sum_{\alpha} A_{\alpha}^0 - \Lambda = -\sum_{\alpha} A_{\alpha}^0 - \sum_{\beta} A_{\beta}^0 = A_{\infty}.$$

Soit  $\mathbf{Y}_{\infty}^0(x)$  sa matrice fondamentale de solutions normalisée en l'infini. Comme  $0 < \sigma < 1$ , le comportement local de  $\mathbf{Y}_{\infty}^0(x)$  au voisinage des singularités du système (60) est donné par

$$(62) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_{\infty}^0(x) &= (S_{\alpha}^0 + \mathcal{O}(x - t_{\alpha}))(x - t_{\alpha})^{L_{\alpha}} \cdot C_{\alpha}^0 && (x \rightarrow t_{\alpha}) \\ &= (\mathbf{I}_2 + \mathcal{O}(x))x^{\Lambda} \cdot C^0 && (x \rightarrow 0) \\ &= (\mathbf{I}_2 + \mathcal{O}(x^{-1}))x^{-L_{\infty}} && (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

où les matrices  $S_{\alpha}^0$ ,  $C_{\alpha}^0$  et  $C^0$  sont inversibles, les matrices  $L_{\alpha}$  désignent comme précédemment les diagonalisées de  $A_{\alpha}(\tau)$  (et donc aussi de  $A_{\alpha}^0$ ) et  $L_{\infty} = A_{\infty}$ . Le système (61) n'est pas normalisé en l'infini, puisque la matrice  $\Lambda$  n'est pas diagonale, mais il existe de même une unique matrice fondamentale de solutions  $\tilde{\mathbf{Y}}_{\infty}^0(y)$  dont le comportement local est donné par

$$(63) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_{\infty}^0(y) &= (\tilde{S}_{\beta}^0 + \mathcal{O}(y - \nu_{\beta}))(y - \nu_{\beta})^{L_{\beta}} \cdot \tilde{C}_{\beta}^0 && (y \rightarrow \nu_{\beta}) \\ &= (\mathbf{I}_2 + \mathcal{O}(y^{-1}))y^{-\Lambda} && (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{S}_{\beta}^0, \tilde{C}_{\beta}^0 \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ . La proposition suivante se trouve dans [24]. On ne donne pas sa démonstration, qui procède des mêmes méthodes que celle du théorème 5.3.1.

PROPOSITION 5.3.6 (cf. [24]). — On a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{Y}_\infty(x, \tau) = \mathbf{Y}_\infty^0(x), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-\Lambda} \mathbf{Y}_\infty(\tau y, \tau) = \tilde{\mathbf{Y}}_\infty^0(y) \cdot C^0.$$

De plus, pour  $\tau \neq 0$ , le comportement local de la matrice fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  est donné par

$$(64) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_\infty(x, \tau) &= (S_\alpha(\tau) + \mathcal{O}(x - t_\alpha))(x - t_\alpha)^{L_\alpha} \cdot C_\alpha^0 && (x \rightarrow t_\alpha) \\ &= (\tilde{S}_\beta(\tau) + \mathcal{O}(x - \tau\nu_\beta))(x - \tau\nu_\beta)^{L_\beta} \cdot \tilde{C}_\beta^0 \cdot C^0 && (x \rightarrow \tau\nu_\beta) \\ &= (\mathbf{I}_2 + \mathcal{O}(x^{-1}))x^{-L_\infty} && (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

où les matrices  $S_\alpha(\tau)$  et  $\tilde{S}_\beta(\tau)$  sont inversibles, et les matrices  $C^0$ ,  $C_\alpha^0$  et  $\tilde{C}_\beta^0$  sont définies ci-dessus.

La proposition 5.3.6 nous permet d'établir simplement la proposition 5.3.3.

*Démonstration de la proposition 5.3.3.* — Soit une solution quelconque

$$A_\alpha(\tau) \quad (\alpha = 1, \dots, p-1, n+2), \quad A_\beta(\tau) \quad (\beta = p, \dots, n, n+1)$$

du système de Schlesinger restreint (53) telle que la somme  $\sum_\alpha A_\alpha(\tau) + \sum_\beta A_\beta(\tau)$  soit constante et diagonale. Soit  $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  l'unique solution fondamentale normalisée en l'infini du système fuchsien (51) défini par les matrices  $A_\alpha(\tau)$  et  $A_\beta(\tau)$ . Cette solution est  $M$ -invariante. Il existe donc des matrices inversibles  $C^0$ ,  $C_\alpha^0$  et  $\tilde{C}_\beta^0$  indépendantes de  $\tau$  telles que le comportement local de la solution  $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  soit donné par (64). On définit la matrice  $\Lambda$  de manière à ce que les problèmes de Riemann-Hilbert (62) et (63) vérifient bien

$$\begin{aligned} M_\infty(\mathbf{Y}_\infty^0) \cdot (C^0)^{-1} e^{2i\pi\Lambda} C^0 \cdot M_{p-1}(\mathbf{Y}_\infty^0) \cdots M_1(\mathbf{Y}_\infty^0) &= \mathbf{I}_2, \\ e^{2i\pi\Lambda} \cdot \tilde{M}_{n+1}(\tilde{\mathbf{Y}}_\infty^0) \cdots \tilde{M}_p(\tilde{\mathbf{Y}}_\infty^0) &= \mathbf{I}_2, \end{aligned}$$

et que les valeurs propres de  $\Lambda$  soit opposées :  $\mu$  et  $-\mu$  et vérifient  $0 < 2\Re(\mu) < 1$ . Les deux conditions précédentes sont équivalentes par la relation

$$M_{n+3}(\mathbf{Y}_\infty) \cdots M_1(\mathbf{Y}_\infty) = \mathbf{I}_2.$$

Alors, comme on considère des systèmes de taille  $2 \times 2$ , on sait que les problèmes de Riemann-Hilbert (62) et (63) admettent respectivement d'unique solutions  $\mathbf{Y}_\infty^0(x)$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}_\infty^0(y)$ . On définit les matrices constantes  $A_\alpha^0$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ),  $A_\beta^0$  ( $\beta = p, \dots, n, n+1$ ) respectivement associées aux solutions  $\mathbf{Y}_\infty^0(x)$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}_\infty^0(y)$ . Par le théorème 5.3.1, ces matrices  $A_\alpha^0$ ,  $A_\beta^0$  sont les conditions initiales au sens de (54) d'une unique solution du système de Schlesinger restreint (53). Cette solution est nécessairement la solution  $A_\alpha(\tau)$ ,  $A_\beta(\tau)$  par unicité de la matrice  $\mathbf{Y}_\infty(x, \tau)$  satisfaisant le problème de Riemann-Hilbert (64).  $\square$

#### 5.4. Le cas réel

On considère à présent la limite d'une famille isomodromique de systèmes fuchsien  $(A_D(t), t \in U)$ , associée à un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$  et décrite par le système de Schlesinger, que l'on a introduite à la section 4.3.1. L'ouvert simplement connexe  $U$  est un voisinage contenu dans  $\mathcal{B}^n$  du simplexe  $\pi^n$

$$\pi^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < \dots < t_n < 0\},$$

tel que la solution du système de Schlesinger  $(A_{D,1}(t), \dots, A_{D,n+2}(t))$  correspondant à cette famille est holomorphe dans  $U$ . D'après la proposition 5.3.3, cette solution admet une limite

$$A_{D,\alpha}^0(t') \quad (\alpha = 1, \dots, p-1, n+2), \quad A_{D,\beta}^0(t', \nu) \quad (\beta = p, \dots, n+1)$$

au sens de (54) lorsque  $\tau$  tend vers 0. D'après la proposition 5.3.4, les matrices  $A_{D,\alpha}^0(t')$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ) et  $\Lambda(t')$  ( $t' \in U'$ ) sont solutions du système de Schlesinger de dimension  $p-1$ .

D'après la proposition 5.3.5, pour chaque valeur de  $(t', \nu) \in U' \times \tilde{U}$ , le système fuchsien  $(A_D(t', \tau \cdot \nu))$  tend lorsque  $\tau$  tend vers 0 vers le système fuchsien limite indépendant de  $\nu$  suivant

$$(A_D^0(t')) \quad \frac{dY}{dx} = \left( \sum_{\alpha} \frac{A_{D,\alpha}^0(t')}{x - t_{\alpha}} + \frac{\Lambda(t')}{x} \right) Y.$$

La famille de systèmes fuchsien limites  $(A_D^0(t'), t' \in U')$  est donc isomonodromique et décrite par le système de Schlesinger. Les systèmes  $A_D^0(t')$  sont non résonnants. Pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ , les valeurs propres de la matrice  $A_{D,\alpha}^0(t')$  sont indépendantes de  $t'$  et valent

$$-\frac{1}{2}\theta_{\alpha}, \quad \frac{1}{2}\theta_{\alpha}$$

et les valeurs propres de la matrice  $\Lambda(t')$  sont  $-\mu$  et  $\mu$ , avec  $\sigma = 2\Re(\mu)$ . Les systèmes  $(A_D^0(t'))$  sont normalisés en l'infini et ils ont la même normalisation que les systèmes  $(A_D(t))$ .

LEMME 5.4.1. — *Soient un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$  et un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ . La famille isomonodromique*

$$(A_D^0(t'), t' \in \pi^{p-1})$$

*est contenue dans l'ensemble  $\mathcal{A}_{D'}^{p-1}$  des systèmes fuchsien associés au jeu de directions orientées  $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$  défini par*

$$(65) \quad D' = (D_1, \dots, D_{p-1}, D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+3}).$$

*On note donc le système  $(A_D^0(t'))$  par  $(A_{D'}(t'))$ . De plus, la fonction « rapports des longueurs »  $F_{D'}(t') = (r'_1(t'), \dots, r'_{p-1}(t'))$  associée au jeu de directions orientées*

$D' \in \mathcal{D}^{p-1}$  est donnée par

$$(66) \quad r'_\alpha(t') = \frac{\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} L_1(\mathbf{Y}_\infty^0(x, t') \cdot C_0)^2 dx}{\int_0^1 L_1(\mathbf{Y}_\infty^0(x, t') \cdot C_0)^2 dx} \quad (\alpha = 1, \dots, p-1),$$

où la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\infty^0(x, t')$  est la solution normalisée en l'infini du système  $A_{D'}(t')$  et la matrice  $C_0$  est définie au lemme 5.1.2.

*Démonstration.* — Pour la première partie du lemme, il suffit de vérifier que la monodromie du système  $(A_D^0(t'))$  est engendrée par les matrices  $M_\alpha^0$  définies par

$$M_\alpha^0 := M_\alpha = D_\alpha D_{\alpha-1}^{-1} \quad (\alpha = 1, \dots, p-1, n+2, n+3), \quad M_{n+1}^0 := D_{n+1} D_{p-1}^{-1}.$$

Par la proposition 5.3.6, pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ , les monodromies des solutions fondamentales  $\mathbf{Y}_\infty^0(x, \tau)$  et  $\mathbf{Y}_\infty^0(x)$  autour de la singularité  $t_\alpha$  sont les mêmes :

$$M_\alpha(\mathbf{Y}_\infty^0) = C_\alpha^{0-1} e^{2i\pi L_\alpha} C_\alpha^0 = M_\alpha(\mathbf{Y}_\infty)$$

et donc, vu la condition (b) et le lemme 5.1.2,

$$M_\alpha(\mathbf{Y}_\infty^0) = C_0 M_\alpha C_0^{-1} = C_0 D_\alpha D_{\alpha-1}^{-1} C_0^{-1}.$$

De même, en  $t_{n+3} = \infty$  :

$$M_\infty(\mathbf{Y}_\infty^0) = e^{2i\pi L_\infty} = C_0 D_{n+3} D_{n+2}^{-1} C_0^{-1}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la monodromie autour de la singularité  $t_{n+1} = 0$  :

$$\begin{aligned} M_{n+1}(\mathbf{Y}_\infty^0) &= (M_{p-1}(\mathbf{Y}_\infty^0) \cdots M_1(\mathbf{Y}_\infty^0) M_{n+3}(\mathbf{Y}_\infty^0) M_{n+2}(\mathbf{Y}_\infty^0))^{-1} \\ &= (C_0 D_{p-1} D_{p-2}^{-1} D_{p-2} \cdots D_{n+1}^{-1} C_0^{-1})^{-1} \\ &= C_0 D_{n+1} D_{p-1}^{-1} C_0^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-1, n+1, n+2, n+3$ , on a

$$M_\alpha(\mathbf{Y}_\infty^0) = C_0 M_\alpha^0 C_0^{-1}$$

où la matrice de conjugaison  $C_0$  est la même qu'entre les matrices  $M_i(\mathbf{Y}_\infty)$  et les matrices  $M_i$ . Grâce à cela, en procédant exactement comme à la démonstration du lemme 5.1.2, on obtient l'expression (66) des rapports  $r'_\alpha(t')$ .  $\square$

On déduit en particulier de ce lemme que les valeurs propres de la matrice  $\Lambda(t')$  sont réelles et valent

$$-\frac{1}{2}\sigma, \frac{1}{2}\sigma$$

où  $\sigma\pi$  est la mesure de l'angle extérieur entre les directions orientées  $D_{p-1}$  et  $D_{n+1}$  telle que  $0 < \sigma < 1$ .

Quitte à diminuer l'ouvert simplement connexe  $U'$ , on peut supposer grâce à la proposition 4.3.3 que les matrices  $A_{D, \alpha}^0(t')$  et  $\Lambda(t')$  sont holomorphes dans  $U'$ .

LEMME 5.4.2. — Soient un jeu de directions orientées  $D \in \mathcal{D}^n$  et un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ . Pour tout  $(t', \nu) \in U' \times \tilde{U}$  fixé, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le prolongement de la fonction « rapports des longueurs »  $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$  soit holomorphe en  $\tau^\sigma$ ,  $\tau^{1-\sigma}$  au point  $\tau = 0$  dans tout secteur  $S_{\varepsilon, \varphi}$ . De plus, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \underline{F}_D(t', \tau, \tau \nu_{p+1}, \dots, \tau \nu_n) = (\underline{F}_{D'}(t'), 0, \dots, 0)$$

où le jeu de directions orientées  $D' \in \mathcal{D}^{p-1}$  est donné par (65).

Démonstration. — On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\alpha$  on ait  $|t_\alpha| > \varepsilon$ . Considérons l'expression (46) de la fonction  $\underline{F}_D(t)$  à partir des solutions fondamentales  $\mathbf{Y}_i(x, t', \tau \cdot \nu)$  définies par (45) : pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$r_i(t', \tau \cdot \nu) = \frac{\ell_i(t', \tau \cdot \nu)}{\ell_{n+1}(t', \tau \cdot \nu)}$$

avec

$$\ell_\alpha(t', \tau \cdot \nu) = \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} (g_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)^2) dx \quad (\alpha = 1, \dots, p-2, n+1),$$

$$\ell_{p-1}(t', \tau \cdot \nu) = \int_{t_{p-1}}^{\tau} (g_{p-1}(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_{p-1}(x, t', \tau \cdot \nu)^2) dx,$$

$$\ell_\beta(t', \tau \cdot \nu) = \int_{\tau \nu_\beta}^{\tau \nu_{\beta+1}} (g_\beta(x, t', \tau \cdot \nu)^2 + h_\beta(x, t', \tau \cdot \nu)^2) dx \quad (\beta = p, \dots, n)$$

où les fonctions  $(g_i(x, t', \tau \cdot \nu), h_i(x, t', \tau \cdot \nu))$  constituent la première ligne de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_i(x, t', \tau \cdot \nu)$ . Les intégrales sont calculées le long des segments joignant respectivement  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . On ne détaille pas le cas de la fonction  $\ell_{p-1}(t', \tau \cdot \nu)$  ; il faudrait, comme à la démonstration de la proposition 5.1.3, la décomposer en  $\ell_{p-1}^- = \ell_{p-1}^- + \ell_{p-1}^+$  avec

$$\ell_{p-1}^- = \int_{t_{p-1}}^{r/\varepsilon\tau} \quad \text{et} \quad \ell_{p-1}^+ = \int_{r/\varepsilon\tau}^{\tau},$$

puis étudier la fonction  $\ell_{p-1}^-$  comme les fonctions  $\ell_\alpha$  et la fonction  $\ell_{p-1}^+$  comme les fonctions  $\ell_\beta$ .

Pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-2, n+1$ , d'après l'assertion (1) de la proposition 5.3.5, les solutions fondamentales  $\mathbf{Y}_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)$  sont holomorphes en  $\tau^\sigma$ ,  $\tau^{1-\sigma}$  au point  $\tau = 0$  dès que  $x \neq 0$ , et on en déduit donc que les fonctions  $\ell_\alpha(t', \tau \cdot \nu)$  sont également holomorphes en  $\tau^\sigma$ ,  $\tau^{1-\sigma}$  (la situation est plus simple ici qu'à la démonstration de la proposition 5.1.3, étant donné que les bornes d'intégration et le facteur  $(x - t_\alpha)^{L_\alpha}$  sont indépendants de  $\tau$ ). On obtient de même que  $\ell_{n+1}(t', \tau \cdot \nu)$  ne s'annule jamais pour  $|\tau| < \varepsilon$ . De plus, par les propositions 5.1.3 et 5.3.6, les solutions  $\mathbf{Y}_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu)$  ont une limite indépendante de  $\nu$  quand  $\tau \rightarrow 0$  qui est solution du système  $(A_{D'}(t'))$  et qui vérifie :

$$\mathbf{Y}_\alpha^0(x, t') := \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{Y}_\alpha(x, t', \tau \cdot \nu) = \lim_{\tau \rightarrow 0} (\mathbf{Y}_\infty(x, t', \tau \cdot \nu) \cdot C_0 \cdot S_\alpha) = \mathbf{Y}_\infty^0(x, t') \cdot C_0 \cdot S_\alpha.$$

On note par  $(g_\alpha^0(x, t'), h_\alpha^0(x, t'))$  la première ligne de la solution fondamentale  $\mathbf{Y}_\alpha^0(x, t')$ , et on obtient donc

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \ell_\alpha(t', \tau \cdot \nu) = \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} (g_\alpha^0(x, t')^2 + h_\alpha^0(x, t')^2) dx.$$

D'après l'expression (66) des rapports  $r'_\alpha(t')$ , comme la matrice  $S_\alpha$  est dans  $SU(2)$ , on a

$$r'_\alpha(t') = \frac{\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} (g_\alpha^0(x, t')^2 + h_\alpha^0(x, t')^2) dx}{\int_0^1 (g_{n+1}^0(x, t')^2 + h_{n+1}^0(x, t')^2) dx},$$

ce qui donne

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} r_\alpha(t', \tau \cdot \nu) = r'_\alpha(t').$$

Pour tout  $\beta = p, \dots, n$ , on exprime les fonctions  $\ell_\beta(t', \tau \cdot \nu)$  à partir des solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{Y}}_\beta(y, t', \tau \cdot \nu) := \tau^{-\Lambda} \mathbf{Y}_\beta(\tau y, t', \tau \cdot \nu)$  du système fuchsien  $(\tilde{A}_D(t))$ , qui est le système (59) associé au système  $(A_D(t))$ . Pour alléger les notations, on ne note plus la dépendance en  $t'$  et en  $\nu$ . En faisant le changement de variables  $y = x/\tau$ , on obtient

$$\ell_\beta(\tau) = \tau \int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}} (g_\beta(\tau y, \tau)^2 + h_\beta(\tau y, \tau)^2) dy.$$

On note

$$\tau^\Lambda = \begin{pmatrix} a(\tau) & b(\tau) \\ c(\tau) & d(\tau) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{Y}}_\beta(y, \tau) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(y, \tau) & \tilde{z}_1(y, \tau) \\ \tilde{y}_2(y, \tau) & \tilde{z}_2(y, \tau) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$g_\beta(\tau y, \tau)^2 + h_\beta(\tau y, \tau)^2 = a(\tau)^2 (\tilde{y}_1(y, \tau)^2 + \tilde{z}_1(y, \tau)^2) + b(\tau)^2 (\tilde{y}_2(y, \tau)^2 + \tilde{z}_2(y, \tau)^2) + 2a(\tau)b(\tau) (\tilde{y}_1(y, \tau)\tilde{y}_2(y, \tau) + \tilde{z}_1(y, \tau)\tilde{z}_2(y, \tau)).$$

Comme les éléments de la matrice  $\tau^\Lambda$  sont de la forme  $c_1 \tau^{\frac{1}{2}\sigma} + c_{-1} \tau^{-\frac{1}{2}\sigma}$  ( $c_h \in \mathbb{C}$ ), les quantités suivantes

$$\tau a(\tau)^2, \quad \tau b(\tau)^2, \quad \tau a(\tau)b(\tau)$$

sont polynomiales en  $\tau^\sigma$  et  $\tau^{1-\sigma}$  et s'annulent en  $\tau = 0$ . Par l'assertion 2) de la proposition 5.3.5, la solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{Y}}_\beta(y, \tau) = \tilde{\mathbf{Y}}(y, \tau) \cdot C_0 \cdot S_\beta$  est holomorphe en  $\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}$  lorsque  $|y| < r/\varepsilon$ , et donc en particulier quand  $y$  appartient à l'intervalle  $] \nu_\beta, \nu_{\beta+1} [$ . Les intégrales

$$\int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}} (\tilde{y}_k(y, \tau)^2 + \tilde{z}_k(y, \tau)^2) dy \quad (k = 1, 2),$$

$$\int_{\nu_\beta}^{\nu_{\beta+1}} (\tilde{y}_1(y, \tau)\tilde{y}_2(y, \tau) + \tilde{z}_1(y, \tau)\tilde{z}_2(y, \tau)) dy$$

sont donc holomorphes en  $\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}$  (là encore, par les mêmes arguments qu'à la démonstration de la proposition 5.1.3). On peut donc en conclure que les fonctions

$\ell_\beta(t', \tau \cdot \nu)$  sont holomorphes en  $\tau^\sigma, \tau^{1-\sigma}$  et qu'elles vérifient

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \ell_\beta(t', \tau \cdot \nu) = 0.$$

□

On peut enfin établir la proposition 5.2.4

*Démonstration de la proposition 5.2.4.* — Au vu des résultats précédents, il s'agit simplement d'appliquer le théorème de l'analyticité séparée d'Hartogs. Le lemme 5.4.2 nous donne le comportement en  $\tau$  de la fonction  $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$  à  $(t', \nu) \in U' \times \tilde{U}$  fixé. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'en  $\tau = 0$ , cette fonction est holomorphe en  $(t', \nu)$ . Comme en  $\tau = 0$ , la fonction  $\underline{F}_D(t', \tau \cdot \nu)$  vaut

$$(\underline{F}_{D'}(t'), 0 \dots, 0),$$

elle est donc indépendante de  $\nu$  et holomorphe en  $t' \in U'$  par la proposition 5.1.3 appliquée à la dimension  $p - 1$ , et par le choix de l'ouvert simplement connexe  $U'$  tel que la solution du système de Schlesinger  $(A_{D',1}, \dots, A_{D',p+1})$  soit holomorphe dans  $U'$ . □

## APPENDICE A

### LE SYSTÈME DE GARNIER

Pour être complet, on introduit le système de Garnier, qui décrit les déformations isomonodromiques des équations fuchsienues qui n'ont pas de singularité logarithmique. Même si la résolution du problème de Plateau proposée dans ce mémoire n'utilise pas, contrairement à celle de Garnier, le système de Garnier, on est malgré tout amené à le mentionner à plusieurs reprises, ne serait-ce que pour comparer les deux points de vue.

On considère une équation fuchsienne sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$

$$(67) \quad D^2y + p(x)Dy + q(x)y = 0$$

de singularités deux à deux distinctes  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et de schéma de Riemann

$$\begin{pmatrix} x = t_i & x = \infty & x = \lambda_k \\ 0 & \alpha & 0 \\ \theta_i & \alpha + \theta_\infty & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n+2, \\ k = 1, \dots, n. \end{array}$$

On suppose que les singularités  $x = \lambda_k$  sont apparentes (définition 2.1.8) et que les exposants vérifient  $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, n+3$  (on note parfois  $\theta_{n+3}$  pour  $\theta_\infty$ ). L'équation (67) n'a donc aucune singularité logarithmique. La relation de Fuchs (9) impose

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i=1}^{n+3} \theta_i \right).$$

Le théorème 2.1.9 nous assure que pour toute monodromie irréductible, il existe une équation de ce type ayant cette monodromie. Le but de cette section est de décrire les transformations isomonodromiques de l'équation (67). On commence par préciser l'expression de ses coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$ .

D'après la proposition 2.1.4, les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  de l'équation (67) s'écrivent

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{a_i}{x-t_i} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{x-\lambda_k},$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i}{(x-t_i)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{(x-\lambda_k)^2} - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{K_i}{x-t_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{x-\lambda_k},$$

avec

$$(68) \quad - \sum_{i=1}^{n+2} K_i + \sum_{k=1}^n \mu_k = 0.$$

Les exposants de l'équation nous permettent de calculer certaines des constantes intervenant dans l'expression de  $p(x)$  et  $q(x)$ . L'équation caractéristique en  $x = t_i$  est

$$s^2 + (a_i - 1)s + b_i = 0,$$

et ses racines sont 0 and  $\theta_i$ . On en déduit que  $a_i = 1 - \theta_i$  et  $b_i = 0$ . De même, on obtient  $c_k = -1$  et  $d_k = 0$ . De l'équation caractéristique en l'infini, on déduit

$$\alpha(\alpha + \theta_\infty) = - \sum_{i=1}^{n+2} t_i K_i + \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k.$$

De cette relation et de (68), on déduit  $K_{n+1}$  et  $K_{n+2}$  en fonction des autres constantes et on obtient l'expression suivante des coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  :

$$(69) \quad \begin{cases} p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1-\theta_i}{x-t_i} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-\lambda_k} \\ q(x) = \frac{\alpha(\alpha + \theta_\infty)}{x(x-1)} - \sum_{i=1}^n \frac{t_i(t_i-1)K_i}{x(x-1)(x-t_i)} \\ \quad \quad \quad + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(\lambda_k-1)\mu_k}{x(x-1)(x-\lambda_k)} \end{cases}$$

où les  $K_i$ ,  $\mu_k$  sont des constantes inconnues

$$K_i = -\text{Res}(q(x), x = t_i), \quad \mu_k = \text{Res}(q(x), x = \lambda_k).$$

Pour chaque valeur fixée de  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+3})$ , l'équation (67) de coefficients (69) dépend donc d'au plus  $4n$  paramètres

$$t_1, \dots, t_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, K_1, \dots, K_n.$$

Cependant, toutes les valeurs de ces paramètres ne définissent pas nécessairement une équation ayant des singularités apparentes en les  $\lambda_k$  (vu les exposants en ces singularités, elles peuvent être logarithmiques). La proposition suivante, obtenue en appliquant la méthode de Fröbenius aux points  $x = \lambda_k$ , donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (67) n'ait aucune singularité logarithmique. Sa démonstration se trouve dans [23].

PROPOSITION A.0.1. — *Les points  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des singularités non logarithmiques de l'équation (67) de coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  définis par (69) si et seulement si les résidus  $K_i$  sont donnés par*

$$K_i = M_i \sum_{k=1}^n M^{k,i} \left( \mu_k^2 - \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\theta_j - \delta_{ij}}{\lambda_k - t_j} \mu_k + \frac{\alpha(\alpha + \theta_\infty)}{\lambda_k(\lambda_k - 1)} \right),$$

où  $M_i$  et  $M^{k,i}$  sont définis par

$$M_i = -\frac{\Lambda(t_i)}{T'(t_i)} \quad \text{et} \quad M^{k,i} = \frac{T(\lambda_k)}{(\lambda_k - t_i)\Lambda'(\lambda_k)},$$

où les polynômes  $\Lambda(x)$  et  $T(x)$  sont donnés par (23) .

Les résidus  $K_i$  sont donc des fractions rationnelles de  $(\theta, \lambda, \mu, t)$ . Les équations (67) vérifiant les hypothèses souhaitées dépendent uniquement des paramètres  $(\theta, \lambda, \mu, t)$ , on les note donc  $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ . On cherche à quelle condition des variations de ces paramètres préservent la monodromie d'une telle équation. Les exposants  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+3})$  sont nécessairement constants pendant une déformation isomonodromique continue. On pose

$$\mathcal{B}^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^n \mid \forall i \neq j, t_i \neq t_j\},$$

et on cherche à caractériser les sous-variétés  $M$  de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$  telles que la famille d'équations  $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ ,  $((\lambda, \mu, t) \in M)$  soit isomonodromique. Dans [14], Garnier donne le système d'équations aux dérivées partielles qui décrit les déformations isomonodromiques des équations  $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ . Le paramètre de la déformation est le paramètre  $t$ , et le système décrit les variations des paramètres  $\lambda_k(t)$  en fonction de  $t$ , tandis que les résidus  $\mu_k(t)$ , vus également comme des fonctions de  $t$ , s'expriment rationnellement à partir des  $\lambda_k(t)$  et de leurs dérivées premières. Okamoto [29] a mis en évidence la structure hamiltonienne de ce système, et lui a donné le nom de *système de Garnier*. C'est sous cette forme qu'il est connu aujourd'hui.

DÉFINITION A.0.2. — Le *système de Garnier*  $(\mathcal{G}_n)$  de dimension  $n$  est le système hamiltonien

$$(70) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial \mu_i}, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial \lambda_i} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

où les Hamiltoniens  $K_i = K_i(\theta, \lambda, \mu, t)$  sont donnés à la proposition A.0.1.

On a alors :

THÉORÈME A.0.3. — *Soit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+3}) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})^{n+3}$ .*

- 1) *Le système  $(\mathcal{G}_n)$  est complètement intégrable.*
- 2) *Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{B}^n$ . Alors la famille d'équations  $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ ,  $((\lambda, \mu, t) \in M)$  est isomonodromique si et seulement si  $M$  est une sous-variété d'une variété intégrale du système de Garnier  $(\mathcal{G}_n)$ .*

Une solution  $(\lambda(t), \mu(t))$  du système de Garnier  $(\mathcal{G}_n)$  est déterminée par la donnée d'une monodromie pour l'équation  $E_\theta(\lambda, \mu, t)$ .

REMARQUE A.0.4. — Dans le cas où  $n = 1$ , en notant  $(\lambda, \mu, t, K)$  les quantités  $(\lambda_1, \mu_1, t_1, K_1)$ , on obtient que le Hamiltonien  $K(\lambda, \mu, t)$  est donné par

$$K(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{t(t-1)} \left[ \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \left( \theta_2(\lambda-1)(\lambda-t) + \theta_3\lambda(\lambda-t) + (\theta_1-1)\lambda(\lambda-1) \right) \mu + \kappa(\lambda-t) \right]$$

où  $\kappa = \frac{1}{4}((\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1)^2 - \theta_4^2)$ . En éliminant la variable conjuguée  $\mu$ , on trouve que le système de Garnier  $(\mathcal{G}_1)$  est équivalent à la sixième équation de Painlevé (P<sub>VI</sub>) :

$$(P_{VI}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left( \alpha + \beta \frac{t}{\lambda^2} + \gamma \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\theta_4^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \delta = \frac{1}{2}\theta_3^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 - \theta_1^2).$$

En ce sens, le système  $(\mathcal{G}_n)$  constitue une généralisation de l'équation (P<sub>VI</sub>) en un système aux dérivées partielles complètement intégrable.

## APPENDICE B

### DÉMONSTRATIONS DE RÉSULTATS UTILISÉS AU CHAPITRE 5

On va donner les démonstrations des résultats dus à Sato, Miwa et Jimbo [37], ainsi qu'à Jimbo [24] dont on a eu besoin au chapitre 5 pour étudier la fonction « rapports des longueurs »  $F_D(t)$ . On ne démontre que le théorème 5.3.1 et la proposition 5.3.4. La démonstration de la proposition 5.3.6 procède des mêmes méthodes que celle du théorème 5.3.1.

**Démonstration du théorème 5.3.1.** — On rappelle l'énoncé du théorème 5.3.1.

**THÉORÈME 5.3.1.** — *Soient  $A_\alpha^0$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ) et  $A_\beta^0$  ( $\beta = p, \dots, n+1$ ) des matrices constantes dont les valeurs propres sont respectivement  $(-\frac{1}{2}\theta_\alpha, \frac{1}{2}\theta_\alpha)$  et  $(-\frac{1}{2}\theta_\beta, \frac{1}{2}\theta_\beta)$ . On suppose de plus que :*

$$\triangleright \sum_{\alpha} A_\alpha^0 + \sum_{\beta} A_\beta^0 = -A_\infty,$$

$\triangleright$  les valeurs propres  $\mu$  et  $-\mu$  de la matrice  $\Lambda := \sum_{\beta} A_\beta^0$  vérifient  $0 < 2\Re(\mu) < 1$ .

On note  $\sigma = 2\Re(\mu)$ . Soient  $\sigma_1$  et  $K$  deux constantes telles que

$$\sigma < \sigma_1 < 1 \quad \text{et} \quad |A_\alpha^0| < K, \quad |A_\beta^0| < K.$$

Alors il existe un réel strictement positif  $\varepsilon > 0$  tel que dans tout secteur

$$S_{\varepsilon, \varphi} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < \varepsilon, \quad |\arg \tau| < \varphi\},$$

il existe une unique solution  $A_\alpha(\tau)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ),  $A_\beta(\tau)$  ( $\beta = p, \dots, n+1$ ) du système (53) vérifiant :

$$(71) \quad |A_\alpha(\tau) - A_\alpha^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1}, \quad |\tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau) \tau^\Lambda - A_\beta^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1}.$$

*Démonstration.* — On pose, pour tout  $\beta = p, \dots, n+1$ ,

$$\tilde{A}_\beta(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau) \tau^\Lambda.$$

On réécrit le système de Schlesinger restreint (53) avec les matrices  $A_\alpha(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta(\tau)$ , où  $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$  et  $\beta = p, \dots, n+1$ , comme inconnues :

$$(72) \quad \begin{cases} \frac{dA_\alpha}{d\tau} = \sum_\beta \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha} [\tau^\Lambda \tilde{A}_\beta(\tau)\tau^{-\Lambda}, A_\alpha(\tau)], \\ \frac{d\tilde{A}_\beta}{d\tau} = \sum_\alpha \frac{\nu_\beta}{\tau\nu_\beta - t_\alpha} \left[ \tau^{-\Lambda} A_\alpha(\tau)\tau^\Lambda, \tilde{A}_\beta(\tau) \right] \\ \quad + \frac{1}{\tau} \sum_{\beta'} [(\tilde{A}_{\beta'}(\tau) - A_{\beta'}^0), \tilde{A}_\beta(\tau)]. \end{cases}$$

On construit la solution recherchée en procédant par itération. On pose

$$A_\alpha^{(0)}(\tau) = A_\alpha^0, \quad \tilde{A}_\beta^{(0)}(\tau) = A_\beta^0,$$

et pour tout entier  $k$ , on définit  $A_\alpha^{(k)}(\tau), \tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  à partir de  $A_\alpha^{(k-1)}(\tau), \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(\tau)$  par :

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(k)}(\tau) &= A_\alpha^0 + \sum_\beta \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha} [s^\Lambda \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)s^{-\Lambda}, A_\alpha^{(k-1)}(s)] ds, \\ \tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau) &= A_\beta^0 + \sum_\alpha \int_0^\tau \frac{\nu_\beta}{s\nu_\beta - t_\alpha} [s^{-\Lambda} A_\alpha^{(k-1)}(s)s^\Lambda, \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)] ds \\ &\quad + \sum_{\beta'} \int_0^\tau \frac{1}{s} [(\tilde{A}_{\beta'}^{(k-1)}(s) - A_{\beta'}^0), \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(s)] ds. \end{aligned}$$

Les intégrales sont calculées le long du segment joignant 0 et  $\tau$  :

$$\{s = r e^{i\psi} \mid 0 < r < |\tau|, \psi = \arg \tau\}.$$

Soit une constante  $\delta$  telle que  $0 < \delta < 1$ . On va montrer par récurrence que les matrices les  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  sont bien définies et qu'elles convergent uniformément dans tout voisinage compact de  $\tau = 0$ . Pour cela, on va montrer qu'il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  ne dépendant que de  $\sigma, \sigma_1, \delta, K, r$  et  $R$  tel que les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  vérifient pour tout  $\tau$  dans le secteur  $S_{\varepsilon, \varphi}$  les conditions asymptotiques

$$(73) \quad |A_\alpha^{(k)}(\tau) - A_\alpha^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1},$$

$$(74) \quad |\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau) - A_\beta^0| \leq K|\tau|^{1-\sigma_1}$$

et

$$(75) \quad |A_\alpha^{(k)}(\tau) - A_\alpha^{(k-1)}(\tau)| \leq K\delta^{k-1}|\tau|^{1-\sigma_1},$$

$$(76) \quad |\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau) - \tilde{A}_\beta^{(k-1)}(\tau)| \leq K\delta^{k-1}|\tau|^{1-\sigma_1}$$

L'initialisation est évidente. Supposons que les matrices  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  sont bien définies et qu'elles vérifient les majorations (73)<sub>k,...</sub>, (76)<sub>k</sub>. On doit avoir

$$\varepsilon < \frac{r}{R}$$

où les constantes  $r$  et  $R$  sont définies par (52). On choisit de plus

$$\varepsilon < 1.$$

On a alors par les majorations (73)<sub>k</sub> et (74)<sub>k</sub> et par définition de la constante  $K$

$$(77) \quad |A_\alpha^{(k)}(\tau)| < 2K, \quad |\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)| < 2K.$$

Or pour toute matrice  $C \in M(2, \mathbb{C})$ , les éléments des matrices  $\tau^{-\Lambda} C \tau^\Lambda$  et  $\tau^\Lambda C \tau^{-\Lambda}$  sont des polynômes du premier degré en  $\tau^\sigma$  et  $\tau^{-\sigma}$ , et donc

$$|\tau^{-\Lambda} C \tau^\Lambda| \leq |C| \cdot |\tau|^{-\sigma}, \quad |\tau^\Lambda C \tau^{-\Lambda}| \leq |C| \cdot |\tau|^{-\sigma}.$$

On peut donc déduire de (77)<sub>k</sub>

$$|\tau^{-\Lambda} A_\alpha^{(k)}(\tau) \tau^\Lambda| \leq 2K |\tau|^{-\sigma}, \quad |\tau^\Lambda \tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau) \tau^{-\Lambda}| \leq 2K |\tau|^{-\sigma}.$$

On peut déduire des ces majorations et des majorations (73)<sub>k</sub> et (74)<sub>k</sub> que les matrices  $A_\alpha^{(k+1)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k+1)}(\tau)$  sont bien définies.

Établissons les majorations (73)<sub>k+1</sub> et (74)<sub>k+1</sub>. On remarque tout d'abord que l'on a pour tout  $\tau$  dans le secteur  $S_{\varepsilon, \varphi}$

$$\left| \frac{\nu_\beta}{\tau \nu_\beta - t_\alpha} \right| \leq \left( \frac{r}{R} - \varepsilon \right)^{-1} < \left( \frac{r}{R} - 1 \right)^{-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |A_\alpha^{(k+1)}(\tau) - A_\alpha^0| &\leq 2 \sum_\beta \int_0^{|\tau|} \left| \frac{\nu_\beta}{s \nu_\beta - t_\alpha} \right| \cdot |s^\Lambda \tilde{A}_\beta^{(k)}(s) s^{-\Lambda}| \cdot |A_\alpha^{(k)}(s)| \, ds \\ &\leq 8(n-p+2) \left( \frac{r}{R} - 1 \right)^{-1} K^2 \int_0^{|\tau|} \frac{ds}{s^\sigma} \leq K |\tau|^{1-\sigma_1} \left[ \frac{8K(n-p+2)}{(1-\sigma)(r/R-1)} \right] \varepsilon^{\sigma_1-\sigma}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} |\tilde{A}_\beta^{(k+1)}(\tau) - A_\beta^0| &\leq 2 \sum_\alpha \int_0^{|\tau|} \left| \frac{\nu_\beta}{s \nu_\beta - t_\alpha} \right| \cdot |s^{-\Lambda} A_\alpha^{(k)}(s) s^\Lambda| \cdot |\tilde{A}_\beta^{(k)}(s)| \, ds \\ &\quad + 2 \sum_{\beta'} \int_0^{|\tau|} \frac{1}{s} |\tilde{A}_{\beta'}^{(k)}(s) - A_{\beta'}^0| \cdot |\tilde{A}_\beta^{(k)}(s)| \, ds \\ &\leq K |\tau|^{1-\sigma_1} \left[ \frac{4K}{(1-\sigma)} \left( \frac{2p}{(r/R-1)} + (n-p+2) \right) \right] \varepsilon^{\sigma_1-\sigma}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon^{\sigma_1-\sigma}$  soit inférieur à la plus grande des deux quantités

$$\frac{(1-\sigma)(r/R-1)}{8K(n-p+2)} \quad \text{et} \quad \frac{(1-\sigma)}{4K} \left[ \frac{2p}{(r/R-1)} + (n-p+2) \right]^{-1}.$$

On obtient de même les majorations (75)<sub>k+1</sub> et (76)<sub>k+1</sub>. On en déduit donc que les suites  $A_\alpha^{(k)}(\tau)$  et  $\tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau)$  convergent uniformément dans tout voisinage compact de  $\tau = 0$ . On note

$$A_\alpha(\tau) := \lim_{k \rightarrow +\infty} A_\alpha^{(k)}(\tau), \quad \tilde{A}_\beta(\tau) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{A}_\beta^{(k)}(\tau).$$

Alors les matrices  $A_\alpha(\tau)$  et  $A_\beta(\tau) = \tau^\Lambda \tilde{A}_\beta(\tau) \tau^{-\Lambda}$  constitue une solution du système de Schlesinger restreint (53). Cette solution vérifie les conditions asymptotiques (54). L'unicité de cette solution se montrerait de même par récurrence.  $\square$

**Démonstration de la proposition 5.3.4.** — On rappelle l'énoncé de la proposition 5.3.4.

PROPOSITION 5.3.4. — *Les matrices  $A_\alpha^0(t', \nu)$  ( $\alpha = 1, \dots, p-1, n+2$ ) et  $\Lambda(t', \nu)$  sont solutions du système de Schlesinger*

$$(78) \quad d'A'_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha} [A'_{\alpha'}, A'_\alpha] d' \log(t_\alpha - t_{\alpha'}), \quad d_\nu A'_\alpha = 0$$

où on a posé  $A_{n+1}^0(t', \nu) := \Lambda(t', \nu)$ , et où  $d'$  désigne la différentiation par rapport à  $t' = (t_1, \dots, t_{p-1})$  et  $d_\nu$  la différentiation par rapport à  $\nu = (\nu_{p+1}, \dots, \nu_n)$ . Les matrices

$$A_\alpha^0(t', \nu) \quad (\alpha = 1, \dots, p-1, n+2) \quad \text{et} \quad A_\beta^0(t', \nu) \quad (\beta = p, \dots, n+1)$$

sont solutions du système

$$(79) \quad d'A_\beta^0 = \sum_{\alpha=1}^{p-1} [A_\beta^0, A_\alpha^0] d' \log(t_\alpha), \quad d_\nu A_\beta^0 = \sum_{\beta' \neq \beta} [A_{\beta'}^0, A_\beta^0] d_\nu \log(\nu_\beta - \nu_{\beta'}).$$

*Démonstration.* — On établit uniquement le système (79). Le système (78) se montre de la même manière, et il est plus simple à établir. D'après le système de Schlesinger (17), on a

$$\begin{aligned} d'A_\beta &= \sum_{\alpha} [A_\alpha, A_\beta] d' \log(t_\alpha - \tau \nu_\beta), \\ d_\nu A_\beta &= -\tau \sum_{\alpha} [A_\alpha, A_\beta] d_\nu \log(t_\alpha - \tau \nu_\beta) + \sum_{\beta' \neq \beta} [A_{\beta'}, A_\beta] d_\nu \log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta). \end{aligned}$$

On va en déduire les équations vérifiées par les matrices  $\tilde{A}_\beta(\tau) = \tau^{-\Lambda} A_\beta(\tau) \tau^\Lambda$ . Pour cela, il faut vérifier que pour tout  $\alpha = 1, \dots, p-1$

$$(80) \quad d'\Lambda = -\sum_{\alpha} [\Lambda, A_\alpha^0] d' \log t_\alpha.$$

Comme  $A_\infty = -\sum_{\alpha} A_\alpha^0 - \sum_{\beta} A_\beta^0 = -\sum_{\alpha} A_\alpha(\tau) - \sum_{\beta} A_\beta(\tau)$ , on a

$$\Lambda = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{\beta} A_\beta(\tau).$$

Or

$$\left[ \sum_{\beta} A_\beta, A_\alpha \right] = \sum_{\beta} (\tau \nu_\beta - t_\alpha) \frac{\partial A_\beta}{\partial t_\alpha} = \tau^{1-\sigma} \sum_{\beta} \nu_\beta \frac{\partial(\tau^\sigma A_\beta)}{\partial t_\alpha} - t_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sum_{\beta} A_\beta.$$

Grâce à l'assertion (58) de la proposition 5.3.2, lorsque  $\tau$  tend vers 0, on obtient (80). On en déduit

$$(81) \quad d'\tau^\Lambda = -\sum_{\alpha} [\tau^\Lambda, A_\alpha^0] d' \log t_\alpha, \quad d'\tau^{-\Lambda} = -\sum_{\alpha} [\tau^{-\Lambda}, A_\alpha^0] d' \log t_\alpha,$$

vu que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^\Lambda}{\partial t_\alpha} &= \log(\tau) \int_0^1 \tau^{(1-u)\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t_\alpha} \tau^{u\Lambda} du = -\frac{1}{t_\alpha} \int_0^1 \tau^{(1-u)\Lambda} [\log(\tau)\Lambda, A_\alpha^0] \tau^{u\Lambda} du \\ &= -\frac{1}{t_\alpha} [\tau^{(1-u)\Lambda} A_\alpha^0 \tau^{u\Lambda}]_{u=0}^{u=1}. \end{aligned}$$

On obtient donc, d'une part,

$$d_\nu \tilde{A}_\beta = -\tau^{1-\sigma} \sum_{\alpha} [\tau^\sigma \tilde{A}_\alpha, \tilde{A}_\beta] d_\nu \log(t_\alpha - \tau\nu_\beta) + \sum_{\beta' \neq \beta} [\tilde{A}_{\beta'}, \tilde{A}_\beta] d_\nu \log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta),$$

et donc, vu l'assertion (56) de la proposition 5.3.2, quand  $\tau$  tend vers 0, on obtient

$$d_\nu A_\beta^0 = \sum_{\beta' \neq \beta} [A_{\beta'}^0, A_\beta^0] d_\nu \log(\nu_{\beta'} - \nu_\beta).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d' \tilde{A}_\beta &= \sum_{\alpha} \left( \frac{[\tilde{A}_\alpha, \tilde{A}_\beta]}{1 - \tau\nu_\beta/t_\alpha} - ([\tau^{-\Lambda}, A_\alpha^0] A_\beta \tau^\Lambda + \tau^{-\Lambda} A_\beta [\tau^\Lambda A_\alpha^0]) \right) d' \log t_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} \left( \frac{[\tilde{A}_\alpha, \tilde{A}_\beta]}{1 - \tau\nu_\beta/t_\alpha} - [\tilde{A}_\beta, A_\alpha^0 - \tau^{-\Lambda} A_\alpha^0 \tau^\Lambda] \right) d' \log t_\alpha \\ &= -\sum_{\alpha} ([\tilde{A}_\beta, A_\alpha^0] + [\tilde{A}_\beta, \tau^{-\Lambda} (A_\alpha - A_\alpha^0) \tau^\Lambda] + \varepsilon(\tau) [\tilde{A}_\beta, \tau^\sigma \tilde{A}_\alpha]) d' \log t_\alpha, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon(\tau)$  est une fonction qui tend vers 0 avec  $\tau$ . On a finalement à la limite, de nouveau par la proposition 5.3.2,

$$d' A_\beta^0 = -\sum_{\alpha=1}^{p-1} [A_\beta^0, A_\alpha^0] d' \log(t_\alpha). \quad \square$$



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANOSOV (D. V.) & BOLIBRUCH (A. A.) – *The Riemann-Hilbert problem*, Aspects Math., E22, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.
- [2] BEAUVILLE (ARNAUD) – *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch)*, Astérisque, t. **216** (1993), pp. 103–119, Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93, Exp. N° 765, 4.
- [3] BIRKHOFF (GEORGE) – *The generalized Hilbert problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations*, Proc. Amer. Acad., t. **49** (1913), pp. 521–568.
- [4] BOLIBRUCH (A. A.) – *Construction of a fuchsian equation from a monodromy representation*, Math. Notes Acad. Sci. USSR, t. **48** (1990), no. 5, pp. 1090–1099.
- [5] ———, *The Riemann-Hilbert problem*, Russian Math. Surveys, t. **45** (1990), pp. 1–47.
- [6] ———, *Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem*, in *Global analysis—studies and applications, V*, Lecture Notes in Math., vol. 1520, Springer, Berlin, 1992, pp. 139–155.
- [7] BURSTALL (FRANCIS), PEDIT (FRANZ) & PINKALL (ULRICH) – *Schwarzian derivatives and flows of surfaces*, in *Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, Contemp. Math., vol. 308, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 39–61.
- [8] DANIEL (BENOÎT) – *Minimal disks bounded by three straight lines in Euclidean space and trinoids in hyperbolic space*, J. Differential Geom., t. **72** (2006), no. 3, pp. 467–508.
- [9] DARBOUX (GASTON) – *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. 1, Livre 3, Gauthier-Villars, Paris, 1887–89.

- [10] DESIDERI (L.) – *Problème de Plateau, équations fuchsienues et problème de Riemann-Hilbert*, Thèse, Université Paris Diderot — Paris VII, Décembre 2009.
- [11] ———, *The Plateau problem for polygonal boundary curves in Minkowski 3-space*. <http://arxiv.org/abs/1012.3582>, Submitted to publication (2010).
- [12] DORFMEISTER (JOSEF) & WU (HONGYOU) – *Construction of constant mean curvature  $n$ -noids from holomorphic potentials*, Math. Z., t. **258** (2008), no. 4, pp. 773–803.
- [13] DOUGLAS (JESSE) – *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **33** (1931).
- [14] GARNIER (RENÉ) – *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Annales Sci. École Norm. Sup., t. **3** (1912), no. 29, pp. 1–126.
- [15] ———, *Solutions du problème de Riemann pour les systèmes différentiels du second ordre*, Annales Sci. École Norm. Sup., t. **3** (1926), no. 43, pp. 177–307.
- [16] ———, *Le problème de Plateau*, Annales Sci. École Norm. Sup., t. **3** (1928), no. 45, pp. 53–144.
- [17] GARNIER (RENÉ) – *Sur un théorème de Schwarz*, Comment. Math. Helv., t. **25** (1951), pp. 140–172.
- [18] ———, *Sur le problème de Plateau pour les quadrilatères gauches ayant un sommet à l'infini*, J. Math. Pures Appl. (9), t. **41** (1962), pp. 241–271.
- [19] ———, *Sur le problème de Plateau pour un quadrilatère variable qui peut acquérir un point double*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), t. **58** (1962), pp. 1–34.
- [20] GULLIVER (R.) – *Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature*, Ann. of Math. (2), t. **97** (1973), pp. 275–305.
- [21] GULLIVER (R.), OSSERMAN (R.) & ROYDEN (H. L.) – *A theory of branched immersions of surfaces*, Amer. J. Math., t. **95** (1973), pp. 750–812.
- [22] HARTMAN (PHILIP) – *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [23] IWASAKI (KATSUNORI), KIMURA (HIRONOBU), SHIMOMURA (SHUN) & YOSHIDA (MASAAKI) – *From Gauss to Painlevé*, Aspects Math., E16, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991, A modern theory of special functions.
- [24] JIMBO (MICHIO) – *Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. **18** (1982), no. 3, pp. 1137–1161.

- [25] KUSNER (ROB) & SCHMITT (NICK) – *The spinor representation of surfaces in space*, 1996, [arXiv:dg-ga/9610005v1](https://arxiv.org/abs/dg-ga/9610005v1).
- [26] MALGRANGE (B.) – Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières, in *Mathematics and Physics (Paris, 1979/1982)*, Progr. Math., vol. 37, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 401–426.
- [27] MIWA (TETSUJI) – *Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of  $\tau$  functions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. 17 (1981), no. 2, pp. 703–721.
- [28] OHTSUKI (MAKOTO) – *On the number of apparent singularities of a linear differential equation*, Tokyo J. Math., t. 5 (1982), no. 1, pp. 23–29.
- [29] OKAMOTO (KAZUO) – *Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier system*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, t. 33 (1986), pp. 575–618.
- [30] OSSERMAN (R.) – *A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau’s problem*, Ann. of Math. (2), t. 91 (1970), pp. 550–569.
- [31] PÉREZ (JOAQUÍN) & ROS (ANTONIO) – *The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, Indiana Univ. Math. J., t. 45 (1996), no. 1, pp. 177–204.
- [32] ———, *The space of complete minimal surfaces with finite total curvature as Lagrangian submanifold*, Trans. Amer. Math. Soc., t. 351 (1999), no. 10, pp. 3935–3952.
- [33] PLEMELJ (JOSIP) – *Riemannsche Funktionenscharren mit gegebener Monodromiegruppe*, Monatsh. Math. Phys., t. 19 (1908), no. 1, pp. 211–245.
- [34] POINCARÉ (HENRI) – *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Math., t. 5 (1884), pp. 201–312.
- [35] RADÓ (TIBOR) – *On Plateau’s problem*, Ann. of Math., t. 2 (1930), no. 31, pp. 457–469.
- [36] RIEMANN (BERNHARD) – *Œuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [37] SATO (MIKIO), MIWA (TETSUJI) & JIMBO (MICHIO) – *Holonomic quantum fields. II. The Riemann-Hilbert problem*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., t. 15 (1979), no. 1, pp. 201–278.
- [38] SCHWARZ (HANS-RUDOLF) – *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen*, Monatsberichte der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin (1872), pp. 3–27.

- [39] UMEHARA (MASAAKI) & YAMADA (KOTARO) – *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2), t. **137** (1993), no. 3, pp. 611–638.
- [40] WEIERSTRASS (KARL) – *Über die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich null ist*, Monatsberichte der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin (1866), pp. 855.
- [41] ———, *Mathematische Werke*, vol. III, Mayer and MÄyler, Berlin, 1903.